ITP-UH-14/97

Kollektive Feldtheorie und Momentenmethode in Matrixmodellen

Vom Fachbereich Physik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Dipl.–Phys. Peter Adamietz
geboren am 19.12.1966 in Hannover

1997

Abstract

In this thesis we discuss the different methods for the solution of hermitian and complex one matrix models with special emphasis on the collective field theory for the corresponding eigenvalue model and the moment method which we apply to the complex matrix model.

Following an introduction to matrix models in which we describe their connection to quantum gravity and the coupling of conformal matter to gravity we present briefly two well known methods for their solution. While the saddle point method is only capable to give the planar result we can use the orthogonal polynomial method to determine also the topological expansion, although it becomes non tractable for generic potential and higher genera.

In the first main part of the thesis we then investigate the collective field theory for the eigenvalue model as another proposed method for solving matrix models. Changing variables from the finite number of matrix eigenvalues to a continuous eigenvalue density the model can be reformulated as an one dimensional field theory with two scalar fields. For the free energy in the semiclassical expansion we get contributions from the classical saddle point configuration, the 1–loop determinant and the Feynman diagrams which are obtained from the interactions terms using the free propagators.
In the course of the calculation we are faced with difficulties – mainly due to singularities – of technical kind as well as of principle nature. Thus we are not able to obtain a systematic $1/N$ expansion of the free energy and so have to state the collective field method as being inferior to the orthogonal polynomial method and the moment method.

The recent moment method is based on the iterative solution of the Schwinger–Dyson (loop) equations of the matrix model using certain moments of the potential. It allows for generic potential the topological expansion of the free energy and the correlation functions in hermitian and complex one matrix models and is non–perturbatively in the coupling constants. We use this method in the second part of the thesis to discuss in detail the critical behaviour of the complex matrix model which is associated with zeros of the eigenvalue density at the origin and state the free energy explicitly up to genus five.
As an example we consider the simplest potential with such a critical behaviour and show the recursion functions obtained by the orthogonal polynomial method which are qualitatively different from the minimal critical hermitian matrix models. In the asymptotical solution of the resulting string equation in the double scaling limit we see explicitly coincidence with the topological expansion of the free energy from the moment method.

Referent:	Prof. Dr. O. Lechtenfeld
Koreferent:	Prof. Dr. N. Dragon
Tag der Promotion:	9. April 1997

Zusammenfassung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit den verschiedenen zur Lösung von hermiteschen und komplexen Einmatrixmodellen entwickelten bzw. vorgeschlagenen Verfahren, insbesondere mit der Untersuchung der kollektiven Feldtheorie für das korrespondierende Eigenwertmodell sowie einer Anwendung der Momentenmethode auf das komplexe Matrixmodell.

Nach einer Einführung, warum Matrixmodelle im Zusammenhang mit Quantengravitation von Interesse sind und wie sie im Doppelskalenlimes die Kopplung von konformer Materie an Gravitation beschreiben, stellen wir kurz die beiden schon länger bekannten Verfahren zu deren Lösung dar. Während die Sattelpunktsmethode nur in der Lage ist, den planaren Fall zu beschreiben, kann mit der Methode der orthogonalen Polynome auch die topologische Entwicklung bestimmt werden, auch wenn dies für generisches Potential und höhere Genera auf technische Probleme stößt.

Den ersten Schwerpunkt der Arbeit bildet dann die Untersuchung der als weiteres Verfahren vorgeschlagenen kollektiven Feldtheorie für das Eigenwertmodell. Nach einem Übergang von den endlichen Eigenwerten zu einer kontinuierlichen Eigenwertdichte läßt sich das Modell durch eine eindimensionale Feldtheorie in zwei skalaren Feldern beschreiben. Die semiklassische Entwicklung der freien Energie setzt sich dann zusammen aus den Beiträgen der klassischen Sattelpunktskonfiguration, der 1–Loop Determinante sowie den sich mit Hilfe der Propagatoren aus den Wechselwirkungstermen ergebenden Feynman–Diagrammen.
Die dabei aber auftretenden Probleme – insbesondere in Form von Divergenzen – sind sowohl technischer als auch prinzipieller Natur und führen dazu, daß wir mit der kollektiven Feldtheorie keine systematische Entwicklung der freien Energie in $1/N$ erhalten können. Sie ist damit sowohl der Methode der orthogonalen Polynome als auch der Momentenmethode unterlegen.

Die Momentenmethode ist ein neueres Verfahren, das auf der iterativen Lösung der Schwinger–Dyson Gleichungen (Loopgleichungen) des Matrixmodells mit Hilfe von bestimmten Momenten des Potentials basiert. Es erlaubt für generisches Potential die in den Kopplungskonstanten nicht störungstheoretische $1/N$–Entwicklung sowohl der freien Energie als auch der Korrelationsfunktionen des hermiteschen und komplexen Einmatrixmodells. Wir verwenden dieses Verfahren im zweiten Teil der Arbeit, um genauer das kritische Verhalten des komplexen Matrixmodells zu untersuchen, welches mit dem Auftreten von Nullstellen am Ursprung der Eigenwertdichte verbunden ist und geben dabei die freie Energie explizit bis Genus fünf an.
Als Beispiel betrachten wir dann für das einfachste Potential, das solch kritisches Verhalten zeigt, die mit Hilfe der orthogonalen Polynome gewonnenen Rekursionsfunktionen, welche ein qualitativ anderes Verhalten zeigen als die des minimal kritischen hermiteschen Matrixmodells. In der asymptotischen Lösung der sich aus ihnen im Doppelskalenlimes ergebenden Stringgleichung sehen wir explizite Übereinstimmung mit der topologischen Entwicklung der freien Energie aus der Momentenmethode.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Matrixmodelle oder Ensembles von Zufallsmatrizen [1] sind schon seit den fünfziger Jahren in der Physik von Interesse, als sie zuerst von Wigner im Rahmen der Kernphysik zur Beschreibung der Energieniveaus in Vielnukleonensystemen vorgeschlagen und allgemein zur statistischen Beschreibung des Hamiltonians komplizierter quantenmechanischer Vielzustandssysteme untersucht wurden (cf. Dyson [2]). Später wurden sie in den siebziger Jahren von t'Hooft [3] und anderen im Zusammenhang mit der Quantenchromodynamik zur Untersuchung von $SU(N)$ Eichtheorien im Limes $N \to \infty$ betrachtet.

In dieser Zeit wurden auch die beiden klassischen mathematischen Verfahren zu ihrer Behandlung entwickelt: Die Sattelpunktsmethode [4] erlaubte die Berechnung der freien Energie und der Korrelationsfunktionen im planaren Limes unendlicher Matrixgröße N, während mit der Methode der orthogonalen Polynome [5] auch deren $1/N$ Korrekturen bestimmt werden können, was aber für generisches Potential und höhere Ordnungen auf technische Probleme führt.

Ende der achtziger Jahre gewannen Matrixmodelle dann erneut an Interesse als ihre Bedeutung im Rahmen der Stringtheorie und Quantengravitation erkannt wurde [6, 7]. Die Polyakov–Wirkung des D–dimensionalen bosonisches Strings läßt sich nämlich auch auffassen als Kopplung von D Materiefeldern an zweidimensionale Gravitation, deren Zustandssumme in der Pfadintegralquantisierung dann durch das Integral über alle Geometrien eines Genus und die Summe über alle Genera gegeben ist. In einer diskretisierten Version der Quantengravitation wird das Integral über die Metriken einer Fläche bestimmten Genus dabei durch eine Summation über alle Triangulierungen dieser Fläche ersetzt. Der zu solch einer Triangulierung duale Graph läßt sich nun aber gerade durch ein Feynman–Diagramm eines Matrixmodells beschreiben. In einem Doppelskalenlimes, bei dem die Größe der einzelnen Dreiecke der Triangulierung gegen Null geht und gleichzeitig die Kopplungskonstanten im Matrixpotential gegen eine kritische Kopplung gehen, ist das Matrixmodell dann in der Lage, die Kopplung von konformer Materie mit $D = c \leq 1$ an zweidimensionale Gravitation und damit niedrigdimensionale bosonische Stringtheorien zu beschreiben. Es ist dabei ein offenes Problem, ob die Methoden der Matrixmodelle auf den Bereich jenseits der $c = 1$ Barriere erweitert werden können und damit auch die Beschreibung realistischer bosonischer Stringtheorien erlauben.

Wir werden in Kapitel I genauer auf den Zusammenhang zwischen Matrixmodellen und Quantengravitation eingehen; für weitere Literatur mit ausführlicher Bibliographie verweisen wir auf die Darstellungen in [8]. Eine Verallgemeinerung auf supersymmetrische Matrixmodelle findet man in [9].

In Kapitel II stellen wir die beiden schon erwähnten Verfahren zur Lösung von Matrixmodellen dar, bevor wir dann in Kapitel III als erstem Schwerpunkt dieser Arbeit zur Untersuchung der kollektiven Feldtheorie für das korrespondierende Eigenwertmodell kommen. Nachdem sich mit der Einführung der Eigenwertdichte in der Sattelpunktsmethode die planare Lösung relativ einfach ergab, stellte sich die Frage, ob nicht auch für den nicht–planaren Fall eine auf der Eigenwertdichte basierende Methode entwickelt werden kann. Dazu wurde von Lechtenfeld in [10] ein Verfahren vorgeschlagen, bei dem die Jacobideterminante der Variablentransformation von den endlichen Eigenwerten auf eine kontinuierliche Eigenwertdichte mit Hilfe der Einführung eines konjugierten Feldes [11] exakt berücksichtigt werden konnte. Wir erhalten so eine eindimensionale kollektive Feldtheorie mit zwei skalaren Feldern, deren semiklassische Entwicklung sich dann aus der klassischen Sattelpunktskonfiguration, der 1–Loop Determinante sowie den sich mit Hilfe der Propagatoren aus den Wechselwirkungstermen ergebenden Feynman–Diagrammen zusammensetzt. Ein weiteres Verfahren einer kollektiven Feldtheorie wurde von Ben–Menahem [12] vorgeschlagen, in dem eine zweidimensionale Feldtheorie mit einem Feld verwendet wird; wir werden hier das Verfahren von Lechtenfeld genauer untersuchen.

Dieser Zugang erweist sich allerdings als problematisch, da er die semiklassische Entwicklung der Theorie für endliches N erfordert, wofür die Sattelpunktskonfiguration und die Propagatoren aber nicht angegeben werden können. Lassen wir wie in [10] die N–Abhängigkeit der klassischen Eigenwertdichte zunächst unberücksichtigt, scheint eine formale $1/N$–Entwicklung der Propagatoren und der 1–Loop Determinante aber möglich, wenn wir die Theorie regularisierend auf ein endliches Intervall beschränken. Aber auch dann erhalten wir sowohl von den Feynman–Diagrammen wie von der 1–Loop Determinante divergente Beiträge, die bei einer UV–Regularisierung, die in Betracht zieht, daß wir bei der Formulierung der kollektiven Feldtheorie von den N Eigenwerten zu einer kontinuierlichen Eigenwertdichte übergegangen sind, die scheinbare $1/N$–Entwicklung zunichte macht. Wir sind damit nicht in der Lage, über die planare Lösung hinauszugehen und finden die kollektive Feldtheorie sowohl der Methode der orthogonalen Polynome als auch der Momentenmethode unterlegen.

Die Momentenmethode ist ein von Ambjørn et al. [15, 14, 16] entwickeltes Verfahren zur

Einleitung

iterativen Lösung der Schwinger–Dyson oder Loop Gleichungen des Matrixmodells mit Hilfe bestimmter Momente des Potentials und liefert die in den Kopplungskonstanten nicht störungstheoretische topologische Entwicklung der freien Energie sowie der Korrelatoren. Wir verwenden dieses Verfahren in Kapitel IV für das komplexe Matrixmodell und untersuchen dessen kritisches Verhalten im allgemeinen Fall, in dem an beiden Endpunkten der Eigenwertdichte (zusätzliche) Nullstellen auftreten können. Wir finden dabei auch ein weiteres, im hermiteschen Matrixmodell so nicht auftretendes kritisches Verhalten im Doppelskalenlimes. Allerdings läßt sich für dieses kritische Verhalten nicht wie beim hermiteschen Matrixmodell die Iteration der Loopgleichung direkt im Doppelskalenlimes durchführen.

In Kapitel V betrachten wir als Beispiel das einfachste Potential mit diesem kritischen Verhalten und diskutieren die mit Hilfe der orthogonalen Polynome abgeleiteten Rekursionsfunktionen, welche sich qualitativ von denen der minimalen hermiteschen Matrixmodelle unterscheiden. Für die asymptotische Lösung der sich aus ihnen im Doppelskalenlimes abgeleiteten Stringgleichung finden wir explizite Übereinstimmung mit der in Kapitel IV bis Genus fünf angegebenen freien Energie im Doppelskalenlimes.

Kapitel I: Matrixmodelle und Quantengravitation

1. Quantengravitation

Betrachten wir die Polyakov–Wirkung des D-dimensionalen bosonischen Strings,

$$S = \frac{1}{2}\int d^2\xi\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu + \mu\int d^2\xi\sqrt{g} - \frac{1}{4\pi G}\int d^2\xi\sqrt{g}R, \tag{1.1.1}$$

so können wir diese auch interpretieren als die Kopplung von D skalaren Materiefeldern an zweidimensionale (euklidische) Gravitation. Dabei ist μ die kosmologische Konstante, G die Gravitationskonstante und die Integration geht über eine geschlossene Riemannsche Fläche Σ.

Im folgenden werden wir uns nur für reine zweidimensionale Gravitation interessieren, so daß wir als Wirkung für eine Riemannsche Fläche $\Sigma_{g,A}$ vom Genus g und der Fläche A mit Hilfe des Gauß–Bonnet Theorems

$$S = \mu A - G^{-1}\chi \quad \text{mit} \quad \chi = 2-2g \tag{1.1.2}$$

finden. In der Euler–Zahl χ ist g dabei 0 für die Sphäre, 1 für den Torus, usw. . . .

Bei der Pfadintegralquantisierung der 2-dim. Quantengravitation ist die Zustandssumme dann gegeben durch

$$Z[G,\mu] = \sum_{g=0}\int\frac{\mathcal{D}g_{\alpha\beta}}{\mathrm{Vol(Diff)}}\,\mathrm{e}^{-S} = \sum_{g=0}\mathrm{e}^{(2-2g)G^{-1}}\int\limits_0^\infty dA\,\mathrm{e}^{-\mu A}\int\limits_{\Sigma_{g,A}}\frac{\mathcal{D}g_{\alpha\beta}}{\mathrm{Vol(Diff)}} \tag{1.1.3}$$

mit der Summation über alle Topologien und der Integration über alle eichinäquivalenten Geometrien gegebener Topologie, weswegen im Maß formal durch das Volumen der Diffeomorphismengruppe geteilt wurde. Die Schwierigkeit besteht nun darin, das Volumen des Modulraumes

$$\mathrm{Vol}(\Sigma_{g,A}) = \int\limits_{\Sigma_{g,A}}\frac{\mathcal{D}g_{\alpha\beta}}{\mathrm{Vol(Diff)}} \tag{1.1.4}$$

zu berechnen, wobei $\mathrm{Vol}(\Sigma_{g,A})\,dA$ dann die Anzahl der eichinäquivalenten Metriken auf einer Fläche $\Sigma_{g,A'}$ mit $A' \in [A, A+dA]$ angibt.

In einem Kontinuumszugang mit Hilfe der Liouville–Theorie, in dem die Kopplung konformer Materie mit zentraler Ladung $c < 1$ an zweidimensionale Gravitation betrachtet wird, ist es möglich, Aussagen über das Skalenverhalten physikalischer Observablen und des Volumen des Modulraumes zu machen, welche als KPZ–Skalierung bezeichnet werden [17] und auf die wir später zurückkommen werden.

Wir wollen die Zustandssumme nun aber direkt mit Hilfe eines Diskretisierungsverfahrens für die Riemannschen Flächen berechnen, das als dynamische Triangulierung bezeichnet wird. Dabei wird die Fläche durch eine Triangulierung mit gleichseitigen Dreiecken der Größe ε approximiert, so daß aus dem Integral über die Fläche $A = n\varepsilon$ eine Summation über n wird und das Volumen des Modulraumes durch die Anzahl der inäquivalenten Triangulierungen $T_{g,n}$ der aus n Dreiecken bestehenden Fläche auf Genus g gegeben ist. Wir erhalten somit für die diskretisierte Zustandssumme

$$Z^d[G,\mu] = \sum_{g=0}\mathrm{e}^{(2-2g)G^{-1}}\sum_{n=0}\mathrm{e}^{-\mu\varepsilon n}\,T_{g,n}. \tag{1.1.5}$$

Für die Diskretisierung ist es dabei unerheblich, ob sie mit Dreiecken, Quadraten oder beliebigen Polygonen durchgeführt wird.

2. Matrixmodelle

Betrachten wir nun die Triangulierung einer geschlossenen, orientierbaren Fläche, so ist der duale Graph zu der Triangulierung gerade durch einen zusammenhängenden Feynman–Graph einer ϕ^3–Theorie gegeben. Um einen eineindeutigen Zusammenhang zwischen der Triangulierung und dem Feynman–Graphen zu erhalten, müssen wir dabei statt ϕ matrixwertige Felder M_{ij} verwenden.

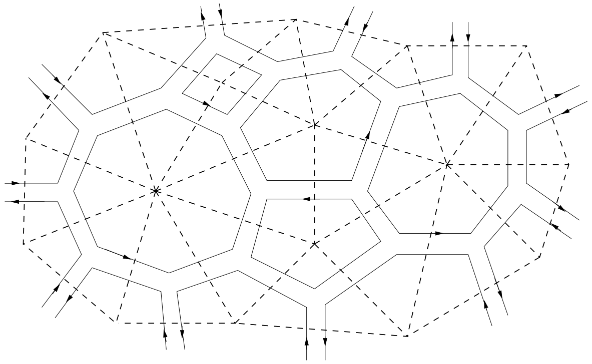


Abb. 1: Dualer Feynman–Graph und Triangulierung (gestrichelt)

Das einfachste Beispiel des hermiteschen 1–Matrixmodells, das eben diese Triangulierungen beschreibt, ist durch folgende Zustandssumme definiert:

$$Z[N,\lambda] = \mathrm{e}^{N^2 F[N,\lambda]} = \int dM \exp\Big[- N \mathrm{tr}\,(\tfrac{1}{2}M^2 + \lambda M^3)\Big], \tag{1.2.1}$$

wobei M_{ij} eine hermitesche $N \times N$–Matrix ist und das Maß für die Integration durch

$$dM = \prod_{i<j} d\,\mathrm{Re}\, M_{ij}\ d\,\mathrm{Im}\, M_{ij} \prod_i dM_{ii} \tag{1.2.2}$$

gegeben ist. Die störungstheoretische Entwicklung der freien Energie F nach der Kopplungskonstanten λ liefert nun die zur Triangulierung dualen zusammenhängenden Feynman–Graphen. Mit dem Propagator der freien Theorie

$$\langle M_{ij} M_{kl} \rangle_0 = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk}, \tag{1.2.3}$$

einem Faktor $-\lambda N$ an jedem kubischen Vertex und einem Faktor $N = \sum_i \delta_{ii}$ für jeden geschlossenen Indexloop erhalten wir die folgenden Feynman–Regeln, wobei die beiden entgegengesetzt orientierten Doppellinien die Propagation der beiden Matrixindizes beschreiben.

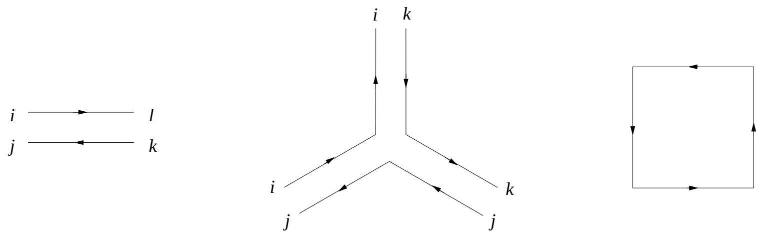


Abb. 2: Propagator, 3–Vertex und Indexloop des hermiteschen Matrixmodells

Bei der Dualität zwischen dem Feynman–Graph und der Triangulierung entsprechen dabei die Indexloops den Ecken, die Propagatoren den Kanten und die Vertizes den Flächen der Dreiecke. Und wie wir in Abb. 1 sehen können, führen die orientierten Indexloops gerade zu einer Orientierung der dualen triangulierten Fläche.

Ein zusammenhängender Feynman-Graph mit V Vertizes, P Propagatoren und L Indexloops trägt dann zur freien Energie mit

$$(-\lambda N)^V N^{-P} N^L = (-\lambda)^V N^{V-P+L} = (-\lambda)^V N^{2-2g} \tag{1.2.4}$$

bei, wobei wir die Euler–Beziehung $V - P + L = \chi$ ausgenutzt haben. Für die freie Energie ergibt sich damit die störungstheoretische Entwicklung

$$N^2 F[N,\lambda] = \sum_{g=0} N^{2-2g} F_g[\lambda] = \sum_{g=0} N^{2-2g} \sum_{V=0} (-\lambda)^V F_{g,V} \tag{1.2.5}$$

mit $F_{g,V}$ als Anzahl der möglichen Feynman–Graphen mit V Vertizes auf Genus g, die aufgrund der Dualität zur Triangulierung mit $T_{g,V}$ identisch ist. Identifizieren wir nun formal

$$N = \mathrm{e}^{G^{-1}}, \quad -\lambda = \mathrm{e}^{-\mu\varepsilon} \tag{1.2.6}$$

in (1.1.5) und (1.2.5), so haben wir mit der freien Energie des Matrixmodells auch die Zustandssumme der diskretisierten zweidimensionalen Quantengravitation berechnet,

$$N^2 F[N,\lambda] = Z^d[G,\mu]. \tag{1.2.7}$$

Kontinuumslimes

Wie wir später sehen werden, wird die freie Energie F_g auf Genus g in Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten λ bei einer kritischen Kopplung λ_c singulär und zeigt in deren Nähe folgendes Skalenverhalten:

$$F_g[\lambda] \sim (\lambda - \lambda_c)^{(2-\gamma_s)(1-g)} \tag{1.2.8}$$

Für unser Beispiel mit dem kubischen Potential lautet der kritische Exponent $\gamma_s = -1/2$ und die kritische Kopplung ist durch $\lambda_c^2 = 1/(108\sqrt{3})$ gegeben [4]. Dabei ist der kritische Exponent universell, d.h. unabhängig von der Art der Triangulierung, und ergibt sich auch für ein quartisches oder generisches Potential[1].

[1] solange dabei kein fine-tuning der Kopplungskonstanten stattfindet, was zu höherem kritischen Verhalten führt, auf das wir später eingehen werden.

Dieses Skalenverhalten der freien Energie erlaubt es uns nun, einen Kontinuumslimes zu definieren. Betrachten wir nämlich den Erwartungswert der Fläche, so finden wir mit $A = \varepsilon n = \varepsilon V$

$$\langle A\rangle = \varepsilon\langle V\rangle = \varepsilon\,\lambda\,\partial_\lambda \ln F_g[\lambda] \sim \frac{\varepsilon}{\lambda-\lambda_c}, \tag{1.2.9}$$

so daß die mittlere Anzahl der Vertizes divergiert und damit die Beiträge von Feynman–Graphen mit einer unendlichen Anzahl von Vertizes dominieren, wenn wir mit der Kopplung gegen die kritische Kopplung λ_c gehen. Den Kontinuumslimes erhalten wir genau dann, wenn wir nun gleichzeitig die Größe der einzelnen Dreiecke nach Null gehen lassen, während die triangulierte Fläche endlich bleibt.

Um zu sehen, inwieweit dieses Verfahren, einen Kontinuumslimes zu definieren, richtig ist, d.h. mit der Kontinuumsformulierung übereinstimmt, können wir die im Rahmen des Matrixmodells berechenbaren Eigenschaften der freien Energie und der Korrelatoren mit denen aus der Liouville–Theorie bekannten [17] vergleichen. So findet man dort für das Skalenverhalten des Volumens des Modulraumes

$$\mathrm{Vol}(\Sigma_{g,A}) = \mathrm{e}^{\mu_c A} A^{-(2-\gamma_s)(1-g)-1} Z_g \tag{1.2.10}$$

mit γ_s als kritischem Exponent der Stringsuszeptibilität, der für die Kopplung konformer Feldtheorien mit zentraler Ladung c durch die KPZ–Formel

$$\gamma_s = \frac{1}{12}\Big[c - 1 - \sqrt{(c-1)(c-25)}\Big] \tag{1.2.11}$$

gegeben ist. Die kritische kosmologische Konstante μ_c sowie Z_g können allerdings nicht bestimmt werden.

Für die Zustandssumme der zweidimensionalen Quantengravitation ergibt sich dann nach Integration über die Fläche A aus (1.1.3)

$$Z[G,\mu] = \sum_{g=0} \mathrm{e}^{(2-2g)G^{-1}} (\mu-\mu_c)^{(2-\gamma_s)(1-g)} \Gamma(-(2-\gamma_s)(1-g)) Z_g, \tag{1.2.12}$$

so daß die Genus g Beiträge zur Zustandssumme der Quantengravitation und zur freien Energie des Matrixmodells das gleiche Skalenverhalten zeigen. Für das kubische Beispiel mit $\gamma_s = -1/2$ finden wir als zentrale Ladung $c = 0$, wie wir es für reine Gravitation ohne Kopplung von konformer Materie erwarten.

Doppelskalenlimes und multikritisches Verhalten

Wir haben gerade gesehen, wie wir über die freie Energie des Matrixmodells die Zustandssumme der zweidimensionalen Quantengravitation berechnen können. Das Matrixmodell läßt sich allerdings nur im Limes unendlicher Matrixgröße als asymptotische Entwicklung in $1/N^2$ lösen, so daß wir im einfachen Limes $N \to \infty$ nur den planaren Beitrag zur freien Energie erhalten, während die Beiträge der höheren Genera demgegenüber mit $1/N^{2g}$ unterdrückt sind. Wir können diese aber aufgrund des Skalenverhaltens in (1.2.8) so verstärken, daß wir kohärente Beiträge von allen Genera erhalten, wenn wir gleichzeitig mit der Kopplung gegen die kritische Kopplung λ_c gehen. In diesem Doppelskalenlimes [6] mit

$$N \to \infty, \quad \lambda \to \lambda_c, \quad N^2(\lambda-\lambda_c)^{2-\gamma_s} \quad \text{konstant}, \tag{1.2.13}$$

können wir das Herangehen an die kritische Kopplung durch Einführung eines Gitterabstandes a mit $a \to 0$ und einer renormierten kosmologischen Konstante Λ_R beschreiben

$$\lambda - \lambda_c = a^\alpha \Lambda_R \quad \Rightarrow \quad N^2(\lambda-\lambda_c)^{2-\gamma_s} = N^2 a^{(2-\gamma_s)\alpha}\Lambda_R^{2-\gamma_s} = \kappa^{-1}\Lambda_R^{2-\gamma_s}. \tag{1.2.14}$$

Für die Genusentwicklung der freien Energie erhalten wir dann mit $\kappa = (N^2 a^{(2-\gamma_s)\alpha})^{-1}$ als renormierter Stringkopplungskonstanten

$$N^2 F[N,\lambda] = \sum_{g=0} \kappa^{g-1} f_g, \quad f_g \sim \Lambda_R^{(2-\gamma_s)(1-g)}, \tag{1.2.15}$$

und der kritische Exponent kann aus dem Skalenverhalten der freien Energie bezüglich der kosmologischen Konstante Λ_R abgelesen werden.

Betrachten wir nun ein Matrixmodell mit generischem Potential $V(M) = \sum \frac{g_k}{k} M^k$, so können wir durch zusätzliche Bedingungen an die Kopplungskonstanten auch ein höheres, m–kritisches Verhalten mit $\gamma_s = -1/m$ erreichen. Wie wir in den folgenden Kapiteln genauer sehen werden, läßt sich für die Eigenwerte des Matrixmodells eine Dichte einführen, die im Limes $N \to \infty$ einen endlichen Träger besitzt und sich für ein generisches Potential an dessen Endpunkten wie eine Wurzel verhält. Das m–kritische Verhalten tritt genau dann auf, wenn die Kopplungskonstanten so adjustiert werden, daß an einem Endpunkt $m-1$ zusätzliche Nullstellen der Eigenwertdichte auftreten. Das Matrixmodell entspricht dann der Kopplung der nicht–unitären $(2, 2m-1)$ minimalen konformen Modelle an Gravitation mit zentraler Ladung $c = 1-3(2m-3)^2/(2m-1)$.

Dies steht im Widerspruch zu dem Skalenverhalten, welches sich für diese zentrale Ladung mit der KPZ–Formel (1.2.11) zu $\gamma_s = -m + 3/2$ ergibt und hat folgenden Grund [7]:

Die KPZ-Formel definiert den kritischen Exponenten über das Skalenverhalten der freien Energie bezüglich der Fläche, wie es in der Liouville–Theorie berechnet werden kann. Für die (p, q) minimalen konformen Modelle mit zentraler Ladung $c = 1 - 6(p-q)^2/pq$ führt das auf $\gamma_s = -2|p-q|/(p+q-|p-q|)$ und damit insbesondere auf $\gamma_s = -1/m$ für die unitären $(m, m+1)$ minimalen Modelle mit $c = 1 - 6/m(m+1)$.

Während für die unitären minimalen Modelle der Operator der niedrigsten Skalendimension gerade die Identität mit $\Delta = 0$ ist, besitzen die nicht–unitären (p, q) minimalen Modelle auch

Operatoren negativer Skalendimension, wobei die niedrigste durch $\Delta_{\min} = (1-(p-q)^2)/4pq$ gegeben ist. Im Matrixmodell beschreibt unsere renormierte kosmologische Konstante jetzt aber gerade die Kopplung an diesen Operator niedrigster Skalendimension und wir erhalten damit als kritischen Exponenten $\gamma_s = -2/(p+q-1)$. Für die unitären Modelle stimmt er natürlich mit der KPZ-Formel überein und wir sehen, wie auch die nicht–unitären $(2, 2m-1)$ Modelle, die durch das multikritische 1–Matrixmodell beschrieben werden können, zu $\gamma_s = -1/m$ führen. (Die allgemeinen (p,q) minimalen Modelle können durch ein multikritisches hermitesches 2–Matrixmodell beschrieben werden [18].)

Um das kritische Verhalten eines Matrixmodells mit einer konformen Feldtheorie zu identifizieren, müssen dabei außer dem Skalenverhalten der freien Energie offensichtlich auch noch Korrelatoren von (Skalen–) Operatoren betrachtet werden.

Im Doppelskalenlimes läßt sich ferner mit Hilfe der Methode der orthogonalen Polynome eine nicht–lineare Differentialgleichung für die Stringsuszeptibilität (der zweiten Ableitung der freien Energie nach der renormierten kosmologischen Konstante) finden, die sog. Stringgleichung. Ihre asymptotische Lösung entspricht dann gerade der Genusentwicklung der freien Energie. Damit lassen sich verschiedene Theorien mit gleichem Skalenverhalten der freien Energie auch durch ihre Stringgleichungen unterscheiden.

Kapitel II:

Sattelpunktsmethode und Orthogonale Polynome

Der Ausgangspunkt sowohl für die Sattelpunktsmethode [4] wie auch für die Methode der orthogonalen Polynome [5] ist die Formulierung des Matrixmodells als Eigenwertmodell. Betrachten wir die Zustandssumme des generischen hermiteschen Matrixmodells,

$$Z[N,g] = \mathrm{e}^{N^2 F[N,g]} = \int dM \, \mathrm{e}^{-N \operatorname{tr} V(M)} \quad \text{mit} \quad V(x) = \sum_{n=1} \frac{g_n}{n} x^n, \tag{2.1}$$

so ist diese invariant unter der unitären Transformation $M \to U^\dagger M U$, $U \in U(N)$, mit deren Hilfe sich die Matrix M diagonalisieren läßt,

$$M = U^\dagger \Lambda U, \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N). \tag{2.2}$$

Das Integrationsmaß transformiert dabei mit

$$dM \to dU \prod_i d\lambda_i J[\lambda], \quad J[\lambda] = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2, \tag{2.3}$$

so daß die Integration über die unitäre Gruppe ausfaktorisiert; die Jacobideterminante ergibt sich analog zu Kapitel IV, wo wir die Diagonalisierung des komplexen Matrixmodells betrachten. In der Eigenwertformulierung erhalten wir damit für beide Modelle

$$Z[N,g] = c_N \int_I \prod_{i=1}^N d\lambda_i \Delta^2[\lambda] \exp\Big[-N \sum_i V(\lambda_i)\Big] \tag{2.4}$$

$$= c_N \int_I \prod_{i=1}^N d\lambda_i \, \exp\Big[-S_N^0\Big] \quad \text{mit} \quad S_N^0 = N \sum_i V(\lambda_i) - \sum_{i,j}{}' \ln|\lambda_i - \lambda_j| \tag{2.5}$$

wobei das Integrationsintervall I für das hermitesche Matrixmodell durch $\mathbb{R}$ und für das komplexe durch $\mathbb{R}^+$ gegeben ist und die gestrichene Summe über $i \neq j$ läuft. Die Jacobideterminante haben wir durch das Quadrat der Vandermonde-Determinante

$$\Delta[\lambda] = \Delta(\lambda_1 \ldots \lambda_N) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) = (-)^{N(N-1)/2} \det|\lambda_i^{j-1}| \tag{2.6}$$

und das Integral über die unitäre Gruppe durch die Konstante c_N ausgedrückt.

Unser Eigenwertmodell entspricht damit einem zweidimensionalen Coulomb–Gas im äußeren Potential V, das auf die (positive) reelle Achse beschränkt ist.

1. Sattelpunktsmethode

Im Limes $N \to \infty$ können wir die planare freie Energie mit Hilfe der Sattelpunktsmethode [4] aus (2.5) bestimmen, indem wir die Wirkung S_N^0 um ihr Minimum entwickeln und dabei nur den führenden Term mitnehmen. Wir erhalten damit[1]

$$F_0 = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} S_N^0 = -\lim_{N\to\infty} \Big[\frac{1}{N} \sum_i V(\lambda_i) - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j}{}' \ln|\lambda_i - \lambda_j|\Big] \tag{2.1.1}$$

wobei die Eigenwerte durch die Sattelpunktsbedingung bestimmt sind

$$\frac{\delta}{\delta \lambda_i} S_N^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} V'(\lambda_i) = \frac{1}{N} \sum_j{}' \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \tag{2.1.2}$$

Diese Bedingung läßt sich im Limes $N \to \infty$ als Kontinuumsproblem formulieren und lösen, indem wir eine monotone Funktion $\lambda(x)$ mit $\lambda_i = \lambda(i/N)$ einführen, mit der sich die Sattelpunktsbedingung und die freie Energie darstellen als

$$\frac{1}{2} V'(\lambda(x)) = \int_0^1 dy \, \frac{1}{\lambda(x) - \lambda(y)}, \quad F_0 = -\int_0^1 dx \, V(\lambda(x)) + \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, \ln|\lambda(x) - \lambda(y)|. \tag{2.1.3}$$

Gehen wir nun von den Eigenwerten über zu einer normierten Eigenwertdichte mit Träger $\sigma = [a, b]$,

$$\rho_0(\lambda) = \frac{dx}{d\lambda}, \quad \int_a^b d\lambda \rho_0(\lambda) = 1, \tag{2.1.4}$$

[1] Wir vernachlässigen hier die nicht von den Kopplungskonstanten abhängige Konstante c_N.

so ergibt sich für die Sattelpunktsbedingung

$$\frac{1}{2}V'(\lambda) = \fint_a^b d\mu \frac{\rho_0(\mu)}{\lambda-\mu}, \quad \lambda \in \sigma, \qquad \rho_0(\lambda) = 0, \quad \lambda \notin \sigma \tag{2.1.5}$$

wobei das Verschwinden der Eigenwertdichte außerhalb des endlichen Trägers aus dem asymptotischen Verhalten der Sattelpunktsbedingung für große λ folgt. Für die freie Energie erhalten wir dann

$$F_0 = -\int_a^b d\lambda\, \rho_0(\lambda)V(\lambda) + \int_a^b d\lambda \int_a^b d\mu\, \rho_0(\lambda)\rho_0(\mu) \ln|\lambda-\mu| \tag{2.1.6}$$

und mit Hilfe der integrierten Sattelpunktsbedingung

$$F_0 = -\frac{1}{2}\int_a^b d\lambda\, \rho_0(\lambda)V(\lambda) + \frac{1}{2}V(\lambda_0) - \int_a^b d\lambda\, \rho_0(\lambda)\ln|\lambda_0-\lambda|, \tag{2.1.7}$$

für ein $\lambda_0 \in \sigma$. Um die planare Eigenwertdichte zu bestimmen, kann man nun wie in [4] die erzeugende Funktion für die Momente der Eigenwertdichte betrachten oder aber die Sattelpunktsbedingung (2.1.5) direkt auflösen, nachdem ihre rechte Seite gerade eine Hilberttransformation auf endlichem Träger darstellt.

Die allgemeine Lösung ist damit durch die inverse endliche Hilbert–Transformation [10, 31, 32] gegeben,

$$\rho_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{(b-\lambda)(\lambda-a)}}\left[\gamma - \frac{1}{\pi^2}\fint_a^b \frac{d\mu}{\lambda-\mu}\tfrac{1}{2}V'(\mu)\sqrt{(b-\mu)(\mu-a)}\right], \tag{2.1.8}$$

wobei die Norm der Lösung allein durch γ bestimmt ist und der zweite Term keinen Beitrag liefert

$$\gamma = \frac{1}{\pi}\int_a^b d\lambda\, \rho_0(\lambda), \qquad \int_a^b d\lambda \frac{1}{\sqrt{(b-\lambda)(\lambda-a)}}\fint_a^b \frac{d\mu}{\lambda-\mu} f(\mu) = 0, \tag{2.1.9}$$

da die Hilberttransformierte einer Funktion orthogonal zum Nullmode $1/\sqrt{(b-\lambda)(\lambda-a)}$ der Hilberttransformation ist. (Eine ausführliche Betrachtung der endlichen Hilberttransformation findet sich in Anhang A.)

Für ein generisches polynomiales Potential und vorgegebenen Träger besitzt die Lösung eine Wurzelsingularität an den Endpunkten des Trägers. Da die Eigenwertdichte aber außerhalb des Trägers verschwinden soll, legt die Forderung nach Stetigkeit an den beiden Endpunkte diese fest,

$$\rho_0(a) = 0, \quad \rho_0(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a, b, \tag{2.1.10}$$

mit Ausnahme des komplexen Matrixmodells für $a = 0$, wo die Eigenwertdichte nicht verschwinden muß. Für die Konstante γ ergibt sich mit unserer Normierung der Eigenwertdichte $\gamma = 1/\pi$.

Bei unserer Lösung für die Eigenwertdichte sind wir dabei immer davon ausgegangen, daß wir uns in einer Region der Kopplungskonstanten befinden, in der eine 1–Band Lösung existiert. Für die Behandlung von Mehrbandlösungen siehe z.B. [19, 20].

2. Orthogonale Polynome

Dieses Verfahren [5] beruht darauf, zunächst für endliches N zum Maß $\exp(-NV(\lambda))$ orthogonale Polynome $P_n(\lambda)$ einzuführen,

$$\int d\lambda \exp(-NV(\lambda))P_n(\lambda)P_m(\lambda) = h_n\delta_{nm}, \quad P_n(\lambda) = \lambda^n + \ldots, \tag{2.2.1}$$

mit denen sich die Determinante in (2.6) darstellen läßt als

$$\det|\lambda_i^{j-1}| = \det|P_{j-1}(\lambda_i)|. \tag{2.2.2}$$

Unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaft können wir dann die Zustandssumme allein durch die Norm der orthogonalen Polynome ausdrücken

$$Z_N = c_N \int \prod_i d\lambda_i \det{}^2|P_{j-1}(\lambda_i)| \exp(-N\sum_i V(\lambda_i)) = c_N N! h_0 \ldots h_{N-1} = c_N N! \prod_{n=0}^{N-1} h_n. \tag{2.2.3}$$

Da die orthogonalen Polynome folgende Rekursionsrelation erfüllen[2]

$$\lambda P_n(\lambda) = P_{n+1}(\lambda) + A_N P_n(\lambda) + R_n P_{n-1}(\lambda), \tag{2.2.4}$$

genügen die Normen ebenfalls einer Rekursionsbeziehung

$$h_n = R_n h_{n-1} \tag{2.2.5}$$

[2] Bei der Entwicklung nach den P_n treten auf der rechten Seite keine Polynome vom Grad $m < n-1$ auf, da das Integral $\int d\lambda \exp(-NV)P_n(\lambda P_m)$ aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft offensichtlich verschwindet.

mit deren Hilfe sich die Zustandssumme und damit die freie Energie allein durch die Norm h_0 und die Rekursionskoeffizienten ausdrücken lassen

$$Z_N = c_N N!\, h_0^N \prod_{n=1}^{N-1} R_n^{N-n}, \quad F_N = \frac{1}{N^2}\ln(c_N N!) + \frac{1}{N}\ln h_0 + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(1-\frac{n}{N})\ln R_n. \tag{2.2.6}$$

Außer der Zustandssumme lassen sich auch die Eigenwertdichte und die Korrelatoren mit Hilfe der orthogonalen Polynome ausdrücken [1], wobei die Eigenwertdichte für endliches N definiert ist durch

$$\langle\rho(\lambda)\rangle = \left\langle \frac{1}{N}\sum_i \delta(\lambda-\lambda_i)\right\rangle = -\frac{1}{N^2}\frac{d}{dV(\lambda)}\ln Z. \tag{2.2.7}$$

Definieren wir nun dem in der Zustandssumme auftretenden Integranden entsprechend

$$\sigma_N(\lambda_1\ldots\lambda_N) = \frac{1}{Z}\det{}^2|P_{j-1}(\lambda_i)|\exp(-N\sum_i V(\lambda_i)), \tag{2.2.8}$$

$$\sigma_n(\lambda_1\ldots\lambda_n) = \frac{1}{Z}\int d\lambda_{n+1}\ldots d\lambda_N\, \sigma_N(\lambda_1\ldots\lambda_N), \tag{2.2.9}$$

so erhalten wir für die Korrelatoren des Eigenwertdichteoperators ρ

$$\begin{aligned}\langle\rho(\lambda)\rangle &= \frac{1}{N^1}\Big[N\sigma_1(\lambda)\Big],\\ \langle\rho(\lambda)\rho(\mu)\rangle &= \frac{1}{N^2}\Big[N(N-1)\sigma_2(\lambda,\mu) + N\delta(\lambda-\mu)\sigma_1(\lambda)\Big],\\ \langle\rho(\lambda)\rho(\mu)\rho(\nu)\rangle &= \frac{1}{N^3}\Big[N(N-1)(N-2)\sigma_3(\lambda,\mu,\nu) + N(N-1)\Big[\delta(\lambda-\mu)\sigma_2(\mu,\nu)\\ &\quad +\delta(\lambda-\nu)\sigma_2(\nu,\mu) + \delta(\mu-\nu)\sigma_2(\lambda,\mu)\Big] + N\delta(\lambda-\mu)\delta(\mu-\nu)\sigma_1(\lambda)\Big],\ldots\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Um die σ_n auf einfache Weise durch die orthogonalen Polynome auszudrücken, ist es sinnvoll, zu orthonormalen Polynomen und den ihnen entsprechenden orthonormalen Funktionen bezüglich des normalen Skalarproduktes überzugehen,

$$P_n \to \mathcal{P}_n = h_n^{-1/2}, \quad \psi_n = \mathrm{e}^{-NV/2}\mathcal{P}_n = \mathrm{e}^{-NV/2}h_n^{-1/2}P_n, \quad \int d\lambda\psi_n(\lambda)\psi_m(\lambda) = \delta_{nm}, \tag{2.2.11}$$

wobei die Polynome $\mathcal{P}_n$ bzw. die Funktionen ψ_n nun der Rekursionsrelation

$$\lambda\mathcal{P}_n = R_{n+1}^{1/2}\mathcal{P}_{n+1} + A_n\mathcal{P}_n + R_n^{1/2}\mathcal{P}_{n-1} \tag{2.2.12}$$

genügen. Einsetzen der Funktionen ψ_n in σ_N liefert dann

$$\begin{aligned}\sigma_N(\lambda_1\ldots\lambda_N) &= \frac{1}{Z}\prod_{n=0}^{N-1} h_n \det{}^2|\psi_{j-1}(\lambda_i)| = \frac{1}{N!}\det\left|\sum_{k=1}^{N}\psi_{k-1}(\lambda_i)\psi_{k-1}(\lambda_j)\right|\\ &= \frac{N^N}{N!}\det|\Phi(\lambda_i,\lambda_j)|_{N\times N} \equiv \frac{N^N}{N!}\det\Phi_N(\lambda_1\ldots\lambda_N),\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

mit

$$\Phi(\mu,\nu) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\psi_k(\mu)\psi_k(\nu) = \frac{1}{N}R_N^{1/2}\frac{\psi_N(\mu)\psi_{N-1}(\nu)-\psi_{N-1}(\mu)\psi_N(\nu)}{\mu-\nu}, \tag{2.2.14}$$

wobei die letzte Gleichheit, die Christoffel–Darboux–Formel, sich einfach mit Hilfe der Rekursionsrelationen aus $\mu\phi(\mu,\nu)-\nu\phi(\mu,\nu)$ ergibt. Aufgrund der Orthonormalitätseigenschaften finden wir mit

$$\int d\lambda\,\Phi(\lambda,\lambda) = \int d\lambda\,\det\Phi_1(\lambda) = 1, \quad \int d\lambda\,\Phi(\mu,\lambda)\Phi(\lambda,\nu) = \frac{1}{N}\Phi(\mu,\nu) \tag{2.2.15}$$

eine Rekursionsbeziehung für das Integral über die Φ–Determinante

$$\int d\lambda_n \det\Phi_n(\lambda_1\ldots\lambda_n) = (1-\frac{n-1}{N})\det\Phi_{n-1}(\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}), \tag{2.2.16}$$

mit der wir die σ_n ausdrücken können als

$$\sigma_n(\lambda_1\ldots\lambda_n) = \frac{N^n(N-n)!}{N!}\det\Phi_n(\lambda_1\ldots\lambda_n). \tag{2.2.17}$$

Damit sind sowohl die Eigenwertdichte wie auch die Korrelatoren über die Determinanten von $\Phi(\lambda,\mu)$ durch die ersten N orthogonalen Polynome bestimmt – welche für generisches Potential allerdings nicht analytisch ausgewertet werden können – und wir erhalten

$$\begin{aligned}\langle\rho(\lambda)\rangle &= \det\Phi_1(\lambda),\\ \langle\rho(\lambda)\rho(\mu)\rangle &= \det\Phi_2(\lambda,\mu) + \frac{1}{N}\delta(\lambda-\mu)\det\Phi_1(\lambda),\\ \langle\rho(\lambda)\rho(\mu)\rho(\nu)\rangle &= \det\Phi_3(\lambda,\mu,\nu) + \frac{1}{N}\Big[\delta(\lambda-\mu)\det\Phi_2(\mu,\nu) + \delta(\lambda-\nu)\det\Phi_2(\nu,\mu)\\ &\quad +\delta(\mu-\nu)\det\Phi_2(\lambda,\mu)\Big] + \frac{1}{N^2}\delta(\lambda-\mu)\delta(\mu-\nu)\det\Phi_1(\lambda),\ldots.\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Insbesondere ist die Eigenwertdichte damit durch die Summe über die Quadrate der ersten N orthogonalen Polynome gegeben,

$$\langle\rho(\lambda)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\psi_k(\lambda)\psi_k(\lambda) = \frac{1}{N}R_N^{1/2}\Big[\psi'_N(\lambda)\psi_{N-1}(\lambda) - \psi'_{N-1}(\lambda)\psi_N(\lambda)\Big], \tag{2.2.19}$$

wobei die Nullstellen der orthogonalen Polynome alle innerhalb des Trägers der planaren Eigenwertdichte (für $N \to \infty$) liegen und die Nullstellen von $\mathcal{P}_n$ diejenigen von $\mathcal{P}_{n+1}$ trennen, was eine allgemeine Eigenschaft von orthogonalen Polynomen ist.

Rekursionsgleichungen

Für die Rekursionskoeffizienten R_n und A_n lassen sich nun auch wieder (nichtlineare) Rekursionsgleichungen finden, die im Limes $N \to \infty$ durch eine asymptotische Entwicklung in $1/N$ gelöst werden können. Wir wollen das hermitesche und komplexe Matrixmodell parallel betrachten und folgen der Darstellung in [21].

Dabei ist es hilfreich, zu einer „bra-ket“ Notation [6] mit einer auf eins normierten Basis $|n\rangle$ entsprechend den Polynomen $\mathcal{P}_n = h_n^{-1/2}P_n$ überzugehen, sowie Operatoren S, $S^\dagger$ und $\hat{n}$ mit

$$\hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,, \quad S^\dagger\,|n\rangle = |n+1\rangle\,, \quad S\,|n\rangle = |n-1\rangle\,, \quad S\,|0\rangle = 0, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm} \tag{2.2.20}$$

einzuführen. Aus der Rekursionsrelation (2.2.12) der orthogonalen Polynome erhalten wir dann für den Operator $\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda} = R^{1/2}S^\dagger + A + R^{1/2} = h^{1/2}(S^\dagger + A + SR)h^{-1/2} = h^{-1/2}(S + A + RS^\dagger)h^{1/2} \tag{2.2.21}$$

wobei die Koeffizienten mit Index $\hat{n}$ zu verstehen sind.

Die Rekursionsgleichungen ergeben sich nun mit Hilfe von partieller Integration aus den folgenden Identitäten:

i)

$$\int d\lambda\,\exp(-NV)\mathcal{P}_n\lambda\partial_\lambda\mathcal{P}_n = n \quad\Rightarrow\quad \langle n|\hat{\lambda}V'(\hat{\lambda})|n\rangle = \frac{1}{N}(2n+1) \tag{2.2.22}$$

ii)

$$\begin{gathered}\int d\lambda\,\exp(-NV)\mathcal{P}_n\partial_\lambda\mathcal{P}_n = 0 \quad\Rightarrow\\ \langle n|\hat{\lambda}V'(\hat{\lambda})|n\rangle = \begin{cases}\frac{1}{N}\exp(-NV(0))\,\mathcal{P}_n^2(0)\,, & I = \mathbb{R}^+\\ 0\,, & I = \mathbb{R}\end{cases}\end{gathered} \tag{2.2.23}$$

iii)

$$\begin{gathered}\int d\lambda\,\exp(-NV)\mathcal{P}_{n-1}\partial_\lambda\mathcal{P}_n = nR_n^{-1/2} \quad\Rightarrow\\ \langle n-1|V'(\hat{\lambda})|n\rangle - \tfrac{n}{N}R_n^{-1/2} = \begin{cases}-\frac{1}{N}\exp(-NV(0))\,\mathcal{P}_{n-1}(0)\mathcal{P}_n(0)\,, & I = \mathbb{R}^+\\ 0\,, & I = \mathbb{R}\end{cases}\end{gathered} \tag{2.2.24}$$

Im Fall des komplexen Matrixmodells ($I = \mathbb{R}^+$) treten dabei in ii) und iii) die unbekannten Konstanten $\mathcal{P}_n(0)$ auf; um diese zu eliminieren, kombiniert man die beiden Gleichungen zu

iv)

$$\langle n|V'(\hat{\lambda})|n\rangle\langle n-1|V'(\hat{\lambda})|n-1\rangle = R_n^{-1}\left(R_n^{1/2}\langle n-1|V'(\hat{\lambda})|n\rangle - \frac{n}{N}\right)^2, \quad I = \mathbb{R}^+. \tag{2.2.25}$$

Im Limes $N \to \infty$ konvergieren die Rekursionskoeffizienten R_n, A_n (für die Einbandlösung) gegen stetige Funktionen $r(x)$, $a(x)$ mit $x = n/N$, die auch noch von $\varepsilon = 1/N$ abhängen. In der Kontinuumsnotation $|x\rangle = |n\rangle$, $\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$, $r(x) = R_n$, $a(x) = A_n$ werden nun die beiden Funktionen

$$\Omega(x) = \langle n|V'(\hat{\lambda})|n\rangle = \langle x|V'(S^\dagger + a(\hat{x}) + Sr(\hat{x}))|n\rangle, \tag{2.2.26}$$

$$\tilde{\Omega}(x) = \frac{n}{N} - R_n^{1/2}\langle n-1|V'(\hat{\lambda})|n\rangle = x - \langle x|S^\dagger V'(S^\dagger + a(\hat{x}) + Sr(\hat{x}))|x\rangle \tag{2.2.27}$$

eingeführt, mit deren Hilfe sich die beiden auch als *Prä-Stringgleichungen* bezeichneten Rekursionsgleichungen für r und a kompakt darstellen lassen:

$$\Omega(x) = 0, \quad \tilde{\Omega}(x) = 0, \quad I = \mathbb{R}, \tag{2.2.28}$$

$$\tilde{\Omega}(x) + \tilde{\Omega}(x+\varepsilon) = a(x)\Omega(x), \quad \Omega(x)\Omega(x-\varepsilon)r(x) = \tilde{\Omega}^2(x), \quad I = \mathbb{R}^+. \tag{2.2.29}$$

Das Gleichungssystem für das komplexe Matrixmodell wird dabei offensichtlich auch durch $\Omega = \tilde{\Omega} = 0$ gelöst.

Für das generisches Potential aus (2.1) erhalten wir damit

$$\Omega(x) = g_1 + g_2a(x) + g_3[r(x+\varepsilon) + r(x) + a^2(x)] + \ldots \tag{2.2.30}$$

$$\tilde{\Omega}(x) = x - g_2r(x) - g_3r(x)[a(x) + a(x-\varepsilon)] + \ldots \tag{2.2.31}$$

und die Prä-Stringgleichungen können durch Einsetzen der Potenzreihenentwicklung für die Rekursionsfunktionen

$$r(x) = \sum_{k=0}\varepsilon^k r_k(x), \quad a(x) = \sum_{k=0}\varepsilon^k a_k(x) \tag{2.2.32}$$

und Taylor-Entwicklung nach ε gelöst werden.

Um die freie Energie in (2.2.6) auszuwerten, verwenden wir nun die Euler-Maclaurin Formel

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\tfrac{n}{N}) = \int_0^1 dx\,f(x) + \frac{1}{2N}\Big[f(1) - f(0)\Big] + \sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{N^{2k}(2k)!}B_{2k}\Big[f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)\Big]$$

$$+\frac{1}{N^{2l+1}(2l)!}B_{2l}\sum_{k=0}^{N-1} f^{(2l)}(\tfrac{k}{N}+\tfrac{\theta}{N}), \quad 0<\theta<1, \tag{2.2.33}$$

in der die B_n die Bernoulli Zahlen mit $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30},\ldots$ sind. Wir erhalten hier mit $f(x)=(1-x)\ln r(x)$ für die freie Energie

$$F=\frac{1}{N^2}\ln(c_N N!)+\frac{1}{N}\ln h_0+\int_0^1 dx(1-x)\ln r(x)-\frac{1}{2N}\ln r(0)$$
$$+\sum_{k=1}\frac{1}{N^{2k}(2k)!}B_{2k}\Big[(1-x)\ln r(x)\Big]^{(2k-1)}\Big|_0^1, \tag{2.2.34}$$

wobei für $r(x)$ noch die Potenzreihenentwicklung in $\varepsilon=1/N$ einzusetzen ist. Sie besitzt eine toplogische Entwicklung in $1/N^2$, wenn sie bezüglich der freien Theorie normiert wird, d.h. wenn wir für das komplexe Matrixmodell $F-F[g_k=0,k>1]$ betrachten und für das hermitesche $F-F[g_k=0,k\neq 2]$.

Im Limes $N\to\infty$ erhalten wir dann für die planare freie Energie[3]

$$F_0=\int_0^1 dx(1-x)\ln r_0(x)+\left(\frac{1}{N}\ln h_0\right)\Big|_{N^0} \tag{2.2.35}$$

und folgenden Zusammenhang zwischen den planaren Rekursionsfunktionen r_0, a_0 und der planaren Eigenwertdichte

$$\rho_0(\lambda)=\int_0^1\frac{dx}{\pi}\frac{\Theta(4r_0-(\lambda-a_0)^2)}{\sqrt{4r_0-(\lambda-a_0)^2}}. \tag{2.2.36}$$

Die Herleitung erfolgt analog wie in [5] für das symmetrische hermitesche Matrixmodell durch Betrachtung der Momente

$$\nu_p=\int d\lambda\,\rho_0(\lambda)\lambda^p=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\langle n|\,\hat\lambda^p\,|n\rangle=\int_0^1 dx\,\langle x|\,\hat\lambda^p\,|x\rangle\,|_0. \tag{2.2.37}$$

Im planaren Fall vertauschen $r(\hat x)$ und $a(\hat x)$ mit S und $S^\dagger$, so daß sich mit

$$\langle x|\,(r^{1/2}S^\dagger+a+Sr^{1/2})^p\,|x\rangle=\sum_{l=0}^{p}\binom{p}{l}r^{1/2\,l}(x)a^{p-l}(x)\,\langle x|\,(S+S^\dagger)^p\,|x\rangle \tag{2.2.38}$$

und

$$\langle x|\,(S^\dagger+S)^p\,|x\rangle=\oint\frac{dz}{2\pi i}\frac{(z+1/z)^p}{z}=\begin{cases}\frac{(2k)!}{k!k!} & ,l=2k\\ 0 & ,l=2k+1\end{cases}, \quad \frac{(2k)!}{k!k!}=\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\pi}\frac{(2y)^{2k}}{\sqrt{1-y^2}} \tag{2.2.39}$$

die Momente darstellen lassen als

$$\nu_p=\int_0^1 dx\sum_{k=0}^{[p/2]}\binom{p}{2k}r^k a^{p-2k}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\pi}\frac{(2y)^{2k}}{\sqrt{1-y^2}}=\int_0^1 dx\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\pi}\frac{(2yr^{1/2}+a)^p}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{2.2.40}$$

Damit können wir für die planare Eigenwertdichte

$$\rho_0(\lambda)=\int_0^1 dx\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\pi}\frac{\delta(\lambda-2yr^{1/2}-a)}{\sqrt{1-y^2}} \tag{2.2.41}$$

ablesen, woraus nach Integration über die δ-Funktion obige Relation folgt.

Multikritisches Verhalten

Für den Fall des symmetrischen HMM vereinfacht sich die Betrachtung deutlich, da die orthogonalen Polynome in diesem Fall eine definite Parität haben, $P_n(-\lambda)=(-)^n P_n(\lambda)$, und alle A_n verschwinden. Die Prä–Stringgleichung $\Omega=0$ ist damit identisch erfüllt und für $\tilde\Omega=0$ ergibt sich im planaren Limes

$$\tilde\Omega_0(x)=x-\sum_{k=1}g_{2k}\langle x|S^\dagger(S^\dagger+Sr(\hat x))^{2k-1}|x\rangle_0=x-\sum_{k=1}g_{2k}\tfrac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}r_0^k(x)=0, \tag{2.2.42}$$

was wir darstellen können als

$$x=W(r_0(x)) \quad \text{mit} \quad W(r_0)=\sum_{k=1}g_{2k}\tfrac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}r_0^k. \tag{2.2.43}$$

Da hermitesche Matrixmodelle mit nichtsymmetrischem Potential kein zusätzliches kritisches Verhalten zeigen, beschränken wir uns hier bei der Betrachtung der kritischen Punkte auf ein symmetrisches. Das in Kapitel I erwähnte erste kritische Verhalten des Matrixmodells zeigt sich dabei auf der Ebene der orthogonalen Polynome für

$$\frac{\partial W}{\partial r}\Big|_{r_c}=0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\Big|_{r_c}\neq 0 \tag{2.2.44}$$

an der Stelle $r_c=r_0(1)$. Entwickeln wir $W(r_0(x))$ zunächst um ein $r_c\neq r_0(1)$ und parametrisieren die Abweichung von $W(r_c)$ vom kritischen Wert $W(r_0(1))=1$ durch $W(r_c)=g$, so erhalten wir mit

$$x=W(r_c)+\frac{1}{2}W''(r_c)(r_0(x)-r_c)^2+\ldots \quad\Rightarrow\quad r_0(x)-r_c\sim(g-x)^{1/2} \tag{2.2.45}$$

[3] Wir vernachlässigen wieder die nicht von den Kopplungskonstanten abhängigen Beiträge.

für das kritische Verhalten der freien Energie für $g \to 1$

$$F_0 = \int_0^1 dx(1-x)\ln r_0(x) \sim \int_0^1 dx(1-x)(g-x)^{1/2} \sim (g-1)^{2+1/2} \tag{2.2.46}$$

und können den kritischen Exponenten $\gamma_s = -1/2$ für reine Gravitation ablesen.

Höheres k–kritisches Verhalten ergibt sich dann mit den zusätzlichen Bedingungen

$$\left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r_c} = \ldots = \left.\frac{\partial^{k-1} W}{\partial r^{k-1}}\right|_{r_c} = 0, \quad \left.\frac{\partial^k W}{\partial r^k}\right|_{r_c} \neq 0 \tag{2.2.47}$$

an die Kopplungskonstanten und wir erhalten analog zur vorangegangenen Betrachtung

$$F_0 \sim (g-1)^{2+1/k} \tag{2.2.48}$$

und damit als kritischen Exponenten $\gamma_s = -1/k$.

Im Doppelskalenlimes zeigen auch die Rekursionsfunktionen ein Skalenverhalten und wir können aus den Rekursionsgleichungen nichtlineare Differentialgleichungen für die entsprechenden Skalenfunktionen ableiten, wie wir in Kapitel V für ein bestimmtes kritisches Verhalten des komplexen Matrixmodells detailliert beschreiben werden. Die asymptotische Entwicklung der zu $r(x)$ korrespondierenden Skalenfunktion entspricht dann der topologischen Entwicklung der freien Energie im Doppelskalenlimes.

Kapitel III:

Kollektive Feldtheorie

Nachdem die Einführung der Eigenwertdichte in der Sattelpunktsmethode relativ einfach zu dem planaren Ergebnis führte, stellte sich die Frage, inwieweit es möglich ist, durch Einführung kollektiver Koordinaten auch über diese nullte Ordnung in der topologischen Entwicklung hinauszugehen.

Bei dem Verfahren von Lechtenfeld in [10], welches wir hier darstellen und weiter untersuchen wollen, wird dabei eine Variablentransformation von den endlichen Eigenwerten zu einer kontinuierlichen Eigenwertdichte durchgeführt, wobei die Jacobideterminante dieser Transformation mit Hilfe der Einführung eines weiteren Feldes [11] exakt berücksichtigt werden kann und sich das Eigenwertmodell so als eindimensionale Feldtheorie mit skalaren Feldern formulieren läßt.

Als zweidimensionale Feldtheorie wird das Eigenwertmodell in einer von Ben–Menahem [12] vorgeschlagenen kollektiven Feldtheorie reformuliert, wobei die logarithmische Abstoßung der Eigenwerte durch ein masseloses zweidimensionales Feld vermittelt wird. Es ergibt sich dabei die gleiche klassische Sattelpunktskonfiguration für die Eigenwertdichte wie in dem hier betrachteten Verfahren.

1. Effektive Wirkung und Sattelpunktskonfiguration

Um das nulldimensionale hermitesche Matrixmodell mit Hilfe der kollektiven Feldtheorie zu beschreiben, gehen wir aus von der Zustandssumme in der Eigenwertformulierung (2.5),

$$Z_N = \int_I \prod_{i=1}^{N} dq_i \, \exp\Big[-S_N^0\Big] \quad \text{mit} \quad S_N^0 = N\sum_i V(q_i) - \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}{}' \ln(q_i - q_j)^2. \tag{3.1.1}$$

Wir betrachten nun den Wechsel von den ursprünglichen Variablen, den N Eigenwerten q_i, zu neuen, kollektiven Variablen, die durch die Eigenwertdichte

$$\rho(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-q_i), \qquad \int dx \rho(x) = 1 \tag{3.1.2}$$

beschrieben werden und invariant unter Permutationen der Eigenwerte sind.

Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist N, während die Eigenwertdichte einen kontinuierlichen Parameter x besitzt. Dies bedeutet, daß nicht alle $\rho(x)$ unabhängig voneinander sind, wie man auch an der Normierungsbedingung für $\rho(x)$ sehen kann. Einen Satz unabhängiger Variablen können wir z.B. erhalten, wenn wir das Eigenwertmodell auf ein endliches Intervall $[-L, L]$ beschränken und gleichzeitig einen Moden–cutoff für die Fourierkomponenten einführen:

$$\rho_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, \rho(x)\, \mathrm{e}^{-in\pi x/L} = \frac{1}{2LN}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-in\pi q_i/L}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad \text{mit} \quad |n| \le \frac{N}{2}. \tag{3.1.3}$$

Dies bedeutet eine Regularisierung der Theorie mit einem IR cutoff L sowie einem UV Impuls–cutoff $M = N\pi\,/\,2L$; wir werden später genauer auf die Bedeutung dieser Regularisierung eingehen.

Der Variablenwechsel ergibt sich mit Hilfe des Funktionalintegrals

$$\int \prod_x d\rho(x)\delta(\rho(x) - a(x))F[\rho] = F[a], \quad \int \prod_x d\rho(x)\delta(\rho(x) - a(x)) = 1, \tag{3.1.4}$$

durch Einsetzen von

$$1 = \int \prod_x d\rho(x)\delta\Big(\rho(x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-q_i)\Big) \tag{3.1.5}$$

in die Zustandssumme (3.1.1) und wir erhalten

$$Z_N = \int \prod_x d\rho(x) \mathrm{e}^{-S_N^0[\rho]} J[\rho]. \tag{3.1.6}$$

Dabei wurde in der klassischen Wirkung

$$S_N^0[\rho] = N^2 \int dx \rho(x) V(x) - \tfrac{1}{2}N^2 \int\!\!\int dx dy \rho(x) f(x-y) \rho(y) + \tfrac{1}{2}N f(0) \tag{3.1.7}$$

die logarithmische Coulomb-Abstoßung der Eigenwerte durch $f(x-y) = \ln(x-y)^2$ bezeichnet[1]. In der Jacobideterminante der Transformation,

$$J[\rho] = \int \prod_i dq_i \prod_x \delta\Big(\rho(x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta(x-q_i)\Big), \tag{3.1.8}$$

können wir das Produkt der δ–Funktionen durch ein weiteres Funktionalintegral darstellen,

$$\begin{aligned} J[\rho] &= \int \prod_i dq_i \prod_x \Big(\int d\lambda(x) \exp\Big[i\lambda(x)\Big(\rho(x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-q_i)\Big)\Big]\Big) \\ &= \int \mathcal{D}\lambda\, \mathrm{e}^{i\int\lambda\rho} \int \prod_i dq_i\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{N}\sum_i \lambda(q_i)}, \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

wobei wir das konjugierte skalare Feld λ eingeführt haben und erhalten nach Integration über die ursprünglichen Variablen q_i

$$J[\rho] = \int \mathcal{D}\lambda\, \mathrm{e}^{i\int\lambda\rho}\Big[\int dx\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{N}\lambda(x)}\Big]^N = \int \mathcal{D}\lambda\, \mathrm{e}^{i\int dx \lambda(x)\rho(x) + N\ln\int dx\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{N}\lambda(x)}}. \tag{3.1.10}$$

Damit läßt sich die Zustandssumme darstellen als Pfadintegral über die beiden Felder ρ und λ

$$Z_N = \int\!\!\int \mathcal{D}\rho\mathcal{D}\lambda\, \mathrm{e}^{-S_N^0[\rho,\lambda] - S_N^J[\rho,\lambda]} = \int\!\!\int \mathcal{D}\rho\mathcal{D}\lambda\, \mathrm{e}^{-S_N[\rho,\lambda]} \tag{3.1.11}$$

mit der effektiven Wirkung

$$\begin{aligned} S_N[\rho,\lambda] = {} & N^2\int dx \rho(x)V(x) - \tfrac{1}{2}N^2 \int\!\!\int dx dy \rho(x) f(x-y)\rho(y) + \tfrac{1}{2}N f(0) \\ & -i\int dx \lambda(x)\rho(x) - N\ln\int dx\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{N}\lambda(x)}, \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

welche nicht–lokal in ρ und nicht–polynomial in λ ist.

Die konstante Mode λ_0 von λ,

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x), \qquad \int dx \lambda(x) = \lambda_0, \qquad \int dx \lambda_1(x) = 0, \tag{3.1.13}$$

läßt sich dabei in der Jacobideterminante ausintegrieren und liefert die Normierungsbedingung für die Eigenwertdichte

$$J[\rho] = \int \mathcal{D}\lambda_1\, \mathrm{e}^{-S_N^J[\rho,\lambda_1]}\, \delta(\textstyle\int\rho - 1). \tag{3.1.14}$$

[1]Der Term $f(0)$ ist dabei offensichtlich divergent, hängt allerdings nicht von der Eigenwertdichte und damit den Kopplungskonstanten ab.

Um die Zustandssumme mit Hilfe der semiklassischen Entwicklung zu berechnen, müssen wir zunächst einmal die Sattelpunktskonfiguration $\hat\rho$ und $\hat\lambda$ durch Variation der effektiven Wirkung S_N aus (3.1.12) bestimmen:

$$\frac{\delta}{\delta\rho} S_N|_{\hat\rho,\hat\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad N^2 V(x) - N^2 \int dy\, f(x-y)\hat\rho(y) - i\hat\lambda(x) = 0, \tag{3.1.15}$$

$$\frac{\delta}{\delta\lambda} S_N|_{\hat\rho,\hat\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat\rho(x) - \mathrm{e}^{-\frac{i}{N}\hat\lambda(x)} \Big/ \textstyle\int dy\, e^{-\frac{i}{N}\hat\lambda(y)} = 0. \tag{3.1.16}$$

Dabei folgt aus der zweiten Gleichung, daß $\hat\rho$ auf eins normiert ist und $\hat\lambda$ rein imaginär sein muß, damit die Eigenwertdichte $\hat\rho$ reell ist[2]. Lösen wir sie nach $\hat\lambda(x)$ auf,

$$\hat\lambda(x) = iN\ln\hat\rho(x) + iN\ln\textstyle\int dy\, e^{-\frac{i}{N}\hat\lambda(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \hat\lambda(x) = iN\ln\hat\rho(x) + \hat\lambda_c, \quad \textstyle\int dx\, \hat\rho(x) = 1 \tag{3.1.17}$$

und setzen sie in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$N^2 V(x) - N^2 \int dy\, f(x-y)\hat\rho(y) + N\ln\hat\rho(x) - i\hat\lambda_c = 0, \tag{3.1.18}$$

woraus sich durch Ableiten nach x und Einsetzen von $f(x-y) = \ln(x-y)^2$ eine Gleichung für $\hat\rho(x)$ allein ergibt, die wir im folgenden Abschnitt genauer untersuchen wollen.

Für die klassische Wirkung der Sattelpunktskonfiguration $(\hat\rho, \hat\lambda)$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} S_N^{cl}[\hat\rho,\hat\lambda] = N^2 & \int dx \hat\rho(x) V(x) - \tfrac{1}{2}N^2 \int\!\!\int dx dy \hat\rho(x) f(x-y)\hat\rho(y) + \tfrac{1}{2}N f(0) \\ & + N\int dx \hat\rho(x)\ln\hat\rho(x). \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Die Sattelpunktsgleichung für endliches N

Wir erhalten als Bestimmungsgleichung für $\hat\rho(x)$ die folgende nichtlineare Integrodifferentialgleichung,

$$\frac{1}{2}V'(x) + \frac{1}{2N}\frac{\hat\rho'(x)}{\hat\rho(x)} = ⨍ \frac{dy}{x-y}\hat\rho(y) = \pi\mathcal{H}_x[\hat\rho(y)], \tag{3.1.20}$$

[2]Bei der Formulierung dieser Feldtheorie waren wir von reellen Feldern ρ und λ ausgegangen; die Tatsache, daß die Sattelpunktskonfiguration $\hat\lambda$ rein imaginär ist, stellt aber kein Problem dar, solange die Fluktuationen im Pfadintegral um $\hat\lambda$ reell sind und die semiklassische Entwicklung der Zustandssumme reell bleibt.

wobei $\mathcal{H}_x[\hat\rho]$ die Hilberttransformation von $\hat\rho$ bezeichnet (deren Eigenschaften wir in Anhang A zusammengefaßt haben). Dazu kommt als Nebenbedingung die Normierung von $\hat\rho(x)$,

$$\int dx\, \hat\rho(x) = 1. \tag{3.1.21}$$

Bevor wir den allgemeinen Fall dieser Gleichung diskutieren, wollen wir uns zwei Spezialfälle ansehen, für die wir explizit Lösungen angeben können.

Im Limes $N = \infty$ erhalten wir die Gleichung des vorherigen Kapitels, und können damit die eindeutige, auf eins normierte planare Eigenwertdichte angeben, welche dann auf einen endlichen Träger beschränkt ist (sofern das Potential eine solche Einbandlösung erlaubt).

Der andere Grenzfall ist der des verschwindenden Potentials. Auch wenn dieser für das Matrixmodell keinen sinnvollen Grenzfall darstellt, ist er instruktiv in Hinblick auf die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Gleichung, die in diesem Fall durch

$$\frac{1}{2N}\frac{\hat\rho'(x)}{\hat\rho(x)} = -\!\!\!\!\!\!\int \frac{dy}{x-y}\hat\rho(y) \tag{3.1.22}$$

gegeben ist. Sie ist invariant unter den folgenden Transformationen

$$\hat\rho(x) \to \hat\rho(x+c), \quad \hat\rho(x) \to \gamma\hat\rho(\gamma x), \quad \gamma > 0, \tag{3.1.23}$$

welche auch die Norm von $\hat\rho$ invariant lassen; damit existiert zu einer Lösung fester Norm gleich eine zweiparametrige Schar von Lösungen dieser Norm. Für $\int dx\, \hat\rho(x) = -1/N$ können wir diese Schar explizit angeben (wie man mit Hilfe von Anhang A leicht verifiziert),

$$\hat\rho(x) = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2\pi^2N^2(x+\beta)^2}, \quad \alpha > 0. \tag{3.1.24}$$

Und wie wir gleich sehen werden, sind dies auch die *einzigen* Lösungen unserer nichtlinearen Hilberttransformation; eine andere Norm der Lösung als Nebenbedingung kann nicht erfüllt werden. Für ein nichtverschwindendes polynomiales Potential ist die Gleichung dagegen weder translations– noch skaleninvariant, so daß wir keine derartige Entartung erwarten.

Nachdem wir die beiden Grenzfälle betrachtet haben, kommen wir nun zurück zur allgemeinen Gleichung. Im Gegensatz zum planaren Fall ist der Träger der Eigenwertdichte $\hat\rho$ für jedes endliche N durch ganz $\mathbb{R}$ gegeben und wir können das asymptotische Verhalten für $x \to \infty$ erhalten, indem wir (3.1.20) integrieren und die Normierung von $\hat\rho$ verwenden,

$$\hat\rho(x) \sim \exp\Big(-N\big[\,V(x) - \textstyle\int dy\, \ln(x-y)^2\hat\rho(y)\,\big]\Big) \quad \to \quad x^{2N}\mathrm{e}^{-NV(x)} \quad \text{für} \quad x \to \infty. \tag{3.1.25}$$

Wir sehen dabei auch, wie im allgemeinen Fall mit $\hat\rho(x) \to x^{2N\int\hat\rho}\mathrm{e}^{-NV(x)}$ für $x \to \infty$ das asymptotische Verhalten einer Lösung durch deren Norm bestimmt ist.

Nach Ben-Menahem [12] läßt sich aus der Integrodifferentialgleichung auch eine nichtlineare Schrödingergleichung für die „inverse Wellenfunktion" $\hat\rho^{-1/2}$ ableiten,

$$\Big(-\frac{1}{N^2}\partial_x^2 + V_1(x) + \pi^2\hat\rho^2(x)\Big)\frac{1}{\sqrt{\hat\rho(x)}} = 0, \tag{3.1.26}$$

mit dem Schrödinger–Potential

$$V_1(x) = \frac{1}{4}V'^2(x) + \frac{1}{2N}V''(x) + V_2(x), \quad V_2(x) = --\!\!\!\!\!\!\int \frac{dy}{x-y}\hat\rho(y)(V'(x) - V'(y)). \tag{3.1.27}$$

Dabei ist

$$V_2(x) = -\sum_{n=1} g_n \sum_{k=0}^{n-2} x^k m_{n-2-k} = -\sum_{n=1} g_n \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-2-k} m_k \quad \text{mit} \quad m_k = \int dy\, \hat\rho(y) y^k \tag{3.1.28}$$

für ein Potential vom Grad n ein Polynom vom Grad $n-2$, welches von den $n-1$ ersten Momenten der Eigenwertdichte $\hat\rho(x)$ abhängt, von denen $n-2$ unbekannt sind ($m_0 \stackrel{!}{=} 1$) und selbstkonsistent bestimmt werden müssen.

Diese Schrödingergleichung ergibt sich, wenn wir zunächst (3.1.20) noch einmal ableiten und für $\hat\rho'(x)$ auf der rechten Seite $\hat\rho'(x) = 2N\hat\rho(x)(-\!\!\!\!\!\int \frac{dy}{x-y}\hat\rho(y) - \frac{1}{2}V'(x))$ einsetzen. Verwenden wir dann die Identität $2\mathcal{H}[\hat\rho\mathcal{H}[\hat\rho]] = \mathcal{H}^2[\hat\rho] - \hat\rho^2$ (cf. (A.6)), wobei wir für $\mathcal{H}[\hat\rho]$ wieder die linke Seite von (3.1.20) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{1}{N^2}\Big(\frac{1}{2}\frac{\hat\rho''}{\hat\rho} - \frac{3}{4}\frac{\hat\rho'^2}{\hat\rho^2}\Big) + V_1 + \pi^2\hat\rho^2 = 0.$$

Für verschwindendes Potential $V(x)$ verschwindet auch $V_1(x)$ und wir finden als einzige Lösungen der Differentialgleichung

$$\hat\rho(x) = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2\pi^2N^2(x+\beta)^2}, \quad \alpha \quad \text{beliebig.}$$

Die nichtlineare Schrödingergleichung besitzt damit mehr Lösungen als die Integrodifferentialgleichung, welche für verschwindendes Potential nur Lösungen negativer Norm erlaubt.

Wir haben damit eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit $n-2$ Unbekannten ($m_1 \ldots m_{n-2}$) und 2 kontinuierlichen freien Anfangsbedingungen sowie $n-1$ Selbstkonsistenzbedingungen an die Momente $m_0 \ldots m_{n-2}$, so daß ein kontinuierlicher Parameter der Lösung unbestimmt bleibt.

Wir sind damit nicht in der Lage, die Existenz und Eindeutigkeit einer auf eins normierten Lösung zu beweisen, da es zum einen keine weitere Bedingung gibt, die den freien

Parameter festlegen würde und es zudem nicht klar ist, daß die Konsistenzbedingungen auch erfüllt werden können[3]. Allerdings sehen wir in der Ableitung der Schrödingergleichung und am Beispiel des verschwindenden Potentials, daß nicht alle Lösungen der Schrödingergleichung auch Lösungen der Integrodifferentialgleichung (3.1.20) sind.

Wir erwarten aber dennoch eine eindeutige Lösung für unsere Sattelpunktskonfiguration $\hat{\rho}$, die für $N \to \infty$ gegen die planare Lösung geht, da wir prinzipiell mit Hilfe der orthogonalen Polynome die exakte Lösung

$$\langle \rho(x) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{P}_n(x) \mathcal{P}_n(x) \mathrm{e}^{-NV(x)}$$

für endliches N konstruieren können und diese durch die Sattelpunktskonfiguration approximiert werden sollte. Dieses Verhalten verifiziert man auch beim Vergleich einer numerischen Lösung der Schrödingergleichung mit der exakten (im Gaußschen Fall), wobei die numerische Lösung mit wachsendem N wegen der Fluktuationen der exakten Lösung erwartungsgemäß schwieriger wird.

Eine ähnliche Sattelpunktgsgleichung ergibt sich bei der Anwendung der Kollektiven Feldtheorie auf das Calogero–Model [22], welches durch folgende N–Teilchen Hamiltonfunktion definiert wird:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{g}{2} {\sum_{i,j}^{N}}' \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \frac{\omega^2}{8} {\sum_{i,j}^{N}}' (x_i - x_j)^2. \tag{3.1.29}$$

Aufgrund der Singularität von H für $x_i = x_j$ sollte die N–Teilchen Wellenfunktion Ψ einen für identische Argumente verschwindenden Vorfaktor haben; wir erhalten mit

$$\Psi(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{i<j}^{N} (x_i - x_j)^{\lambda} \Phi(x_1, \ldots, x_N) = \Delta[x]^{\lambda} \Phi(x_1, \ldots, x_N) \tag{3.1.30}$$

und $g = \lambda(\lambda - 1)$ für die auf Φ wirkende Hamiltonfunktion

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{2\lambda}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta^{2\lambda} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\omega^2}{8} {\sum_{i,j}}' \frac{1}{(x_i - x_j)}. \tag{3.1.31}$$

Dabei ist die dimensionslose Konstante λ der statistische Parameter des Calogero–Modells, welches für $\lambda = 0, 1$ Bosonen bzw. Fermionen und für andere Werte von λ intermediäre Statistik beschreibt. Wenden wir für diesen Hamiltonian nun die Kollektive Feldtheorie [23] an, so wird die total symmetrische Wellenfunktion Φ ein Funktional der Dichte ρ,

$$\Phi(x_1, \ldots, x_N) = \Phi[\rho], \quad \rho = \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i), \quad \int dx \, \rho(x) = N, \tag{3.1.32}$$

und wir erhalten mit dem zu ρ konjugierten Impuls Π und $[\partial_x \Pi(x), \Phi(y)] = -i \partial_x \delta(x - y)$ als kollektiven Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int dx \, \rho(x) (\partial_x \Pi(x))^2 + \frac{1}{2} \int dx \, \rho(x) \left[\frac{\lambda - 1}{2} \frac{\partial_x \rho(x)}{\rho(x)} + \lambda ⨍ \frac{dy}{x - y} \rho(y) \right]^2$$
$$+ \frac{\omega^2}{8} \iint dx \, dy \, \rho(x) (x - y)^2 \rho(y) - \frac{\lambda - 1}{4} \int dx \, \partial_x^2 \delta(x - y)|_{y=x} - \frac{\lambda}{2} \int dx \, \rho(x) \partial_x \frac{P}{x - y} \Big|_{y=x} \tag{3.1.33}$$

Dabei ist der kinematische Anteil des kollektiven Calogero–Hamiltonians der gleiche wie für den Singletsektor der eindimensionalen Matrixmodelle [22], mit $\lambda = 1/2, 1, 2$ für die $O(N), U(N)$ bzw. $Sp(N)$ invarianten Matrixmodelle. Für $\lambda = 0$ erhalten wir offensichtlich die kollektive Feldtheorie von N Bosonen.

Betrachten wir nun eine $1/N$ Entwicklung des kollektiven Feldes ρ um den semiklassischen Grundzustand ρ_0,

$$\rho(x) = \rho_0(x) + \eta(x) \tag{3.1.34}$$

so ergibt sich für einen symmetrischen Grundzustand eine Bogomol'nyi–Schranke des Potentials, die für

$$\frac{\lambda - 1}{2} \frac{\partial_x \rho_0(x)}{\rho_0(x)} + \lambda ⨍ \frac{dy}{x - y} \rho_0(y) = \omega \sqrt{\frac{N}{2}} x \tag{3.1.35}$$

erreicht wird und als Grundzustandsenergie $E_0 = \frac{1}{2} \omega \sqrt{N/2} \, [\lambda N(N-1) + N]$ liefert.

Für den bosonischen ($\lambda = 0$) und fermionischen ($\lambda = 1$) Fall wird die Sattelpunktsgleichung trivial und man erhält als auf N normierte Dichten

$$\rho_0(x) \Big|_{\lambda=0} = N \sqrt{\frac{\omega}{\pi} \sqrt{N/2}} \, \exp\left(-\omega \sqrt{N/2} \, x^2 \right), \quad \rho_0(x) \Big|_{\lambda=1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\omega \sqrt{N/2} \left(2N - \omega \sqrt{N/2} \, x^2 \right)}, \tag{3.1.36}$$

während für intermediäre Statistik keine expliziten Lösungen bekannt sind. Im Limes verschwindenden Potentials ($\omega \to 0$) gehen die beiden Lösungen gegen Null und für $\omega = 0$ ist jede konstante Dichte eine *nicht* normierbare Lösung der Bogomol'nyi Gleichung. Die einzig nicht–triviale Lösung ist in diesem Fall durch die Schar

$$\rho_0(x) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \tag{3.1.37}$$

gegeben, die allerdings nur für $(\lambda - 1)/\lambda = N$ auf N normiert ist.

---

2. Quantenfluktuationen und Loop–Entwicklung

Nach der Diskussion der Sattelpunktskonfiguration kommen wir nun zu der Loop–Entwicklung unserer durch (3.1.11) und (3.1.12) definierten kollektiven Feldtheorie. Wir spalten die Felder ρ und λ auf in ihre klassischen Anteile und die Quantenfluktuationen,

$$\rho(x) = \hat{\rho}(x) + \rho'(x), \quad \lambda(x) = \hat{\lambda}(x) + \lambda'(x), \quad \int dx \, \rho'(x) = 0 = \int dx \, \lambda'(x), \tag{3.2.1}$$

[3] Ben–Menahem behauptet, daß der freie Parameter nur diskrete Werte annehmen kann, da die Gleichung (3.1.20) keine normerhaltenden Nullmoden habe, wobei seine Argumentation unabhängig vom Potential und der Norm der Lösung ist. Wir halten diese für nicht stichhaltig, da sich zumindest für verschwindendes Potential mit der oben angegebenen Lösung sofort die normerhaltende Nullmode angeben läßt.

wobei das Integral über die Fluktuationen verschwindet. Um dann die effektive Wirkung in den klassischen, quadratischen und Wechselwirkungsanteil zu zerlegen,

$$S_N = S_N^{(cl)} + S_N^{(2)} + S_N^{(I)}, \tag{3.2.2}$$

entwickeln wir zunächst den nicht polynomialen Anteil in λ nach λ',

$$\begin{aligned}\Delta S = -N \ln \int dx\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{N}\lambda(x)} &= i\hat\lambda_c + N \sum_{r=1} \frac{(-)^r}{r} \Big[\sum_{k=1} \frac{1}{k!} \int dx\, \hat\rho(x) \Big(-\frac{i}{N}\lambda'(x)\Big)^k \Big]^r \\ &= i\hat\lambda_c + i \int dx \hat\rho(x)\lambda'(x) + \frac{1}{2N} \int\!\!\int dx\, dy\, \lambda'(x) \Big[\hat\rho(x)\delta(x-y) - \hat\rho(x)\hat\rho(y)\Big] \lambda'(y) + S_N^{(I)}.\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Der Wechselwirkungsanteil $S_N^{(I)}$ der Wirkung hängt damit nur von λ' (und der klassischen Eigenwertdichte $\hat\rho$) ab und besitzt eine $1/N$–Entwicklung,

$$S_N^{(I)} = N \sum_{k=3} N^{-k} S_k, \tag{3.2.4}$$

wobei S_k die Vertizes der Ordnung λ'^k beschreibt,

$$S_3 = \frac{(-i)^3}{3!} \Big[-\textstyle\int\hat\rho\lambda'^3 + 3\int\hat\rho\lambda'^2 \int\hat\rho\lambda' - 2(\int\hat\rho\lambda')^3 \Big], \tag{3.2.5}$$

$$S_4 = \frac{(-i)^4}{4!} \Big[-\textstyle\int\hat\rho\lambda'^4 + 4\int\hat\rho\lambda'^3\int\hat\rho\lambda' + 3(\int\hat\rho\lambda'^2)^2 - 12\int\hat\rho\lambda'^2(\int\hat\rho\lambda')^2 + 6(\int\hat\rho\lambda')^4 \Big], \dots. \tag{3.2.6}$$

Aufgrund der Nichtlokalität unserer Theorie setzt sich ein Vertex S_k aus Beiträgen mit bis zu k (nicht zusammenhängenden) Knoten (d.h. Integrationen $\int\hat\rho\dots$) zusammmen, als deren Wertigkeit wir die jeweilige Potenz von λ' bezeichnen; die entprechende graphische Darstellung ist offensichtlich und findet sich in [10].

Für den quadratischen Anteil der Wirkung erhalten wir mit (3.1.12) und (3.2.3)

$$S_N^{(2)} = \frac{1}{2} \int\!\!\int dx\, dy \begin{pmatrix} \rho'(x) \\ \lambda'(x) \end{pmatrix} S_N''(x,y) \begin{pmatrix} \rho'(y) \\ \lambda'(y) \end{pmatrix}, \tag{3.2.7}$$

wobei der Integralkern S_N'' durch

$$S_N''(x,y) = \begin{pmatrix} -N^2 f(x-y) & -i\delta(x-y) \\ -i\delta(x-y) & \frac{1}{N}[\hat\rho(x)\delta(x-y) - \hat\rho(x)\hat\rho(y)] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -N^2 f & -i\delta \\ -i\delta & \frac{1}{N} g \end{pmatrix} \tag{3.2.8}$$

gegeben ist mit

$$f(x-y) = \ln(x-y)^2, \quad g(x-y) = \hat\rho(x)\delta(x-y) - \hat\rho(x)\hat\rho(y). \tag{3.2.9}$$

Um die Zustandssumme der kollektiven Feldtheorie nun in der semiklassischen Entwicklung auszuwerten, erhalten wir neben dem klassischen Beitrag nach Integration über den quadratischen Anteil in den Feldern ρ' und λ' den Beitrag der 1–Loop Determinante, während sich die Beiträge der Wechselwirkungsterme mit Hilfe der freien Propagatoren ergeben. Die Zustandssumme läßt sich damit aufspalten in

$$Z_N = Z^{(cl)} Z^{(2)} Z^{(I)} \tag{3.2.10}$$

mit

$$Z^{(cl)} = \mathrm{e}^{-S_N^{(cl)}[\hat\rho,\hat\lambda]}, \quad Z^{(2)} = [\det{}' S_N'']^{-1/2}, \quad Z^{(I)} = \Big\langle \mathrm{e}^{-N \sum_{k=3} N^{-k} S_k} \Big\rangle. \tag{3.2.11}$$

Dabei bezeichnet $\det'$ die Determinante auf dem zur konstanten Mode orthogonalen Komplement K und $\langle\dots\rangle$ den Erwartungswert bezüglich der freien Propagatoren, die sich aus der Invertierung von (3.2.8) ergeben.

Für die Determinante erhalten wir mit

$$\det \begin{pmatrix} A & -i\mathbf{1} \\ -i\mathbf{1} & B \end{pmatrix} = \det(\mathbf{1} + AB) = \det(\mathbf{1} + BA) \tag{3.2.12}$$

und der Tatsache, daß hier $B \sim g$ die Konstante als Nullmode hat,

$$\det{}' \begin{pmatrix} -N^2 f & -i\delta \\ -i\delta & \frac{1}{N} g \end{pmatrix} = \det{}'(\delta - Nfg) = \det(\delta - Nfg), \tag{3.2.13}$$

so daß wir sie formal in einer N–Entwicklung angeben können

$$\det(\delta - Nfg) = \exp\Big[\mathrm{tr}\, \ln(\delta - Nfg)\Big] = \exp\Big[-\mathrm{tr} \sum_{k=1} \tfrac{1}{k}(Nfg)^k\Big] \tag{3.2.14}$$

und damit auch als Beitrag der 1-Loop Determinante zur Zustandssumme

$$Z^{(2)} = \exp\Big[\sum_{k=1} \frac{N^k}{2k} \mathrm{tr}\Big[f(x-y)\hat\rho(y) - \textstyle\int dz\, f(x-z)\hat\rho(z)\hat\rho(y)\Big]^k\Big] \tag{3.2.15}$$

finden. Der in N lineare singuläre Term $\frac{1}{2}Nf(0)$ hebt sich dabei gerade gegen den entsprechenden Term der klassischen Wirkung (3.1.19) weg. Im Gegensatz zu der gerade angegebenen Entwicklung sind wir aber an einer Entwicklung in $1/N$ interessiert; wir werden im folgenden Abschnitt untersuchen, inwieweit diese auf dem orthogonalen Komplement K möglich ist.

Um die Beiträge der Wechselwirkungsterme berechnen zu können, müssen wir nun noch die Propagatoren bestimmen, indem wir den Integralkern S''_N invertieren; dies ist analytisch aber nur durch eine formale Reihenentwicklung entweder in N oder in $1/N$ um $N=\infty$ auf K möglich. Wir erhalten in der symbolischen Notation von (3.2.8)

$$S''_N{}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1/N^2}{\frac{1}{N}g^{-1}-f} & \dfrac{i}{1-Ngf} \\ \dfrac{i}{1-Nfg} & \dfrac{N}{g-\frac{1}{N}f^{-1}} \end{pmatrix}, \tag{3.2.16}$$

wobei die Ausdrücke durch ihre Reihenentwicklung definiert sind, bei denen die Multiplikation der (nicht–kommutativen) Integration entspricht.

Da die Wechselwirkungsterme nur von λ' abhängen, ist für die weitere Berechnung der Zustandssumme nur der $\underbrace{\lambda'(x)\lambda'}(y)$–Propagator relevant, dessen N– bzw. $1/N$–Entwicklung wir daher angeben wollen. Wir finden in der symbolischen Notation

$$\underbrace{\lambda'\lambda'} = \frac{N}{g-\frac{1}{N}f^{-1}} = \begin{cases} Ng^{-1}+g^{-1}f^{-1}g^{-1}+\frac{1}{N}g^{-1}f^{-1}g^{-1}f^{-1}g^{-1}+\dots \\ -N^2f-N^3fgf-N^4fgfgf+\dots \end{cases} \tag{3.2.17}$$

bzw. explizit

$$\underbrace{\lambda'(x)\lambda'}(y) = \begin{cases} Ng^{-1}(x,y)+\int dv\, g^{-1}(x,v)\int dw\, f^{-1}(v,w)g^{-1}(w,y)+\dots \\ -N^2f(x,y)-N^3\int dv\, f(x,v)\int dw\, g(v,w)\, f(w,y)+\dots \end{cases}, \tag{3.2.18}$$

wobei wir im Fall der $1/N$–Entwicklung noch f und g auf K zu invertieren haben, was wir ebenfalls im nächsten Abschnitt tun werden. Wollen wir außer der Zustandssumme noch Erwartungswerte der ρ und λ–Korrelatoren berechnen, benötigen wir dagegen auch die übrigen Propagatoren, die sich anolog aus (3.2.16) ablesen lassen.

Im folgenden wollen wir nun die $1/N$–Entwicklung der freien Energie

$$F_N = -\ln Z_N = S_N^{cl} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}'\ln S''_N - \ln Z^I \tag{3.2.19}$$

bestimmen, wobei die Wechselwirkungsterme in führender Ordnung den Beitrag

$$Z^I = \left\langle \mathrm{e}^{-N\sum\limits_{k=3} N^{-k}S_k} \right\rangle = \mathrm{e}^{-N^{-3}\langle S_4\rangle + \frac{1}{2}N^{-4}\langle S_3S_3\rangle - \dots} \tag{3.2.20}$$

liefern, nachdem die $1/N$– Entwicklung des $\underbrace{\lambda'\lambda'}$–Propagators mit $\mathcal{O}(N)$ startet. Sie stellen die 2–Loop Beiträge dar, wobei die 7 Diagramme in $\langle S_4\rangle$ und 14 in $\langle S_3S_3\rangle$ aufgrund der Nichtlokalität der Vertizes zwischen keinen und bis zu zwei Loops enthalten; für eine graphische Darstellung der Feynman–Diagramme cf. [10]. Dort wurde ebenfalls schon bemerkt, daß sich aufgrund der Forminvarianz von ΔS unter der Addition einer Konstanten zu λ' die Struktur der Vertizes vereinfacht, wenn wir folgende Felddefinition vornehmen

$$\lambda'(x) \to \tilde\lambda(x) = \lambda'(x) - \int dy\, \hat\rho(y)\lambda'(y) \quad \Rightarrow \quad \int dy\, \hat\rho(y)\tilde\lambda(y) = 0, \tag{3.2.21}$$

so daß Beiträge mit einwertigen Knoten verschwinden. Damit erhalten wir für die Vertizes

$$\tilde S_3 = \frac{(-i)^3}{3!}\Big[-\textstyle\int\hat\rho\tilde\lambda^3\Big], \quad \tilde S_4 = \frac{(-i)^4}{4!}\Big[-\textstyle\int\hat\rho\tilde\lambda^4 + 3(\int\hat\rho\tilde\lambda^2)^2\Big], \quad \dots, \tag{3.2.22}$$

und die Anzahl der Feynmandiagramme reduziert sich auf 3 für $\langle S_4\rangle$ und 2 für $\langle S_3S_3\rangle$. Allerdings haben wir dafür einen in Termen des ursprünglichen $\underbrace{\lambda'\lambda'}$–Propagator aufwendigeren Propagator zu verwenden,

$$\begin{aligned} \underbrace{\tilde\lambda(x)\tilde\lambda}(y) \;=\; & \underbrace{\lambda'(x)\lambda'}(y) - \int dv\hat\rho(v)\underbrace{\lambda'(v)\lambda'}(y) - \int dw\underbrace{\lambda'(x)\lambda'}(w)\hat\rho(w) \\ & + \int dy\int dw\hat\rho(v)\underbrace{\lambda'(v)\lambda'}(w)\hat\rho(w). \end{aligned}$$

Wir werden darauf gleich im nächsten Abschnitt zurückkommen.

3. 1/N–Entwicklung der freien Energie

Nachdem wir weder die 1–Loop Determinante noch die Propagatoren für endliches N bestimmen können, wollen wir in diesem Abschnitt deren $1/N$–Entwicklung untersuchen (cf. [10]). Dazu bestimmen wir zunächst in führender Ordnung den $\underbrace{\lambda'\lambda'}$–Propagator durch Invertierung von $g(x,y)$ und berechnen damit den ebenfalls führenden Beitrag der Wechselwirkungsterme zur freien Energie. Anschließend betrachten wir die $1/N$–Entwicklung der 1-Loop Determinante. Wir berücksichtigen hier allerdings noch nicht die N–Abhängigkeit der klassischen Eigenwertdichte $\hat\rho(x)$ bzw. ihrer Inversen $1/\hat\rho(x)$ (welche bei der Invertierung von g auftritt).

Die Invertierung von g

Der Operator $g(x,y) = \hat\rho(x)\delta(x-y) - \hat\rho(x)\hat\rho(y)$ besitzt die Konstante als Nullmode; wir können ihn aber für ein endliches Intervall $[-L,L]$ auf dem dazu orthogonalen Komplement K invertieren. Wir betrachten dazu ein Orthonormalsystem $h_i(x)$ auf $[-L,L]$ mit der konstanten Basisfunktion $h_0(x) = 1/\sqrt{2L}$,

$$\int_{-L}^{L} dx h_i(x)h_j(x) = \delta_{ij}, \quad \sum_i h_i(x)h_i(y) = \delta(x-y) = P(x,y) + \frac{1}{2L}, \tag{3.3.1}$$

wobei P der Projektor auf das orthogonale Komplement ist. Auf ihm gilt mit $\langle 0|\, g = 0$, $g\,|0\rangle = 0$ und $\langle x|\hat\rho\rangle = \hat\rho(x)$ für $\mathcal{O}_1(x,y) = \hat\rho^{-1}(x)\delta(x-y)$,

$$\sum_{j\neq 0}\langle i|\mathcal{O}_1|j\rangle\langle j|g|k\rangle = \sum_j \langle i|\mathcal{O}_1|j\rangle\langle j|g|k\rangle = \langle i|k\rangle - \sqrt{2L}\langle i|0\rangle\langle\hat\rho|k\rangle = \langle i|k\rangle, \text{ für } i,k\neq 0, \tag{3.3.2}$$

so daß die Matrixelemte von $\mathcal{O}_1 g$ auf K die Identität darstellen, auch wenn $\mathcal{O}_1 g$ aus K herausführt,

$$\mathcal{O}_1 g = \sum_i |i\rangle\,\langle i| - \sqrt{2L}\,|0\rangle\,\langle\hat\rho|\,. \tag{3.3.3}$$

Das Inverse von g auf dem gesamten Raum ist aber nicht eindeutig, so daß wir noch Terme dazuaddieren können, die auf dem Unterraum verschwinden; so ergibt sich mit

$$\mathcal{O}_2(x,y) = \frac{1}{\hat\rho(x)}\delta(x-y) - \frac{1}{2L}\frac{1}{\hat\rho(x)} - \frac{1}{2L}\frac{1}{\hat\rho(y)}, \quad \rightarrow \quad \mathcal{O}_2 g = \sum_{i\neq 0}|j\rangle\,\langle j| = P \tag{3.3.4}$$

für $\mathcal{O}_2 g$ gerade der Projektor auf K. Welchen Operator wir nun als Inverses von g verwenden, ist gleich, sofern wir immer Matrixelemente auf dem Unterraum betrachten.

Die Wechselwirkungsbeiträge zur freien Energie

In führender Ordnung ist der $\underbrace{\lambda'\lambda'}$–Propagator durch $\underbrace{\lambda'(x)\lambda'}(y) = N\mathcal{O}_i(x,y)$ gegeben und wir erhalten in beiden Fällen $(i=1,2)$ als Beitrag der Feynmandiagramme

$$N^{-2}4!\langle S_4\rangle = -3\delta^2(0)\int dx\,\frac{1}{\hat\rho(x)} + 12L^2\delta^2(0) + 12L\delta(0) - 6, \tag{3.3.5}$$

$$N^{-3}(3!)^2\langle S_3S_3\rangle = -15\delta^2(0)\int dx\,\frac{1}{\hat\rho(x)} + 36L^2\delta^2(0) + 36L\delta(0) - 12. \tag{3.3.6}$$

Diese sind offensichtlich divergent, wobei die Divergenzen verschiedene Ursachen haben: Die Faktoren $\delta(0)$ ergeben sich aus der Summation über die unendliche Anzahl von Freiheitsgraden in $\mathrm{tr}\,\mathbf{1}$, während die Einschränkung auf ein endliches Intervall $[-L,L]$ und damit die Einführung des cutoff Parameters L die Regularisierung der im Limes $L\to\infty$ divergenten Integrale

$$\int dx\,\frac{1}{\hat\rho(x)} \quad \text{und} \quad \int dx\,1 = 2L$$

erlaubt[4]. Die explizite Abhängigkeit vom cutoff Parameter L fällt allerdings in der Summe der beiden Beiträge heraus und wir erhalten in führender Ordnung

$$-\ln Z^{(I)} = N^{-3}\langle S_4\rangle - \tfrac{1}{2}N^{-4}\langle S_3S_3\rangle = \frac{1}{N}\frac{1}{12}\Big[\,\delta^2(0)\int dx\,\frac{1}{\hat\rho(x)} - 1\,\Big]. \tag{3.3.7}$$

Diese Beiträge ergeben sich natürlich auch mit der im vorigen Unterkapitel beschriebenen Felddefinition von λ' für den modifizierten Propagator

$$\begin{aligned}\underbrace{\tilde\lambda(x)\tilde\lambda}(y) &= \mathcal{O}_i(x,y) - \int dv\hat\rho(v)\mathcal{O}_i(v,y) - \int dw\mathcal{O}_i(x,w)\hat\rho(w) + \int dy\int dw\hat\rho(v)\mathcal{O}_i(v,w)\hat\rho(w)\\ &= N\Big[\,\frac{1}{\hat\rho(x)}\delta(x-y) - 1\,\Big]\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

und den Vertizes (3.2.22).

Die weitere $1/N$–Entwicklung der Wechselwirkungsbeiträge ist prinzipiell klar, wobei wir für die höheren Ordnungen aufgrund der $1/N$–Entwicklung des Propagators (3.2.17) auch $f^{-1}(x,y)$ brauchen, was wir im Zusammenhang mit der 1–Loop Determinante bestimmen werden. Für die Beiträge der nächsten Ordnung zur freien Energie reicht aber der Propagator in führender Ordnung und man findet den ebenfalls divergenten Beitrag [10]

$$\frac{1}{N^2}\frac{1}{12}\Big[\,\delta^3(0)\int dx\,\frac{1}{\hat\rho^2(x)} + \text{endl.}\,\Big]. \tag{3.3.9}$$

Bevor wir aber an eine systematische Entwicklung der Wechselwirkungsbeiträge gehen, sollten wir sicherstellen, daß wir mit dem gesamten Verfahren auch eine sinnvolle $1/N$–Entwicklung der freien Energie erhalten. Dazu müssen wir auch noch die Beiträge der 1–Loop Determinante betrachten, was wir im nächsten Abschnitt tun wollen.

Die Berechnung der 1–Loop Determinante

Für die 1–Loop Determinante

$$Z^{(2)} = \det{}'(\mathbf{1} - Nfg)^{-1/2} \tag{3.3.10}$$

ist zunächst nur die Entwicklung in N offensichtlich; wir brauchen allerdings eine Entwicklung in $1/N$. Da wir die Determinante auf dem zu h_0 orthogonalen Komplement auswerten, können wir (wie oben gesehen) den Operator g invertieren. Ebenso läßt sich f auf dem endlichen Intervall $[-L,L]$ mit $\langle 0|\,f^{-1} = 0 = f^{-1}\,|0\rangle$ invertieren,

$$\langle i|f^{-1}|k\rangle\langle k|f|j\rangle = \langle i|j\rangle, \quad i,j\neq 0, \tag{3.3.11}$$

[4]Letzteres entspricht der Regularisierungskonstante $\eta = \int 1$ aus [10] im Fall des hier endlichen Intervalls $[-L,L]$.

wie wir später explizit zeigen werden. Damit können wir nun den relevanten Operator auf dem Unterraum darstellen als

$$\begin{aligned}\langle i|\,\mathbf{1}-Nfg\,|j\rangle &= \langle i|j\rangle - N\langle i|f|k\rangle\langle k|g|j\rangle \\ &= -N\langle i|f|k\rangle\langle k|g|l\rangle\Big(-\frac{1}{N}\langle l|g^{-1}|m\rangle\langle m|f^{-1}|j\rangle + \langle l|j\rangle\Big)\end{aligned}$$

und die Determinante aufspalten in

$$\det{}'(\mathbf{1}-Nfg) = \det{}'(N\mathbf{1})\det{}'(-f)\det{}'(g)\det{}'(\mathbf{1}-\tfrac{1}{N}g^{-1}f^{-1}). \tag{3.3.12}$$

Die ersten beiden Determinanten sind dabei offensichtlich unabhängig von der Eigenwertdichte $\hat\rho$ und damit den Kopplungskonstanten und von daher nicht weiter interessant, auch wenn wir die erste (divergente) explizit angeben können,

$$\det{}'(N\mathbf{1}) = N^{\sum_i{}'1} = N^{2L\delta(0)}. \tag{3.3.13}$$

Die dritte wird (wie man am leichtesten in der Fourierdarstellung zeigen kann) mit

$$\det{}'\langle i|g|j\rangle = \det{}'\big(\langle i|\hat\rho|j\rangle - \langle i|\hat\rho\rangle\langle\hat\rho|j\rangle\big) = 2L\det\langle i|\hat\rho|j\rangle \tag{3.3.14}$$

diagonal im Ortsraum und ergibt damit den ebenfalls divergenten Beitrag

$$\det{}'\langle i|g|j\rangle = 2L\mathrm{e}^{\delta(0)\int\ln\hat\rho}. \tag{3.3.15}$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\det{}'(\mathbf{1}-Nfg) = N^{2L\delta(0)}\det{}'(-f)2L\mathrm{e}^{\delta(0)\int\ln\hat\rho}\det{}'(\mathbf{1}-\tfrac{1}{N}g^{-1}f^{-1}) \tag{3.3.16}$$

und damit als Beitrag der 1-Loop Determinante zur freien Energie

$$\ln Z^{(2)} = -L\delta(0)\ln N - \frac{1}{2}\ln\det{}'(-f) - \frac{1}{2}\ln 2L - \frac{1}{2}\delta(0)\int\ln\hat\rho + \sum_{k=1}\frac{1}{2kN^k}\mathrm{tr}{}'(g^{-1}f^{-1})^k, \tag{3.3.17}$$

so daß wir nun noch als Terme in der $1/N$–Entwicklung die Spuren über die Potenzen von

$$(g^{-1}f^{-1})(x,y) = \hat\rho^{-1}(x)f^{-1}(x,y) \tag{3.3.18}$$

auswerten müssen. Diese betrachten wir zunächst wie in [10] auf ganz $\mathbb{R}$ und anschließend auf dem endlichen Intervall $[-L,L]$.

Die Spurbeiträge auf unendlichem Intervall

Auf dem unendlichen Intervall läßt sich $f(x,y)=\ln(x-y)^2$ leicht invertieren, da

$$\frac{1}{2\pi}\partial_x f(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{P}{x-y} \tag{3.3.19}$$

die Hilberttransformation darstellt, welche auf ganz $\mathbb{R}$ mit (A.2) einfach durch eine weitere Hilberttransformation invertiert wird und wir damit

$$f^{-1}(x,y) = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{P}{x-y}\partial_y = -\frac{1}{2\pi^2}\partial_x\frac{P}{x-y} \tag{3.3.20}$$

erhalten. Um die Spur über $(\hat\rho^{-1}f^{-1})^k$ auszuwerten, wollen wir erst überprüfen, ob diese aufgrund der Nichtvertauschbarkeit der Hauptwertintegrationen im Ortsraum überhaupt wohldefiniert berechnet werden kann.

Dazu betrachten wir an Stelle von $D_i(x,y)=\phi_i(x)\frac{P}{x-y}\partial_y$ zunächst den einfacheren Fall der Operatoren $P_i(x,y)=\phi_i(x)\frac{P}{x-y}$ und versuchen, die Spur über deren Produkte im Ortsraum mit Hilfe eines vollständigen Orthonormalsystems $f_i(x)$,

$$f_i(x)f_i(y)=\delta(x-y), \qquad \int dx f_i(x)f_j(x)=\delta_{ij}$$

zu bestimmen. Die Spuren sind dann durch ineinander verschachtelte Hauptwertintegrationen gegeben (mit $\mathcal{P}\equiv\pi\mathcal{H}$),

$$\begin{aligned}\mathrm{tP}_1 &= \mathrm{tr}\,P_1 = \int f_i\phi_1\mathcal{P}[\,f_i\,], \\ \mathrm{tP}_{12} &= \mathrm{tr}\,P_1P_2 = \int f_i\phi_1\mathcal{P}[\,\phi_2\mathcal{P}[\,f_i\,]\,], \\ \mathrm{tP}_{123} &= \mathrm{tr}\,P_1P_2P_3 = \int f_i\phi_1\mathcal{P}[\,\phi_2\mathcal{P}[\,\phi_3\mathcal{P}[\,f_i\,]\,]\,],\ \ldots\ ,\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

die sich mit Hilfe des Vertauschungstheorems von Tricomi und Parsevals Theorem als Summe von Termen der Art

$$\int dx\psi(x)f_i(x)\mathcal{P}[\,\phi f_i\,](x) = \int dx\psi(x)f_i(x)⨍\frac{dy}{x-y}\phi(y)f_i(y) \tag{3.3.22}$$

sowie

$$\int dx f_i(x)f_i(x)\phi(x) = \delta(0)\int dx\phi(x) \tag{3.3.23}$$

darstellen lassen; letzterer ist dabei offensichtlich schon divergent. Um den ersten weiter auszuwerten, müssen wir nun dem Ausdruck

$$f_i(x)⨍\frac{dy}{x-y}\phi(y)f_i(y) = ⨍\frac{dy}{x-y}\phi(y)\delta(x-y) \tag{3.3.24}$$

eine Bedeutung geben, da dieser aufgrund der δ–Funktion unter dem Hauptwertintegral nicht wohldefiniert ist. Verwenden wir als Regularisierung die Taylor–Entwicklung von ϕ

unter dem Hauptwertintegral (s.u.), so erhalten wir

$$f_i(x)\mathcal{P}[\,\phi f_i\,](x) = \fint \frac{dy}{x-y}\phi(y)\delta(x-y) = -\phi'(x). \tag{3.3.25}$$

Die Spuren ergeben sich damit zu

$$\mathrm{tP}_1 = 0, \quad \mathrm{tP}_{12} = \int \phi_1 \mathcal{P}[\,\phi_2'\,] - \pi^2\delta(0)\int \phi_1\phi_2, \quad \mathrm{tP}_{123} = \int (\phi_1\mathcal{P}[\,\phi_3'\,] - \mathcal{P}[\,\phi_1'\,]\phi_3)\mathcal{P}[\,\phi_2\,], \tag{3.3.26}$$

wobei tP_{123} allerdings *nicht* zyklisch symmetrisch herauskommt,

$$\mathrm{tP}_{231} = \mathrm{tP}_{123} + \pi^2 \int \phi_1'\phi_2\phi_3, \quad \mathrm{tP}_{312} = \mathrm{tP}_{123} - \pi^2\int \phi_1\phi_2\phi_3'. \tag{3.3.27}$$

Ein analoges Resultat erhalten wir für die Spur über Produkte von $D_i(x,y)$, wenn wir die auftretenden divergenten Ausdrücke wie folgt behandeln,

$$f_i^{(n)}(x) f_i^{(m)}(x) = (-)^m \delta^{(n+m)}(0), \tag{3.3.28}$$

$$I_{2l}(x) = \int dy \frac{P}{x-y}\phi(y)\partial_y^{2l}\delta(x-y) = -\frac{1}{2l+1}\partial_x^{2l+1}\phi(x), \tag{3.3.29}$$

$$\begin{aligned} I_{2l+1}(x) &= \int dy \frac{P}{x-y}\phi(y)\partial_y^{2l+1}\delta(x-y) \\ &= \frac{1}{2l+2}\partial_x^{2l+2}\phi(x) + \int dy \frac{P}{x-y}\partial_y^{2l+1}\delta(x-y). \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Diese Regularisierung ergibt sich auch, wenn wir – anstatt zuerst $f_i(x)$ unter das Hauptwert-integral zu ziehen – sowohl für das Orthonormalsystem als auch für ϕ die Fourierdarstellung verwenden,

$$\begin{aligned} I_m(x) &= f_i(x)\int dy \frac{P}{x-y}\phi(y) f_i^m(y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int dp \int dq \int dr \tilde{f}_i(p)(-i\pi)\varepsilon(q+r)\tilde{\phi}(q)(ir)^m \tilde{f}_i(r) \mathrm{e}^{i(p+q+r)x} \\ &= -\frac{i}{4\pi}\int dq\tilde{\phi}(q)\mathrm{e}^{iqx}\int dr r^m \varepsilon(q+r) \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon(p) \equiv \mathrm{sgn}(p),\ \varepsilon(0) = 0, \end{aligned}$$

und für die r–Integration einen symmetrischen Impuls cutoff M wählen,

$$\int_{-M}^{M} dr r^m \varepsilon(q+r) = -\frac{2}{m+1}(-q)^{m+1} + \begin{cases} 0 & ,m \text{ gerade} \\ \frac{2}{m+1}M^{m+1} & ,m \text{ ungerade} \end{cases}.$$

In der Ortsraumdarstellung erhalten wir dann obiges Ergebnis mit explizter Abhängigkeit vom cutoff M,

$$I_{2l}(x) = -\frac{1}{2l+1}\partial_x^{2l+1}\phi(x), \quad I_{2l+1}(x) = \frac{1}{2l+2}\partial_x^{2l+2}\phi(x) + (-)^l\frac{1}{2l+2}M^{2l+2}\phi(x).$$

Für die Spuren erhalten wir in diesem Fall (mit $\mathrm{tD}_{1\ldots k} = \mathrm{tr}\, D_1\ldots D_k$)

$$\mathrm{tD}_1 = \int dx\phi_1(x)\int dy\frac{P}{x-y}\partial_y\delta(x-y), \quad \mathrm{tD}_{12} = -\frac{1}{6}\int\phi_1''\mathcal{P}[\,\phi_2'\,] - \pi^2\delta''(0)\int\phi_1\phi_2,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tD}_{123} = &\frac{1}{12}\int(\phi_1\mathcal{P}[\,\phi_3^{(4)}\,] - \phi_3\mathcal{P}[\,\phi_1^{(4)}\,])\mathcal{P}[\,\phi_2\,] + \frac{1}{6}\int(\phi_1'\mathcal{P}[\,\phi_3^{(3)}\,] - \phi_3'\mathcal{P}[\,\phi_1^{(3)}\,])\mathcal{P}[\,\phi_2\,] \\ &-\pi^2\int dx\,\phi_1\phi_2\phi_3\int dy\frac{P}{x-y}\partial_y^3\delta(x-y) + \pi^2\int dx\,\phi_1'\phi_2\phi_3'\int dy\frac{P}{x-y}\partial_y\delta(x-y), \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

die damit alle divergent sind und bei denen sich tD_{123} wiederum als nicht zyklisch ergibt. Wir können aber verstehen, warum wir hier ein nicht zyklisches Resultat erhalten, wenn wir die Spuren direkt in der Fourierdarstellung definieren, wo keine Probleme mit der Nichtvertauschbarkeit von Hauptwertintegrationen auftreten. Mit

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\mathrm{e}^{ikx}\tilde{\phi}(k), \quad \tilde{\phi}(k) = \int dx\mathrm{e}^{-ikx}\phi(x), \quad \int dx\phi_1(x)\phi_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\tilde{\phi}_1(k)\tilde{\phi}_2(-k)$$

ergibt sich für die Operatoren $P(x,y)$ folgende Fourierdarstellung

$$P(x-y) = \phi(x)\frac{P}{x-y} \quad \to \quad \tilde{P}(k,-l) = -i\pi\tilde{\phi}(k-l)\varepsilon(l), \tag{3.3.32}$$

und damit für die Spur über die Produkte der P_i's

$$\begin{aligned} \mathrm{tP}_1 &= -\frac{i}{2}\tilde{\phi}(0)\int dk\,\varepsilon(k), \quad \mathrm{tP}_{12} = -\frac{1}{4}\int dk\int dl\,\tilde{\phi}_1(k-l)\varepsilon(l)\tilde{\phi}_2(l-k)\varepsilon(k), \\ \mathrm{tP}_{123} &= \frac{i}{8}\int dk\int dl\int dm\,\tilde{\phi}_1(k-l)\varepsilon(l)\tilde{\phi}_2(l-m)\varepsilon(m)\tilde{\phi}_3(m-k)\varepsilon(k). \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

In der Fourierdarstellung sind die Spuren damit offensichtlich zyklisch und besitzen die weitere Symmetrie $\mathrm{tP}_{1\ldots k} = (-)^k\mathrm{tP}_{k\ldots 1}$ und wir sehen auch, wie wir eine zyklisch symmetrische Regularisierung der divergenten Spuren erhalten, wenn wir einen symmetrischen Impuls cutoff M für die Integrale in (3.3.33) einführen.

Die Tatsache, daß wir bei unserer Regularisierung im Ortsraum ein nichtzyklisches Ergebnis für die Spur erhielten, läßt sich nun auch leicht in der Fourierdarstellung verstehen. Gehen wir von dem symmetrischen Ausdruck (3.3.33) aus und verwenden die Identität (A.11), so ergibt sich für den letzten Term in

$$\frac{i}{8}\int dk\int dl\int dm\,\tilde{\phi}_1(k-l)\tilde{\phi}_2(l-m)\tilde{\phi}_3(m-k)[-\varepsilon(k)\varepsilon(k-l) + \varepsilon(l)\varepsilon(k-l) - 1]$$

nach Variablentransformation $k \to k+l,\ l \to l+m$

$$-\frac{i}{8}\int dx\,\phi_1(x)\phi_2(x)\phi_3(x)\int dm\,\varepsilon(m),$$

welcher bei nun symmetrisch regularisierter m–Integration verschwindet. Analog erhalten wir für den ersten Term

$$-\frac{i}{8}\int dk\int dl\int dm\,\phi_1(-k)\phi_2(k-l)\phi_3(l)e(k-l)e(m)e(k+m)$$

mit

$$\int_{-M}^{M} dm\,\varepsilon(m)\varepsilon(k+m)=2M-2k\varepsilon(k)$$

nach Übergang in den Ortsraum

$$\pi M\int\phi_1\phi_3\mathcal{P}[\phi_2]-\int\mathcal{P}[\phi_1']\phi_3\mathcal{P}[\phi_2],$$

was zusammen mit dem Beitrag des zweiten Terms das im Ortsraum abgeleitete nicht zyklische Ergebnis liefert. Der Grund dafür ist hier die zuerst bei unendlichen Grenzen durchgeführte Variablentransformation mit anschließendem symmetrischen Impuls cutoff.

Für den uns interessierenden Operator $D(x,y)$ erhalten wir in der Fourierdarstellung

$$D(x-y)=\phi(x)\frac{P}{x-y}\partial_y \quad\rightarrow\quad \tilde{D}(k,-l)=\pi\tilde{\phi}(k-l)|l| \tag{3.3.34}$$

und damit für die Spuren

$$\mathrm{tD}_1=\frac{1}{2\pi}\int dk\,\pi\tilde{\phi}(0)|k|=\frac{1}{2}\tilde{\phi}(0)M^2,\quad \mathrm{tD}_{12}=\frac{1}{4}\int dk\int dl\,\tilde{\phi}_1(k-l)|l|\tilde{\phi}_2(l-k)|k|,$$
$$\mathrm{tD}_{123}=\frac{1}{8}\int dk\int dl\int dm\,\tilde{\phi}_1(k-l)|l|\tilde{\phi}_2(l-m)|m|\tilde{\phi}_3(m-k)|k|. \tag{3.3.35}$$

Sie sind zyklisch und besitzen die weitere Symmetrie $\mathrm{tD}_{1\ldots k}=\mathrm{tD}_{k\ldots 1}$, sind aber für generische Funktionen ϕ_i ebenfalls divergent; eine Regularisierung in der Fourierdarstellung mit symmetrischen Impuls cutoff erhält aber diese Symmetrien.

Die Behauptung in [10], die Beiträge der 1–Loop Determinante zur $1/N$–Entwicklung würden aus Symmetriegründen verschwinden, läßt sich daher nach unserer genaueren Betrachtung nicht aufrecht erhalten; vielmehr müssen die tatsächlich divergenten Beiträge regularisiert werden.

Da in unserem Fall die ϕ_i durch $\hat{\rho}^{-1}$ gegeben sind, ist eine weitere Regularisierung aber auch schon aus dem Grund notwendig, daß $\hat{\rho}^{-1}$ offensichtlich nicht auf ganz $\mathbb{R}$ existieren kann, sondern nur auf einem endlichen Intervall, wie wir auch schon bei der Invertierung von g gesehen haben.

Die Spurbeiträge auf endlichem Intervall

Um die Theorie konsistent zu regularisieren, müssen wir von Anfang an die Eigenwerte auf ein endliches Intervall wie z.B. $[-L,L]$ einschränken. Das führt natürlich dazu, daß die Integration in der Sattelpunktsgleichung dann auch auf dieses Intervall beschränkt ist,

$$\frac{1}{2}V'(x)+\frac{1}{2N}\frac{\hat{\rho}'(x)}{\hat{\rho}(x)}=\fint_{-L}^{L}\frac{dy}{x-y}\hat{\rho}(y),\quad\text{mit}\quad\int_{-L}^{L}dx\,\hat{\rho}(x)=1. \tag{3.3.36}$$

Da das Faltungstheorem auch auf dem endlichen Intervall gilt, können wir damit die gleiche nicht–lineare Schrödingergleichung (3.1.26) ableiten, wobei die Momente m_l nun bezüglich des Intervalls $[-L,L]$ definiert sind und ebenfalls selbstkonsistent bestimmt werden müssen.

Wir können auch diese Gleichung nicht analytisch lösen und damit die Sattelpunktskonfiguration $\hat{\rho}$ explizit angeben, aber es ist offensichtlich, daß die Lösung eine L–Abhängigkeit zeigen wird und nicht mit der auf $[-L,L]$ eingeschränkten Lösung für ganz $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

Ein weiterer Unterschied zum unendlichen Intervall ergibt sich dadurch, daß wir bei der Invertierung von $f(x-y)=\ln(x-y)^2$ nun auch die inverse Hilberttransformation für ein endliches Intervall zu verwenden haben.

Wir betrachten dazu wieder ein Orthonormalsystem $h_i(x)$ auf $[-L,L]$ mit der konstanten Basisfunktion $h_0(x)=1/\sqrt{2L}$,

$$\int_{-L}^{L}dx h_i(x)h_j(x)=\delta_{ij},\quad\sum_i h_i(x)h_i(y)=\delta(x-y),\quad\sum_{i\neq 0}h_i(x)h_i(y)=\delta(x-y)-\frac{1}{2L}. \tag{3.3.37}$$

Mit Hilfe der im Anhang angegebenen Formel für die inverse Hilberttransformation auf dem endlichen Intervall (A.16, A.17) erhalten wir

$$-\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{L^2-x^2}}\fint_{-L}^{L}\frac{dy}{x-y}\sqrt{L^2-y^2}\fint_{-L}^{L}\frac{dz}{y-z}h(z)=h(x)\quad\text{für}\quad\int_{-L}^{L}dx\,h(x)=0 \tag{3.3.38}$$

und finden damit für das Inverse von $f(x,y)$

$$f^{-1}(x,y)=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{P}{x-y}\frac{\sqrt{L^2-y^2}}{\sqrt{L^2-x^2}}\partial_y. \tag{3.3.39}$$

Mit $\partial_x h_0(x)=0$ ($f^{-1}\,|0\rangle=0$) ist $f^{-1}f$ damit auf dem zu h_0 orthogonalem Komplement die Identität

$$\sum_{j=1}\langle i|\,f\,|j\rangle\,\langle j|\,f^{-1}\,|k\rangle=\sum_{j=0}\langle i|\,f\,|j\rangle\,\langle j|\,f^{-1}\,|k\rangle=\langle i|\,ff^{-1}\,|k\rangle=\langle i|k\rangle,\quad i,k\neq 0. \tag{3.3.40}$$

Da die Hilberttransformation auf endlichem Intervall orthogonal zu der Nullmode $1/\sqrt{L^2-x^2}$ ist, gilt mit $\langle 0|\, f^{-1} = 0$ auch

$$\sum_{j=1} \langle i|\, f^{-1}\, |j\rangle \langle j|\, f\, |k\rangle = \sum_{j=0} \langle i|\, f^{-1}\, |j\rangle \langle j|\, f\, |k\rangle = \langle i|\, f^{-1} f\, |k\rangle\,. \tag{3.3.41}$$

Mit Hilfe der im Anhang gegebenen Formeln erhalten wir nun bei der Anwendung von $f^{-1}f$ auf Monome

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi^2}\int_{-L}^{L} dy \ln(x-y)^2 \fint_{-L}^{L} \frac{dz}{y-z}\frac{\sqrt{L^2-z^2}}{\sqrt{L^2-y^2}}\partial_z z^{2n+1} &= x^{2n+1}, \\ -\frac{1}{2\pi^2}\int_{-L}^{L} dy \ln(x-y)^2 \fint_{-L}^{L} \frac{dz}{y-z}\frac{\sqrt{L^2-z^2}}{\sqrt{L^2-y^2}}\partial_z z^{2n} &= x^{2n} - L^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

und damit auf die Basis unseres Orthonormalsystems

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int_{-L}^{L} dy \ln(x-y)^2 \fint_{-L}^{L} \frac{dz}{y-z}\frac{\sqrt{L^2-z^2}}{\sqrt{L^2-y^2}}\partial_z h_k(z) = h_k(x) + c_k h_0(x), \quad k \neq 0, \tag{3.3.43}$$

so daß sich auf dem zu h_0 orthogonalen Komplement $f^{-1}f$ ebenfalls die Identität ergibt,

$$\langle i|\, f^{-1} f\, |k\rangle = \langle i|k\rangle, \quad i,k \neq 0. \tag{3.3.44}$$

Nach dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Problem bei der Berechnung der Spuren im Ortsraum wollen wir sie nun gleich in der Fourierdarstellung auswerten. Mit der Fourierentwicklung auf dem endlichen Intervall $[-L, L]$,

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_n f_n \mathrm{e}^{in\pi x/L}, \quad f_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x) \mathrm{e}^{-in\pi x/L}, \quad \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x) g(x) = \sum_n f_n g_{-n} \\ \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, \mathrm{e}^{i(n-m)\pi x/L} = \delta_{n,m}, \quad \frac{1}{2L}\sum_n \mathrm{e}^{in\pi x/L} = \delta(x), \end{gathered} \tag{3.3.45}$$

erhalten wir damit für unseren Operator

$$D(x,y) = \phi(x) \frac{P}{x-y}\frac{\sqrt{L^2-y^2}}{\sqrt{L^2-x^2}}\partial_y \tag{3.3.46}$$

die folgende Darstellung,

$$\begin{aligned} D_{n,m} &= \frac{1}{(2L)^2}\int_{-L}^{L} dx \int_{-L}^{L} dy\, \phi(x) \frac{P}{x-y}\frac{\sqrt{L^2-y^2}}{\sqrt{L^2-x^2}}\partial_y \mathrm{e}^{-in\pi x/L}\mathrm{e}^{-im\pi x/L} \\ &= \frac{1}{(2L)^2}(-im\pi)\sum_l \phi_l \int_{-1}^{1} dx\, \mathrm{e}^{-i(n-l)\pi x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \fint_{-1}^{1} \frac{dy}{x-y}\mathrm{e}^{-im\pi y}\sqrt{1-y^2}, \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

wobei die einzige nicht–triviale L–Abhängigkeit nur durch die Fourierkomponenten von ϕ,

$$\phi_l = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx\, \phi(x) \mathrm{e}^{-il\pi x/L} \quad \text{mit} \quad \phi(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\hat\rho(x)} \tag{3.3.48}$$

gegeben ist; ein Zeichen dafür, daß der Grund für die auftretenden UV-Divergenzen bei der Berechnung der 1–Loop Determinante unabhängig von der IR-Regularisierung mit dem cutoff Parameter L ist.

Sowohl die Hilberttransformation als auch die anschließende x–Integration konnten wir nur ausführen, indem wir beide Exponentialfunktionen entwickeln, wobei sich die bei der Hilberttransformation aufretende hypergeometrische Reihe (cf. (A.22)) nach der x–Integration noch aufsummieren ließ. Für die verbleibende Doppelsumme können wir aber keinen geschlossenen Ausdruck angeben, was (neben den nicht explizit bekannten Φ_l) zu technischen Problemen bei einer weiteren Berechnung der Spur über die Potenzen von

$$D_{n,m} = \frac{1}{(2L)^2}\frac{\pi^2}{2}\sum_l \Phi_l d_{n-l,m} \tag{3.3.49}$$

führt, wobei $d_{n-l,m}$ durch

$$\begin{aligned} d_{n-l,m} = \sum_{r,s=0} \Big[&(-\pi^2)^{r+s+1}(n-l)^{2r+1} m^{2s+1} \frac{1}{(2s)!!(2s)!!}\frac{1}{(2r)!!(2r)!!}\frac{1}{s+r+1} \\ &+ (-\pi^2)^{r+s+2}(n-l)^{2r+2} m^{2s+2} \frac{1}{(2s)!!(2s+2)!!}\frac{1}{(2r)!!(2r+2)!!}\frac{1}{s+r+2}\Big] \end{aligned} \tag{3.3.50}$$

gegeben ist. Um unsere Regularisierung mit dem Ergebnis im Kontinuum zu vergleichen, betrachten wir nun

$$\mathrm{tr}\, D = 2L\sum_n D_{n,-n} = \frac{\pi^2}{4L}\sum_l \Phi_l \sum_n d_{n-l,-n}\,. \tag{3.3.51}$$

Für die Summe über $d_{n-l,l}$ finden wir kein analytisches Ergebnis, numerisch zeigt sich aber für großes m folgendes Verhalten,

$$\sum_{n=-m}^{m} d_{n,-n} \approx (2m+1)^2, \quad \sum_{n=-m}^{m} d_{n-l,-n} \lessapprox \mathcal{O}(1),\ l \neq 0 \ \rightarrow \sum_{n=-m}^{m} d_{n-l,-n} \approx (2m+1)^2 \delta_{l,0},$$

wobei wir mit m einen diskreten cutoff Parameter eingeführt haben. Die damit regularisierte Spur

$$\mathrm{tr}\, D = \frac{\pi^2}{4L}\Phi_0 (2m+1)^2 = \frac{1}{2}\int dx \phi(x)\,(m\pi/L + \pi/2L)^2 \tag{3.3.52}$$

zeigt Übereinstimmung mit dem Kontinuumsresultat

$$\mathrm{tr}\, D = \frac{1}{2}\int dx \phi(x)\, M^2 \tag{3.3.53}$$

für einen Impuls cutoff $M = (m+1/2)\pi/L$.

Die Spuren über die höheren Potenzen von D können wir aufgrund der nicht bekannten Φ_l und den beschriebenen technischen Problemen nicht weiter auswerten. Es ist aber (wie wir auch schon an den Ergebnissen im Kontinuum sehen konnten) aus Dimensionsgründen offensichtlich, daß diese ebenfalls divergieren werden wie

$$\mathrm{tr}\, D^n \sim M^{n+1}. \tag{3.3.54}$$

Der Grund für die hier auftretenden UV–Divergenzen liegt darin, daß wir über alle Fouriermoden summieren. Wie wir schon bei der Formulierung der kollektiven Feldtheorie erwähnt haben (cf. (3.1.3)), sind aber nicht alle Fouriermoden der Eigenwertdichte unabhängig, sondern nur N, so daß hier ein Moden cutoff von $m = N/2$ sinnvoll erscheint. Das führt allerdings dazu, daß die $1/N$–Entwicklung der 1–Loop Determinante

$$\sum_{n=1} \frac{1}{2nN^n}\mathrm{tr}\, D^n, \quad \text{mit} \quad \mathrm{tr}\, D^n \sim \mathcal{O}(N^{n+1}) \tag{3.3.55}$$

zusammenbricht, da es aus jeder Ordnung Beiträge $\sim \mathcal{O}(N)$ gibt. Ebenso bricht die $1/N$–Entwicklung der Wechselwirkungsbeiträge zusammen, da bei einer Auswertung auf dem durch die Fouriermoden gegebenen Unterraum der divergente Faktor $\delta(0) \sim \mathcal{O}(N)$ sein wird – einmal abgesehen von den technischen Problemen einer solchen expliziten Auswertung.

Bevor wir in der Zusammenfassung genauer diese mit der Regularisierung der divergenten Ausdrücke verbundenen Probleme und den prinzipiellen Zugang der hier betrachteten kollektiven Feldtheorie diskutieren, müssen wir noch darauf eingehen, daß wir bis jetzt noch nicht die N– (und L–) Abhängigkeit der klassischen Eigenwertdichte und ihrer Inversen betrachtet haben.

$1/N$–Entwicklung der klassischen Eigenwertdichte

Da wir für die klassische Eigenwertdichte weder auf unendlichem noch auf dem für eine Regularisierung notwendig eingeführten endlichen Interval $[-L, L]$ eine explizite Lösung angeben können, mußten wir bei der Untersuchung der Beiträge aus der 1-Loop Determinante und den Wechselwirkungstermen die durch $\hat{\rho}(x)$ und $1/\hat{\rho}(x)$ gegebene N– (und L–) Abhängigkeit unberücksichtigt lassen.

Um doch noch weitere Aussagen über das Verhalten von $\hat{\rho}(x)$ machen zu können, wurde in [10] eine $1/N$-Entwickung der Sattelpunktsgleichung um die planare Eigenwertdichte für $N = \infty$ auf dem durch sie bestimmten Träger $\sigma = [a, b]$ betrachtet; dies ist natürlich problematisch, weil dadurch die gesamte Eigenwertdichte $\hat{\rho}(x)$ außerhalb des Trägers σ zu Null gesetzt wird und damit $1/\hat{\rho}(x)$ nur auf σ definiert und außerhalb davon divergent ist. Das als Infrarot cutoff eingeführte Intervall $[-L, L]$ wird dadurch auf $[a, b]$ eingeschränkt, so daß wir dann ein von einem Regularisierungsparameter unabhängiges *anderes* Eigenwertmodell betrachten, dessen Eigenwerte von Beginn an auf den Träger der planaren Eigenwertdichte beschränkt sind.

Mit dem Ansatz einer $1/N$–Entwicklung auf $\sigma = [a, b]$,

$$\hat{\rho}(x) = \sum_{n=0} N^{-n}\rho_n(x) \quad \text{und} \quad \int_a^b dx\, \rho_n(x) = \delta_{0,n}, \ \text{da} \int_a^b dx\, \hat{\rho}(x) = 1 = \int_a^b dx\, \rho_0(x), \tag{3.3.56}$$

und der Entwicklung

$$\ln \hat{\rho}(x) = \ln \rho_0(x) - \sum_{k=1} \frac{(-)^k}{k}\Big(\frac{1}{N^n}\frac{\rho_n(x)}{\rho_0(x)}\Big)^k \equiv \sum_{n=0} N^{-n} V_{n+1}(x), \quad V_0(x) = V(x), \tag{3.3.57}$$

erhält man für die $1/N$–Entwicklung der Sattelpunktsgleichung

$$\frac{1}{2}\partial_x\Big(V(x) + \frac{1}{N}\ln\hat{\rho}(x)\Big) = \fint_a^b \frac{dy}{x-y}\hat{\rho}(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}V_n'(x) = \fint_a^b \frac{dy}{x-y}\rho_n(x), \ x \in [a, b], \tag{3.3.58}$$

so daß sich die ρ_n's mit Hilfe der inversen endlichen Hilberttransformation rekursiv bestimmen lassen sollten. Es zeigt sich aber, daß auch diese Entwicklung nicht wohldefiniert ist und singulär wird, da schon $\rho_1(x)$ zum einen für $x \to a, b$ divergent ist und nur bei Einführung von δ–Funktionen an den Endpunktes des Intervalls formal eine Lösung darstellt.

Der Anfang dieser Entwicklung wurde in [10] am bekannten Beispiel des quartischen Potentials

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + gx^4, \quad \rightarrow \quad \sigma = [-2a, 2a] \quad \text{mit} \quad 12ga^4 + a^2 - 1 = 0 \tag{3.3.59}$$

betrachtet, für welches die planare Eigenwertdichte auf σ durch

$$\rho_0(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + 8ga^2 + 4gx^2)\sqrt{4a^2 - x^2}$$

gegeben ist. Damit ergab sich

$$V_1'(x) = \partial_x \ln \rho_0(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2} - \frac{x}{4a^2 - x^2}, \quad \text{mit} \quad n^2 = \frac{1 + 8ga^2}{4g} = \frac{2 + a^2}{1 - a^2}a^2, \tag{3.3.60}$$

wobei der erste Summand einen Beitrag

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{4a^2 - x^2}}\left[\frac{\sqrt{(4a^2 + n^2)n^2}}{x^2 + n^2} - 1\right] \tag{3.3.61}$$

zur Eigenwertdichte $\rho_1(x)$ liefert; der zweite dagegen ist an den Endpunkten nicht integrabel. Der Vorschlag in [10], man könnte

$$-\frac{1}{2}\frac{x}{4a^2 - x^2} = \fint_{-2a}^{2a} \frac{dy}{x - y} h(y) \tag{3.3.62}$$

durch

$$h(x) = \frac{1}{2}[\delta(x + 2a) + \delta(x - 2a)] - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{4a^2 - x^2}} \quad \text{mit} \quad \int_{-2a}^{2a} dx\, \delta(x + 2a) = \frac{1}{2} \tag{3.3.63}$$

lösen, führt auf einen nicht wohldefinierten divergenten zweiten Beitrag zu $\rho_1(x)$ und ist, wie schon in [10] bemerkt, das Zeichen dafür, daß eine $1/N$–Entwicklung der Eigenwertdichte auf dem Träger der planaren Eigenwertdichte nicht wohldefiniert werden kann.

Mit diesem singulären Ergebnis für $\rho_1(x)$ ergibt sich dann auch in [10] ein Resultat, das in der ersten nicht–planaren Ordnung ($\mathcal{O}$(N)) nicht mit dem bekannten Ergebnis aus der Methode der orthogonalen Polynome übereinstimmt. Nach unserer Betrachtung der UV-Divergenzen sowohl bei den Beiträgen der 1–Loop Determinante als auch der Wechselwirkungsterme würden sich dann auch noch bei einer leider nicht explizit durchführbaren Regularisierung aus jeder Ordnung der '1/N–Entwicklung' zusätzliche Beiträge der Ordnung N ergeben.

4. Zusammenfassung und Bewertung

Die von Lechtenfeld in [10] beschriebene kollektive Feldtheorie zur Behandlung des nulldimensionalen hermiteschen Matrixmodells – oder genauer: des entsprechenden Eigenwertmodells – beruht auf dem Übergang von den endlichen N Eigenwerten zu einer kontinuierlichen Eigenwertdichte, wobei die Jacobideterminante der Variablentransformation exakt berücksichtig wird. Mit der semiklassischen Entwicklung der daraus resultierenden nicht–lokalen und nicht–polynomialen Feldtheorie in zwei skalaren Feldern ρ und λ wurde versucht, die freie Energie des Eigenwertmodells zu berechnen, wobei die folgenden technischen und prinzipiellen Probleme auftreten:

Die semiklassische Entwicklung ist eine Entwicklung um die klassische Sattelpunktskonfiguration, das heißt in unserem Fall eine Entwicklung um die klassische Eigenwertdichte für *endliches* N, für die wir aber keine analytische[5] Lösung oder Entwicklung in $1/N$ angeben können, so daß wir deren N-Anhängigkeit zunächst unberücksichtigt lassen müssen.

Ebenso können wir auch die Propagatoren nicht für endliches N, sondern nur in einer $1/N$ Entwicklung um $N = \infty$ angeben und sind dabei gezwungen, die Theorie auf ein endliches Intervall zu regularisieren. Auf diesem Intervall ist dann aber eine formale $1/N$–Entwicklung sowohl der Beiträge aus den Feynman Diagrammen als auch der 1-Loop Determinante möglich; allerdings stellen sich diese Beiträge als UV divergent heraus.

Die Ursache dieser UV Divergenzen liegt anscheinend schon in der Formulierung der kollektiven Feldtheorie, wo wir von den endlichen N Freiheitsgraden der Eigenwerte auf die kontinuierliche Eigenwertdichte übergehen, was sich jetzt bemerkbar macht, wenn wir bei den Feynman Diagrammen $\mathrm{tr}\,\mathbf{1}$ und bei der 1-Loop Determinante die Summe über alle Fouriermoden auswerten und damit divergente Beiträge erhalten. Eine natürliche Regularisierung dieser Divergenzen wäre von daher ein Moden cutoff bei N. Damit bricht dann aber die $1/N$–Entwicklung der Feynman Diagramme und der 1–Loop Determinante zusammen und wir erhalten von jeder 'Ordnung' Beiträge der Ordnung N.

Dieses Verhalten ist dabei unabhängig von der expliziten N–Abhängigkeit der klassischen Eigenwertdichte. Auch der Versuch, für diese auf dem Träger der planaren Eigenwertdichte eine $1/N$–Entwicklung zu konstruieren, führt auf Singularitäten.

Aufgrund dieser sowohl technischen wie auch prinzipiellen Gründe sind wir daher nicht in der Lage, mit der kollektiven Feldtheorie über die triviale planare Ordnung in der $1/N$–Entwicklung der freien Energie hinauszugehen.

Nach diesen negativen Resultaten drängt sich die Frage auf, inwieweit es für unser Interesse an der Lösung des Matrixmodells sinnvoll ist, die Eigenwertdichte als dynamische Variable zu betrachten. Während dies für mit dem Eigenwertmodell zusammenhängende Fragen wie nach den Korrelationen zwischen Eigenwerten natürlich erscheint, sind wir vom Standpunkt des Matrixmodells aus doch nur an den Matrixkorrelatoren und damit den Momenten von Eigenwertkorrelationsfunktionen interessiert. Der wesentliche Punkt dabei ist, daß diese Momente dann im Gegensatz zu den Korrelationsfunktionen auch eine Entwicklung in $1/N$ besitzen. Dies sieht man am einfachsten schon im Fall des Gauß'schen Matrixmodells, welches wir in Anhang B kurz darstellen.

In der Tat sind es auch die erzeugenden Funktionen für die Matrixkorrelatoren, die sogenannten Loop-Korrelatoren, die sich mit der Hilfe der Momentenmethode [15, 14,

[5] Eine solche benötigen wir aber, um die freie Energie als Funktional der Kopplungskonstanten zu erhalten. Von daher ist auch der Versuch einer numerischen Lösung nicht sinnvoll.

16] in der $1/N$–Entwicklung für generisches Potential und nicht störungstheoretisch in den Kopplungskonstanten bestimmen lassen. Wir werden dieses Verfahren im nächsten Kapitel im Zusammenhang mit dem komplexen Matrixmodell betrachten.

Kapitel IV:

Komplexes Matrixmodell und Momentenmethode

Neben dem hermiteschen Matrixmodell gibt es noch weitere Matrixmodelle, die ebenfalls eine Interpretation als Polygonierung von zweidimensionalen Flächen besitzen und für die sich ein Doppelskalenlimes definieren läßt. Während das hermitesche Matrixmodell orientierbare Flächen beschreibt, führt ein Matrixmodell mit reellen symmetrischen Matrizen zu nichtorientierbaren Flächen. Wir werden im folgenden das komplexe Matrixmodell [21, 24, 25] mit Hilfe der Momentenmethode [26, 15] betrachten, welches wie das hermitesche Matrixmodell orientierbare Flächen beschreibt, die aber zusätzlich eine schachbrettartige Triangulierung erlauben. Dabei wollen wir das kritische Verhalten untersuchen, das mit dem Auftreten von Nullstellen am Ursprung der Eigenwertdichte verbunden ist.

1. Das Modell

Das komplexe Matrixmodell (CMM) ist definiert durch die Zustandssumme

$$Z = \mathrm{e}^{N^2 F} = \int d\phi d\phi^\dagger \exp\left[-N \mathrm{tr}\, V(\phi^\dagger\phi)\right] \quad , \quad V(\phi^\dagger\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n} (\phi^\dagger\phi)^n, \tag{4.1.1}$$

wobei ϕ_{ij} eine komplexe $N \times N$–Matrix ist und das Maß für die Matrixintegration durch

$$d\phi d\phi^\dagger = \prod_{i,j} d\,\mathrm{Re}\,\phi_{ij} d\,\mathrm{Im}\,\phi_{ij} \tag{4.1.2}$$

gegeben ist. Die Zustandssumme Z und die freie Energie F hängen damit von der Matrixgröße N und dem Satz der Kopplungskonstanten $[g_k]$ ab. Erwartungswerte sind wie üblich definiert als

$$\langle \mathcal{O}(\phi,\phi^\dagger)\rangle = \frac{1}{Z}\int d\phi d\phi^\dagger \mathcal{O}(\phi,\phi^\dagger) \exp\left[-N \mathrm{tr}\, V(\phi^\dagger\phi)\right], \tag{4.1.3}$$

wobei die folgenden für die Lösung des Modells von besonderer Bedeutung sind:

Der 1–Loop Korrelator, die erzeugende Funktion für die 1–Punkt Amplituden,

$$W(p) = \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{tr}\, \frac{1}{p - \phi^\dagger\phi}\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^k\rangle}{p^{k+1}} \tag{4.1.4}$$

und analog der s–Loop Korrelator

$$\begin{aligned} W(p_1,\ldots,p_s) &= N^{s-2}\left\langle \mathrm{tr}\, \frac{1}{p_1 - \phi^\dagger\phi} \ldots \mathrm{tr}\, \frac{1}{p_s - \phi^\dagger\phi}\right\rangle_c \\ &= N^{s-2} \sum_{k_1,\ldots,k_s=1}^{\infty} \frac{\langle \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^{k_1} \ldots \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^{k_s}\rangle_c}{p_1^{k_1+1}\ldots p_s^{k_s+1}} \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

als erzeugende Funktion für die zusammenhängenden (Subskript c) s–Punkt Amplituden.

Mit Hilfe des Loop–Einsetzungsoperators

$$\frac{d}{dV(p)} = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{p^{j+1}} \frac{d}{dg_j}, \quad \frac{dV(\omega)}{dV(p)} = -\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p} \tag{4.1.6}$$

lassen sich diese aus der freien Energie bzw. dem Ein–Loop Korrelator gewinnen:

$$W(p) = \frac{d}{dV(p)} F + \frac{1}{p}, \quad W(p_1,\ldots,p_s) = \frac{d}{dV(p_s)} \ldots \frac{d}{dV(p_2)} W(p_1) \qquad (s \geq 2). \tag{4.1.7}$$

Die Normierung der freien Energie und der Korrelatoren wurde dabei so gewählt, daß ihre topologische Entwicklung durch

$$F = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2g}} F_g, \quad W(p_1,\ldots,p_s) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{1}{N^{2g}} W_g(p_1,\ldots,p_s) \tag{4.1.8}$$

gegeben ist.

Feynman–Diagramme

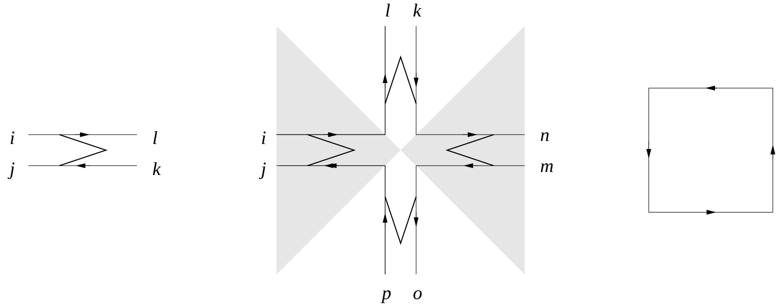
Die Interpretation als Triangulierung zweidimensionaler Flächen ergibt sich aus der Störungstheorie um die freie Theorie mit $g_n = 0,\ n > 1$ (bezeichnet mit Subskript 0).

Für den nichtverschwindenden Propagator zwischen ϕ und $\phi^\dagger$ in der freien Theorie erhält man

$$\left\langle \phi_{ij} \phi^\dagger_{kl} \right\rangle_o = \frac{1}{g_1 N} \delta_{il} \delta_{jk} \qquad (4.1.9)$$

und jeder $2n$–Vertex des Potentials trägt mit einem Faktor $-\frac{g_n}{n} N$ bei. Zusätzlich ergibt sich für jeden geschlossenen Indexloop ein Faktor $N = \sum_i \delta_{ii}$.

In der diagrammatischen Darstellung werden wie beim HMM die beiden Matrixindizes durch doppelte entgegengesetzt gerichtete Linien beschrieben. Zusätzlich ist jetzt aber noch die Richtung der Doppellinien von ϕ nach $\phi^\dagger$ ausgezeichnet [21], die durch einen weiteren Pfeil kenntlich gemacht wird; an den Vertizes sind diese Pfeile jeweils abwechselnd ein– und auslaufend.



Propagator, 4–Vertex und Indexloop des komplexen Matrixmodells

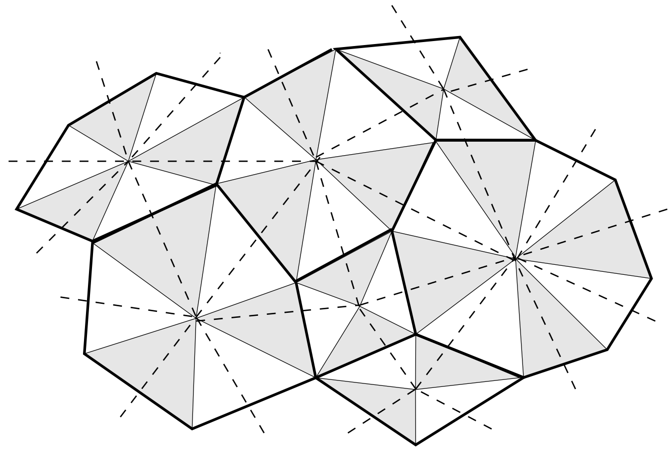
Ein Feynman–Diagramm mit diesen Regeln stellt den dualen Graph einer Polygonierung einer orientierten Fläche mit $2n$–Gonen dar, die sich schachbrettartig triangulieren lassen, indem man die $2n$–Gone entsprechend trianguliert.

Das komplexe Matrixmodell ist dabei nicht äquivalent zum hermiteschen Matrixmodell mit geradem Potential. Jenes beschreibt zwar auch Polygonierungen mit $2n$–Gonen, von denen sich aber nicht alle schachbrettartig triangulieren lassen.

Für das einfachste nichttriviale Beispiel mit quartischem Potential ergibt sich z.B.

$$\text{CMM}: \quad \frac{1}{N} \left\langle \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger \phi)^2 \right\rangle_0 = 2N^2 \quad , \qquad \text{HMM}: \quad \frac{1}{N} \left\langle \mathrm{tr}\, M^4 \right\rangle_0 = 2N^2 + 1. \qquad (4.1.10)$$

Der Torus läßt sich nicht mit einem schachbrettartig gemustertem Quadrat triangulieren.



Polygonierte Oberfläche: Die Polygone sind dual zu den Vertizes des CMM

Die freie Energie ist durch die Summe aller zusammenhängenden Vakuumdiagramme gegeben. Ein Diagramm mit P Propagatoren, L Indexloops und V_n $2n$–Vertizes liefert dazu einen Beitrag von

$$(g_1 N)^{-P} N^L \prod_{n>2} (-\frac{g_n}{n} N)^{V_n} = N^{V-P+L} g_1^{-P} \prod_{n>2} (-\frac{g_n}{n})^{V_n} \quad , \quad V = \sum_{n>2} V_n \qquad (4.1.11)$$

so daß sich mit Hilfe der Euler–Relation

$$V - P + L = 2 - 2g \qquad (4.1.12)$$

die topologische Entwicklung aus Gl. (4.1.8) ergibt.

Eigenwert–Modell

Die Wirkung und das Maß des komplexen Matrixmodells sind invariant unter der Transformation

$$\phi \to V^\dagger \phi U, \quad \phi^\dagger \to U^\dagger \phi^\dagger V, \quad V, U \in U(N) \qquad (4.1.13)$$

mit deren Hilfe sich die Matrix ϕ diagonalisieren läßt [21]

$$\phi = V^\dagger \Lambda U, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_N), \quad \lambda_i \geq 0. \qquad (4.1.14)$$

Beim Übergang von den $2N^2$ Matrixvariablen zu den N Eigenwerten λ_i und $2N^2 - N$ „Winkelvariablen“ transformiert das Maß mit

$$d\phi d\phi^\dagger \to dU dV \prod_i d\lambda_i J[\lambda], \qquad (4.1.15)$$

so daß die Integrationen über die unitäre Gruppe ausfaktorisieren. Die Jacobideterminante $J[\lambda]$ für diese Transformation ist dabei durch

$$J[\lambda] = \prod_i \lambda_i \prod_{i<j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2 \tag{4.1.16}$$

gegeben.

Zu deren Ableitung betrachtet man die Norm einer Variation von $\phi = V^\dagger \Lambda U$

$$\begin{aligned} |\delta\phi|^2 &= \mathrm{tr}\,(\delta\phi\delta\phi^\dagger) = \mathrm{tr}\,(\delta V^\dagger \Lambda U + V^\dagger \delta\Lambda U + V^\dagger \Lambda \delta U)(\delta U^\dagger \Lambda V + U^\dagger \delta\Lambda V + U^\dagger \Lambda \delta V) \\ &= \mathrm{tr}\,(\delta\Lambda\delta\Lambda + \Lambda^2 \delta U \delta U^\dagger + \Lambda^2 \delta V \delta V^\dagger + 2V\delta V^\dagger \Lambda U \delta U^\dagger \Lambda \\ &\quad + [\Lambda, \delta\Lambda] U \delta U^\dagger + [\Lambda, \delta\Lambda] V \delta V^\dagger). \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Da Λ und $\delta\Lambda$ diagonal sind, verschwinden die Kommutatoren, und indem wir die Variationen von U und V durch hermitesche Matrizen

$$u = iU\delta U^\dagger = -i\delta U U^\dagger, \quad v = iV\delta V^\dagger = -i\delta V V^\dagger \tag{4.1.18}$$

parametrisieren, ergibt sich

$$\begin{aligned} |\delta\phi|^2 &= \mathrm{tr}\,(\delta\Lambda\delta\Lambda + u^2\Lambda^2 + v^2\Lambda^2 - 2v\Lambda u\Lambda) \\ &= \sum_i (\delta\lambda_i)^2 + \sum_{ij} (u_{ij}u_{ji}\lambda_i^2 + v_{ij}v_{ji}\lambda_i^2 - 2v_{ij}\lambda_j u_{ji}\lambda_i). \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

In der Doppelsumme hängen die $i = j$–Terme nur von der Differenz $u_{ii} - v_{ii}$ ab, so daß die $2N^2$ unabhängigen Variablen der Variation durch $\delta\lambda_i$, $u_{ii} - v_{ii}$, $\mathrm{Re}\,u_{ij}$, $\mathrm{Im}\,u_{ij}$, $\mathrm{Re}\,v_{ij}$ und $\mathrm{Im}\,v_{ij}$ $(i < j)$ gegeben sind:

$$\begin{aligned} |\delta\phi|^2 = &\sum_i (\delta\lambda_i)^2 + \sum_i (u_{ii} - v_{ii})^2\lambda_i^2 + \sum_{ij} (\mathrm{Re}\,{u_{ij}}^2 + \mathrm{Im}\,{u_{ij}}^2 + \mathrm{Re}\,{v_{ij}}^2 + \mathrm{Im}\,{v_{ij}}^2)(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) \\ &-4\sum_{ij} (\mathrm{Re}\,u_{ij}\,\mathrm{Re}\,v_{ij} + \mathrm{Im}\,u_{ij}\,\mathrm{Im}\,v_{ij})\lambda_i\lambda_j. \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Für die Determinante der Metrik auf dem Tangentialraum erhält man so

$$g = \prod_i \lambda_i^2 \prod_{i<j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2 \tag{4.1.21}$$

und als deren Wurzel die Jacobideterminante der Transformation.

In der Eigenwertformulierung erhalten wir damit für die freie Energie des komplexen Matrixmodells

$$\begin{aligned} Z &= \tilde{c}_N \int_0^\infty \prod_i d\lambda_i \prod_i \lambda_i \prod_{i<j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2 \exp\Big[-N\sum_i V(\lambda_i^2)\Big] \\ &= c_n \int_0^\infty \prod_i d\mu_i \prod_{i<j} (\mu_i - \mu_j)^2 \exp\Big[-N\sum_i V(\mu_i)\Big] \quad \text{mit} \quad \mu = \sqrt{\lambda} \\ &= c_n \int_0^\infty \prod_i d\mu_i \exp\Big[-N\sum_i V(\mu_i) + \sum_{i\neq j} \ln|\mu_i - \mu_j|\Big]. \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

Die Darstellung in der letzten Zeile entspricht nun gerade der des HMM mit der zusätzlichen Beschränkung der Eigenwerte auf $\mathbb{R}^+$ und ist im folgenden immer gemeint, wenn von der Eigenwertformulierung des CMM gesprochen wird. Unsere Formulierung unterscheidet sich insofern von der in [15], daß wir die Eigenwerte von $\phi^\dagger\phi$ als λ und nicht als λ^2 bezeichnen und führt später auch zu etwas anderen Loop Gleichungen; sie macht aber auf der Ebene der Eigenwerte den Vergleich zum HMM besonders einfach.

Die Eigenwertdichte des komplexen Matrixmodells ist daher definiert als

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{tr}\,\delta(\lambda - \phi^\dagger\phi)\right\rangle = \frac{1}{N}\Big\langle \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i)\Big\rangle \tag{4.1.23}$$

und steht in folgendem Zusammenhang mit dem 1–Loop Korrelator

$$W(p) = \int_0^\infty d\lambda\, \frac{\rho(\lambda)}{p - \lambda}, \tag{4.1.24}$$

so daß die 1–Punkt Amplituden auch durch die Momente der Eigenwertdichte gegeben sind

$$\frac{1}{N}\Big\langle \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^n \Big\rangle = \int_0^\infty d\lambda\, \rho(\lambda)\lambda^n. \tag{4.1.25}$$

Dabei ist mit Rückblick auf Kapitel III zu beachten, daß zwar die Momente der Eigenwertdichte eine topologische Entwicklung besitzen, nicht aber die Eigenwertdichte selbst.

Virasoro-Constraints und Loop–Gleichung

Die Zustandssumme ist offensichtlich nicht nur unter den eben beschriebenen $U(N)$–Transformationen, sondern auch unter allgemeinen Feldredefinitionen der Matrixvariablen invariant. Diese Invarianz führt zu Identitäten zwischen Erwartungswerten, den sog. Schwinger–Dyson Gleichungen der Theorie. Um diese in kompakter Form darzustellen, betrachten wir die Transformation:

$$\phi \to \phi(1+\varepsilon\frac{1}{p - \phi^\dagger\phi}) = \phi(1+\varepsilon\sum_{k=0}\frac{(\phi^\dagger\phi)^k}{p^{k+1}}),\ \phi^\dagger \to (1+\varepsilon\frac{1}{p - \phi^\dagger\phi})\phi^\dagger = (1+\varepsilon\sum_{k=0}\frac{(\phi^\dagger\phi)^k}{p^{k+1}})\phi^\dagger. \tag{4.1.26}$$

Das Potential und das Maß gehen darunter in

$$V(\phi^\dagger\phi) \to V(\phi^\dagger\phi) + V'(\phi^\dagger\phi)2\varepsilon\frac{\phi^\dagger\phi}{p - \phi^\dagger\phi} + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{4.1.27}$$

und

$$d\phi^\dagger d\phi \to d\phi^\dagger d\phi (1 + 2\varepsilon p (\mathrm{tr}\, \frac{1}{p - \phi^\dagger \phi})^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{4.1.28}$$

über, so daß sich in erster Ordnung in ε aus der Invarianz der Zustandssumme

$$p \Big\langle (\mathrm{tr}\, \frac{1}{p - \phi^\dagger \phi})^2 \Big\rangle - N \Big\langle \mathrm{tr}\, V'(\phi^\dagger \phi) \frac{\phi^\dagger \phi}{p - \phi^\dagger \phi} \Big\rangle = 0 \tag{4.1.29}$$

ergibt. Mit $\langle (\mathrm{tr}\, A)^2 \rangle = \langle (\mathrm{tr}\, A)^2 \rangle_c + \langle \mathrm{tr}\, A \rangle^2$ und der Definition der Loop Korrelatoren erhalten wir so

$$\frac{1}{N^2} W(p,p) + W^2(p) - \frac{1}{N} \Big\langle \mathrm{tr}\, V'(\phi^\dagger \phi) \frac{1}{p} \frac{\phi^\dagger \phi}{p - \phi^\dagger \phi} \Big\rangle = 0. \tag{4.1.30}$$

Die Schwinger–Dyson Gleichungen für die Loop Amplituden ergeben sich durch die asymptotische Entwicklung von Gl. (4.1.29) nach $1/p$,

$$\frac{1}{p} \sum_{n=0} \frac{1}{p^n} \Big(\sum_{l=0}^{n} \langle \mathrm{tr}\, (\phi^\dagger \phi)^l \mathrm{tr}\, (\phi^\dagger \phi)^{n-l} \rangle - N \sum_{k=1}^{\infty} g_k \, \langle \mathrm{tr}\, (\phi^\dagger \phi)^{n+k} \rangle \Big) = 0, \tag{4.1.31}$$

wobei die Terme der Ordnung p^{-n} der Invarianz der Zustandssumme unter der Transformation

$$\phi \to \phi (1 + \varepsilon (\phi^\dagger \phi)^n), \quad \phi^\dagger \to (1 + \varepsilon (\phi^\dagger \phi)^n) \phi^\dagger \tag{4.1.32}$$

entsprechen. Sie lassen sich mit Hilfe von Differentialoperatoren nach den Kopplungskonstanten g_k darstellen als

$$L_n Z = 0, \quad L_n = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \partial_{g_{k+n}} + \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{n} \partial_{g_k} \partial_{g_{n-k}}, \quad n \geq 0. \tag{4.1.33}$$

Diese bilden eine Unteralgebra der Virasoro–Algebra ohne zentrale Erweiterung

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n}, \quad m, n \geq 0. \tag{4.1.34}$$

Im Gegensatz zum HMM gibt es hier *nicht* den Constraint $L_{-1} Z = 0$, da das komplexe Matrixmodell nicht invariant unter einer Translation der Matrixvariablen ist, was in der Formulierung als Eigenwertmodell offensichtlich ist.

Die Virasoro Constraints der Zustandssumme besitzen damit eine kompakte Darstellung durch Gl. (4.1.30), deren letzter Term sich noch mit Hilfe der Eigenwertdichte in

$$\frac{1}{N} \Big\langle \mathrm{tr}\, V'(\phi^\dagger \phi) \frac{\phi^\dagger \phi}{p - \phi^\dagger \phi} \Big\rangle = \int_0^\infty d\lambda \, \rho(\lambda) \frac{1}{p} \frac{\lambda}{p - \lambda} V'(\lambda) = \int_0^\infty d\lambda \, \rho(\lambda) \frac{1}{p} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{1}{\omega - \lambda} \frac{\omega}{p - \omega} V'(\omega) \tag{4.1.35}$$

umschreiben läßt, wobei p außerhalb der Integrationskontur um den Träger der Eigenwertdichte liegt. Vertauschen der Integrationen liefert mit Gl. (4.1.24)

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega}{p} \frac{V'(\omega)}{p - \omega} W(\omega) \tag{4.1.36}$$

und wir erhalten die Loop-Gleichung des komplexen Matrixmodells [26]:

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega}{p} \frac{V'(\omega)}{p - \omega} W(\omega) = W^2(p) + \frac{1}{N^2} W(p,p). \tag{4.1.37}$$

Einsetzen der Genus–Entwicklung für die Loop–Korrelatoren Gl. (4.1.8) führt auf

$$\Big\{ \hat{K}^C - 2 W_0(p) \Big\} W_g(p) = \sum_{g'=1}^{g-1} W_{g'}(p) W_{g-g'}(p) + \frac{d}{dV(p)} W_{g-1}(p), \quad g \geq 1 \tag{4.1.38}$$

mit dem linearen Operator

$$\hat{K}^C f(p) = \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega}{p} \frac{V'(\omega)}{p - \omega} f(\omega). \tag{4.1.39}$$

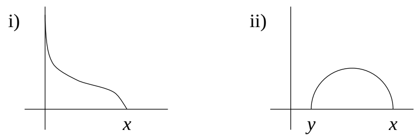
Diese Gleichung ist der Ausgangspunkt für die iterative Lösung des komplexen Matrixmodells, da die rechte Seite nur von Loop–Korrelatoren $W_{g'}(p)$ mit $g' < g$ abhängt. Um mit der Iteration beginnen zu können, muß zunächst die planare Loop–Gleichung gelöst werden (d.h. unter Vernachlässigung des $1/N^2$–Terms in Gl. (4.1.37)).

2. Planare Lösung der Loop-Gleichung

Wir interessieren uns hier nur für „Einbandlösungen“ des komplexen Matrixmodells, bei denen der Träger der Eigenwertdichte σ im Limes $N \to \infty$ auf *ein* Intervall beschränkt ist (was natürlich nur für bestimmte Regionen der Kopplungskonstanten möglich sein wird). Dabei gibt es zwei qualitativ verschiedene Lösungen, je nachdem, ob der Träger der Eigenwertdichte bei $\lambda = 0$ anfängt oder nicht.

i) $\sigma = [0, x]$

ii) $\sigma = [y, x]$ mit $0 < y < x$



Im ersten Fall verschwindet die Eigenwertdichte dabei bei $\lambda = 0$ nicht, sondern besitzt dort für generische Kopplungen eine Wurzelsingularität.

i) $\sigma = [0, x]$:

Die Lösung der planaren Loop–Gleichung

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega}{p} \frac{V'(\omega)}{p-\omega} W_0(\omega) = W_0^2(p) \tag{4.2.1}$$

ist gegeben durch

$$W_0(p) = \frac{1}{2} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p-\omega} \frac{\omega}{p} \frac{\sqrt{p(p-x)}}{\sqrt{\omega(\omega-x)}}, \tag{4.2.2}$$

wobei der Endpunkt x durch das asymptotische Verhalten von $W(p)$ für $p \to \infty$ bestimmt ist:

$$\lim_{p\to\infty} W(p) \sim \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega V'(\omega)}{\sqrt{\omega(\omega-x)}} = 2. \tag{4.2.3}$$

Setzen wir die Lösung auf der rechten Seite der planaren Loop–Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
W_0^2(p) &= \frac{1}{2} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega}{p} \frac{V'(\omega)}{p-\omega} \frac{\sqrt{p(p-x)}}{\sqrt{\omega(\omega-x)}} \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{z}{p} \frac{V'(z)}{p-z} \frac{\sqrt{p(p-x)}}{\sqrt{z(z-x)}} \\
&= \frac{1}{4} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{V'(\omega)V'(z)}{(p-\omega)(p-z)} \frac{\omega z}{p} \frac{p-x}{\sqrt{\omega(\omega-x)}\sqrt{z(z-x)}} \\
&= \frac{1}{2} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{z}{p} \frac{V'(z)}{p-z} \frac{1}{\sqrt{z(z-x)}} + \frac{1}{4} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{V'(\omega)V'(z)}{(p-\omega)(p-z)} \frac{\omega z}{p} \frac{\omega-x}{\sqrt{\omega(\omega-x)}\sqrt{z(z-x)}},
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

wobei $p - x = p - \omega + \omega - x$ und Gl. (4.2.3) verwendet wurde. Mit

$$\frac{1}{p-\omega} \frac{1}{p-z} = \frac{1}{\omega - z} \left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p-z} \right), \tag{4.2.5}$$

wobei ω außerhalb der z–Kontur liege und der Umbenennung $\omega \leftrightarrow z$ ergibt sich für den zweiten Term (das Vertauschen der Integrationswege liefert keinen Beitrag)

$$\frac{1}{4} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{V'(\omega)V'(z)}{(\omega-z)(p-\omega)} \frac{\omega z}{p} \frac{\omega - x + z - x}{\sqrt{\omega(\omega-x)}\sqrt{z(z-x)}} \tag{4.2.6}$$

und wiederum mit $z - x = z - \omega + \omega - x$ und Gl. (4.2.3)

$$\frac{1}{2} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{V'(\omega)V'(z)}{(\omega-z)(p-\omega)} \frac{\omega z}{p} - \frac{1}{2} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega}{p} \frac{V'(\omega)}{p-\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega(\omega-x)}}. \tag{4.2.7}$$

Der erste Term ist gerade $\hat{K}^C W_0(p)$ und der zweite hebt sich gegen den ersten aus Gl. (4.2.4) weg.

Die iterative Lösung des Matrixmodells mit der Momentenmethode beruht darauf, das Modell statt durch die Kopplungskonstanten g_k durch zwei Sätze von Momenten N_k und I_k bezüglich der beiden Endpunkte 0 und x zu parametrisieren [16]:

$$N_k = \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega V'(\omega)}{w^{k+1}\sqrt{\omega(\omega-x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{k+n+1} c_{n,0} x^n, \qquad k \geq 0, \tag{4.2.8}$$

$$I_k = \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega V'(\omega)}{(w-x)^k \sqrt{\omega(\omega-x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{k+n} c_{n,k} x^n, \qquad k \geq 1, \tag{4.2.9}$$

mit

$$c_{n,k} = \frac{(2n+2k-1)!!}{(2n)!!(2k-1)!!}. \tag{4.2.10}$$

Durch Deformation der Kontur in Gl.(4.2.2) läßt sich der planare 1–Loop Korrelator darstellen als

$$W_0(p) = \frac{1}{2} V'(p) - \frac{1}{2} M(p) \frac{\sqrt{p(p-x)}}{p} \tag{4.2.11}$$

mit

$$M(p) = \oint_\infty \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\omega V'(\omega)}{p-\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega(\omega-x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n N_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p-x)^{n-1} I_n, \tag{4.2.12}$$

einem Polynom vom Grad $k-1$, wenn das Potential vom Grad k ist. Für die planare Eigenwertdichte folgt dann mit Gl. (4.1.24)

$$\rho_0(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} (W_0(\lambda + i0) - W_0(\lambda - i0)) = \frac{1}{2\pi} M(\lambda) \frac{\sqrt{x-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}. \tag{4.2.13}$$

ii) $\sigma = [y, x]$ mit $0 < y < x$:

In diesem Fall ist die Lösung der (nicht–planaren) Loop–Gleichung durch die Lösung des hermiteschen Matrixmodells [16] mit Potential $V(M)$ gegeben:

Der Loop–Korrelator $W^H(p)$ löst die Loop–Gleichung des HMM

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p-\omega} W^H(\omega) = W^H(p)^2 + \frac{1}{N^2} W^H(p,p) \tag{4.2.14}$$

und genügt damit auch der Gleichung

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi i} V'(\omega) W^H(\omega) = 0. \tag{4.2.15}$$

Diese folgt aus der asymptotischen Entwicklung der Loop–Gleichung, da der Term in Ordnung $1/p$ auf der linken Seite in allen Ordnungen der topologischen Entwicklung verschwinden muß (die rechte Seite beginnt offensichtlich mit $1/p^2$). Für den Fall des komplexen Matrixmodells ergibt sich diese Bedingung dagegen nicht.

Wir sehen sofort, daß $W^H(p)$ eine Lösung der Loop–Gleichung für das CMM ist, indem wir diese schreiben als

$$\oint \frac{dw}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{p-\omega}W(\omega) - \frac{1}{p}\oint \frac{dw}{2\pi i}V'(w)W(w) = W^2(p) + \frac{1}{N^2}W(p,p). \tag{4.2.16}$$

Diese Lösung ist eindeutig, da die planaren Lösungen von Gl. (4.1.37) und Gl. (4.2.14) übereinstimmen und das Iterationsverfahren die gleiche Genusentwicklung wie für das HMM liefert.

Die planare Lösung des hermiteschen Matrixmodells lautet

$$W_0^H(p) = \frac{1}{2}\oint \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{p-\omega}\frac{\sqrt{(p-y)(p-x)}}{\sqrt{(\omega-y)(\omega-x)}}, \tag{4.2.17}$$

wobei die Endpunkte y und x durch

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{\sqrt{(\omega-y)(\omega-x)}} = 0, \quad \oint \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{\omega V'(\omega)}{\sqrt{(\omega-y)(\omega-x)}} = 2 \tag{4.2.18}$$

bestimmt sind. Wie beim CMM werden Momente bezüglich der Endpunkte eingeführt

$$M_k = \oint \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{(\omega-x)^k\sqrt{(\omega-y)(\omega-x)}}, \quad J_k = \oint \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{V'(\omega)}{(\omega-y)^k\sqrt{(\omega-y)(\omega-x)}}, \tag{4.2.19}$$

mit denen sich der 1–Loop Korrelator und die Eigenwertdichte als

$$W_0^H(p) = \frac{1}{2}V'(p) - \frac{1}{2}M(p)\sqrt{(p-y)(p-x)}, \quad \rho_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi}M(\lambda)\sqrt{(\lambda-y)(x-\lambda)} \tag{4.2.20}$$

mit

$$M(p) = \sum_{n=1}(p-x)^{n-1}M_n = \sum_{n=1}(p-y)^{n-1}J_n. \tag{4.2.21}$$

darstellen lassen.

Da die Lösung des komplexen Matrixmodells für den Fall ii) identisch zu der des hermiteschen Matrixmodells ist, werden wir im folgenden nur noch Fall i) betrachten.

3. Iterative Lösung der Loop–Gleichung

Um die Loop–Gleichung iterativ zu lösen, ist es notwendig, den auf der linken Seite von Gl. (4.1.38) stehenden Operator $\hat{K}^C - 2W_0$,

$$(\hat{K}^C - 2W_0)f(p) = \oint \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{\omega}{p}\frac{V'(\omega)}{p-\omega}\left(f(\omega) - \frac{\sqrt{p(p-x)}}{\sqrt{\omega(\omega-x)}}f(p)\right) \tag{4.3.1}$$

zu invertieren. Dies geschieht mit Hilfe von zwei Sätzen rekursiv definierter Basisfunktionen

$$Y^{(n)} = \frac{1}{N_0}\Big(\Phi_0^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1}Y^{(k)}(p)N_{n-k}\Big), \quad X^{(n)} = \frac{1}{I_1}\Big(\Phi_x^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1}X^{(k)}(p)I_{n-k+1}\Big), \quad n\geq 1 \tag{4.3.2}$$

mit

$$\Phi_0^{(n)}(p) = \frac{1}{p^n}\frac{1}{\sqrt{p(p-x)}}, \quad \Phi_x^{(n)}(p) = \frac{1}{(p-x)^n}\frac{1}{\sqrt{p(p-x)}}. \tag{4.3.3}$$

Wie sich durch Induktion leicht zeigen läßt, ergibt die Anwendung des linearen Operators

$$(\hat{K}^C - W_0(p))Y^{(n)}(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{p^n}, \quad (\hat{K}^C - W_0(p))X^{(n)}(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{(p-x)^n}, \tag{4.3.4}$$

so daß es nun möglich ist, diesen zu invertieren, indem wir durch eine Partialbruchzerlegung der rechten Seite der Loop–Gleichung (bis auf einen Faktor $1/p$) die Koeffizienten der Basisfunktionen ablesen, in die sich der Genus g 1–Loop Korrelator entwickeln läßt [15]

$$W_g(p) = \sum_{n=1}^{3g-1}\mathcal{A}_g^{(n)}X^{(n)}(p) + \sum_{n=1}^{g}\mathcal{D}_g^{(n)}Y^{(n)}(p), \tag{4.3.5}$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten $\mathcal{A}_g^{(n)}$ und $\mathcal{D}_g^{(n)}$ von den Momenten und dem Endpunkt der Eigenwertdichte x abhängen.

Der Nullmode des linearen Operators $\Phi_0^{(0)}(p) = \Phi_x^{(0)}(p) = 1/\sqrt{p(p-x)}$ kann hier nicht als Beitrag zu den höheren 1–Loop Korrelatoren auftreten, da dies dem asymptotischen Verhalten für $p\to\infty$ (cf Gl. (4.2.3)) widersprechen würde, welches auf einen nur planaren Beitrag $1/p$ führte.

Um den Loop–Einsetzungsoperator auf den planaren 1–Loop–Korrelator sowie die Momente und den Endpunkt x anzuwenden, ist es hilfreich, ihn aufzuspalten in

$$\frac{d}{dV(p)} = \frac{\partial}{\partial V(p)} + \frac{dx}{dV(p)}\frac{d}{dx} \tag{4.3.6}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial V(p)} = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{p^{j+1}}\frac{\partial}{\partial g_j}, \quad \frac{\partial V'(\omega)}{\partial V(p)} = -\frac{1}{(p-\omega)^2} = \partial_p\frac{1}{p-\omega}. \tag{4.3.7}$$

Wir erhalten damit für den Endpunkt x durch Anwendung des Loop–Einsetzungsoperators auf die definierende Gl. (4.2.3)

$$\frac{dx}{dV(p)} = \frac{x}{I_1}\Phi_x^{(1)}(p) \tag{4.3.8}$$

und für die Momente (cf. [15])

$$\frac{dN_k}{dV(p)} = -(k+\tfrac{1}{2})\frac{1}{p^{k+1}\sqrt{p(p-x)}} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{p^k(p-x)\sqrt{p(p-x)}}$$
$$-\tfrac{1}{2}\Big(\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{x^{k-l+1}}N_l - \frac{1}{x^{k+1}}I_1\Big)\frac{dx}{dV(p)}, \qquad (4.3.9)$$
$$\frac{dI_k}{dV(p)} = -k\frac{1}{(p-x)^k}\frac{1}{\sqrt{p(p-x)}} - (k+\tfrac{1}{2})\frac{x}{(p-x)^{k+1}\sqrt{p(p-x)}}$$
$$+(k+\tfrac{1}{2})I_{k+1}\frac{dx}{dV(p)}. \qquad (4.3.10)$$

Da nur der planare 1–Loop Korrelator explizit vom Potential abhängt, können wir damit für die Anwendung auf alle anderen Loop–Korrelatoren den Loop–Einsetzungsoperator schreiben als

$$\frac{d}{dV(p)} = \sum_{n=0}\frac{dN_n}{dV(p)}\frac{\partial}{\partial N_n} + \sum_{n=1}\frac{dI_n}{dV(p)}\frac{\partial}{\partial I_n} + \frac{dx}{dV(p)}\frac{\partial}{\partial x}. \qquad (4.3.11)$$

Nachdem wir nun mit Hilfe des Iterationsverfahrens den 1–Loop Korrelator für Genus g bestimmt haben, läßt sich dieser nur durch die Momente, den Endpunkt x sowie deren Ableitungen nach $V(p)$ ausdrücken, indem wir die Basisfunktionen darstellen als

$$Y^{(n)}(p) = -\frac{2}{2n-1}\frac{1}{N_0}\Big(\frac{dN_{n-1}}{dV(p)} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{x^{n-l}}\sum_{m=1}^{l}Y^{(m)}(p)N_{l-m}$$
$$+\frac{1}{2}X^{(1)}(p)\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{x^{n-l}}N_{l-1}\Big) - \frac{1}{N_0}\sum_{l=1}^{n-1}Y^{(l)}(p)N_{n-l}, \quad n\geq 1, \qquad (4.3.12)$$
$$X^{(1)}(p) = \frac{1}{x}\frac{dx}{dV(p)} = \frac{d}{dV(p)}\ln x, \qquad (4.3.13)$$
$$X^{(n)}(p) = -\frac{2}{2n-1}\frac{1}{x}\frac{1}{I_1}\Big(\frac{dI_{n-1}}{dV(p)} + (n-1)\sum_{l=1}^{n-1}I_l X^{(n-l)}(p)\Big)$$
$$-\frac{1}{I_1}\sum_{l=2}^{n-1}X^{(l)}(p)I_{n-l+1}, \quad n\geq 2. \qquad (4.3.14)$$

Alle Terme des 1–Loop Korrelators für Genus g lassen sich dann zu einer totalen Ableitung nach $V(p)$ zusammenfassen (cf. Gl. (4.1.7)) und wir können aus

$$W_g(p) = \frac{d}{dV(p)}F_g \qquad (4.3.15)$$

die freie Energie auf Genus g ablesen.

Um mit der Iteration beginnen zu können, müssen wir zunächst den planaren 2–Loop Korrelator $W_0(p,p)$ bestimmen. Die Anwendung des Loop–Einsetzungsoperators auf den planaren 1–Loop Korrelator liefert

$$W_0(p_1,p_2) = \frac{d}{dV(p_2)}W_0(p_1) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(p_1-p_2)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p_1-p_2)^2}\frac{2p_1p_2 - p_1x - p_2x}{\sqrt{p_1(p_1-x)}\sqrt{p_2(p_2-x)}} \qquad (4.3.16)$$

und geht für $p_2 \to p_1 \equiv p$ in

$$W_0(p,p) = \frac{x^2}{16p^2(p-x)^2} \qquad (4.3.17)$$

über. Für die Iteration brauchen wir den 2–Loop Operator nur für identische Argumente, was wir auch direkt und einfacher durch $\frac{d}{dV(p)}W_0(p)$ erhalten. Nach Partialbruchzerlegung lassen sich nun die Koeffizienten für den 1–Loop–Korrelator auf Genus 1 ablesen:

$$W_0(p,p) = \frac{1}{16}\frac{1}{p}\frac{1}{p} - \frac{1}{16}\frac{1}{p}\frac{1}{p-x} + \frac{x}{16}\frac{1}{p}\frac{1}{(p-x)^2}, \qquad (4.3.18)$$
$$\Rightarrow \quad W_1(p) = \frac{1}{16}Y^{(1)}(p) - \frac{1}{16}X^{(1)}(p) + \frac{x}{16}X^{(2)}(p). \qquad (4.3.19)$$

Mit Gl. (4.3.13) und den Basisfunktionen

$$Y^{(1)}(p) = \frac{d}{dV(p)}(-2\ln N_0 - \ln x), \quad X^{(2)}(p) = -\frac{2}{3}\frac{1}{x}\frac{d}{dV(p)}(\ln I_1 + \ln x) \qquad (4.3.20)$$

erhalten wir schließlich für die freie Energie auf Genus 1

$$F_1 = -\frac{1}{24}(3\ln N_0 + \ln I_1 + 4\ln x). \qquad (4.3.21)$$

Die weitere Iteration für die höheren Genera wird schnell sehr aufwendig, läßt sich aber gut mit Hilfe von Computer Algebra Programmen realisieren. Die hier angegebenen Resultate wurden mit Hilfe von *Maple* gewonnen.

Die freie Energie auf Genus $g \geq 1$ hängt dabei vom Endpunkt der Eigenwertdichte x sowie den Momenten $N_0,\ldots,N_{g-1}$ und $I_1,\ldots,I_{3g-2}$, also insgesamt $4g-2$ Momenten ab.

Die s-Loop Korrelatoren ergeben sich daraus durch s-fache Anwendung des Loop–Einsetzungsoperators, wobei mit Gln. (4.3.9) – (4.3.11) jede Anwendung ein zusätzliches I–Moment liefert, so daß $W_g(p_1,\ldots,p_s)$ von den Momenten $N_0,\ldots,N_{g-1}$ und $I_1,\ldots,I_{3g-2+s}$, d.h. insgesamt $4g-2+s$ Momenten abhängt. Letzteres gilt auch für die planaren s–Loop Korrelatoren mit $s \geq 2$.

4. Freie Energie und Loop–Korrelatoren

Wir haben den 1–Loop Korrelator und daraus die freie Energie des komplexen Matrixmodells bis Genus 5 berechnet, werden hier aber die freie Energie nur bis Genus 3 vollständig angeben und für Genus 4 und 5 lediglich die im Doppelskalenlimes relevanten Terme (cf. nächster Abschnitt). Für die Korrelatoren werden wir aufgrund ihrer größeren Komplexität nur die ersten beiden Genera betrachten.

Genusentwicklung der freien Energie

Freie Energie für Genus 1 bis 3:

$$F_1 = -\frac{1}{24}(3\ln N_0 + \ln I_1 + 4\ln x) \tag{4.4.1}$$

$$\begin{aligned} F_2 = &- \frac{35}{384}\frac{xI_4}{{I_1}^3} + \frac{29}{128}\frac{xI_3I_2}{{I_1}^4} + \frac{17}{192}\frac{I_3}{{I_1}^3} - \frac{21}{160}\frac{x{I_2}^3}{{I_1}^5} - \frac{69}{640}\frac{{I_2}^2}{{I_1}^4} - \frac{53}{640}\frac{I_2}{x{I_1}^3} \\ &- \frac{1}{64}\frac{I_2}{xN_0{I_1}^2} + \frac{3}{128}\frac{N_1}{x{N_0}^3} - \frac{3}{64}\frac{1}{x^2{N_0}^2} - \frac{53}{960}\frac{1}{x^2{I_1}^2} - \frac{1}{32}\frac{1}{x^2N_0I_1} \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

$$\begin{aligned} F_3 = &- \frac{5005}{3072}\frac{x^2I_7}{{I_1}^5} + \frac{5929}{1024}\frac{x^2I_6I_2}{{I_1}^6} + \frac{539}{3072}\frac{xI_6}{{I_1}^5} + \frac{2515}{512}\frac{x^2I_5I_3}{{I_1}^6} - \frac{3213}{256}\frac{x^2I_5{I_2}^2}{{I_1}^7} \\ &- \frac{93}{128}\frac{xI_5I_2}{{I_1}^6} - \frac{205}{1024}\frac{I_5}{{I_1}^5} - \frac{105}{1024}\frac{I_5}{N_0{I_1}^4} + \frac{21245}{9216}\frac{x^2{I_4}^2}{{I_1}^6} - \frac{5605}{256}\frac{x^2I_4I_3I_2}{{I_1}^7} \\ &+ \frac{5565}{256}\frac{I_4{I_2}^3}{{I_1}^8} - \frac{3625}{4608}\frac{xI_4I_3}{{I_1}^6} + \frac{255}{128}\frac{xI_4{I_2}^2}{{I_1}^7} + \frac{3035}{3072}\frac{I_4I_2}{{I_1}^6} + \frac{77}{256}\frac{I_4I_2}{N_0{I_1}^5} \\ &+ \frac{2995}{9216}\frac{I_4}{x{I_1}^5} + \frac{91}{1024}\frac{I_4}{xN_0{I_1}^4} - \frac{72875}{21504}\frac{x^2{I_3}^3}{{I_1}^7} + \frac{15375}{512}\frac{x^2{I_3}^2{I_2}^2}{{I_1}^8} - \frac{8685}{256}\frac{x^2I_3{I_2}^4}{{I_1}^9} \\ &+ \frac{14615}{7168}\frac{x{I_3}^2I_2}{{I_1}^7} - \frac{1095}{256}\frac{xI_3{I_2}^3}{{I_1}^8} + \frac{30035}{64512}\frac{{I_3}^2}{{I_1}^6} + \frac{145}{1024}\frac{{I_3}^2}{N_0{I_1}^5} - \frac{19575}{7168}\frac{I_3{I_2}^2}{{I_1}^7} \\ &- \frac{75}{128}\frac{I_3{I_2}^2}{N_0{I_1}^6} - \frac{14975}{10752}\frac{I_3I_2}{x{I_1}^6} - \frac{149}{512}\frac{I_3I_2}{xN_0{I_1}^5} - \frac{2995}{8064}\frac{I_3}{x^2{I_1}^5} - \frac{45}{1024}\frac{I_3}{x^2{N_0}^2{I_1}^3} \\ &- \frac{29}{256}\frac{I_3}{x^2N_0{I_1}^4} + \frac{2205}{256}\frac{x^2{I_2}^6}{{I_1}^{10}} + \frac{405}{256}\frac{x{I_2}^5}{{I_1}^9} + \frac{765}{512}\frac{{I_2}^4}{{I_1}^8} + \frac{63}{256}\frac{{I_2}^4}{N_0{I_1}^7} + \frac{8985}{7168}\frac{{I_2}^3}{x{I_1}^7} \\ &+ \frac{27}{128}\frac{{I_2}^3}{xN_0{I_1}^6} + \frac{2995}{3584}\frac{{I_2}^2}{x^2{I_1}^6} + \frac{55}{1024}\frac{{I_2}^2}{x^2{N_0}^2{I_1}^4} + \frac{201}{1024}\frac{{I_2}^2}{x^2N_0{I_1}^5} + \frac{599}{1344}\frac{I_2}{x^3{I_1}^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{9}{512}\frac{I_2}{x^3{N_0}^3{I_1}^2} + \frac{85}{1024}\frac{I_2}{x^3{N_0}^2{I_1}^3} + \frac{19}{128}\frac{I_2}{x^3N_0{I_1}^4} - \frac{45}{1024}\frac{N_2}{x^2{N_0}^5} + \frac{63}{1024}\frac{{N_1}^2}{x^2{N_0}^6} \\ &- \frac{9}{1024}\frac{N_1I_2}{x^2{N_0}^4{I_1}^2} - \frac{117}{1024}\frac{N_1}{x^3{N_0}^5} - \frac{9}{512}\frac{N_1}{x^3{N_0}^4I_1} + \frac{599}{4032}\frac{1}{x^4{I_1}^4} + \frac{19}{256}\frac{1}{x^4N_0{I_1}^3} \\ &+ \frac{85}{1024}\frac{1}{x^4{N_0}^2{I_1}^2} + \frac{45}{512}\frac{1}{x^4{N_0}^3I_1} + \frac{117}{1024}\frac{1}{x^4{N_0}^4} \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Und nun die im Doppelskalenlimes relevanten Terme für Genus 4 und 5:

$$\begin{aligned} F_4 = &- \frac{8083075\,x^3I_{10}}{98304\,{I_1}^7} + \frac{12677665\,x^3I_9I_2}{32768\,{I_1}^8} + \frac{10156575\,x^3I_8I_3}{32768\,{I_1}^8} - \frac{4297293\,x^3I_8{I_2}^2}{4096\,{I_1}^9} \\ &+ \frac{8913905\,x^3I_7I_4}{32768\,{I_1}^8} - \frac{6968247\,x^3I_7I_3I_2}{4096\,{I_1}^9} + \frac{44207163\,x^3I_7{I_2}^3}{20480\,{I_1}^{10}} + \frac{8437275\,x^3I_6I_5}{32768\,{I_1}^8} \\ &- \frac{6242775\,x^3I_6I_4I_2}{4096\,{I_1}^9} - \frac{11532675\,x^3I_6{I_3}^2}{16384\,{I_1}^9} + \frac{5472621\,x^3I_6I_3{I_2}^2}{1024\,{I_1}^{10}} - \frac{15411627\,x^3I_6{I_2}^4}{4096\,{I_1}^{11}} \\ &- \frac{1511055\,x^3{I_5}^2I_2}{2048\,{I_1}^9} - \frac{2642325\,x^3I_5I_4I_3}{2048\,{I_1}^9} + \frac{10050831\,x^3I_5I_4{I_2}^2}{2048\,{I_1}^{10}} + \frac{578655\,x^3I_5{I_3}^2I_2}{128\,{I_1}^{10}} \\ &- \frac{13024935\,x^3I_5I_3{I_2}^3}{1024\,{I_1}^{11}} + \frac{12093543\,x^3I_5{I_2}^5}{2048\,{I_1}^{12}} - \frac{7503125\,x^3{I_4}^3}{36864\,{I_1}^9} + \frac{17562825\,x^3{I_4}^2I_3I_2}{4096\,{I_1}^{10}} \\ &- \frac{12367845\,x^3{I_4}^2{I_2}^3}{2048\,{I_1}^{11}} + \frac{32418925\,x^3I_4{I_3}^3}{24576\,{I_1}^{10}} - \frac{68294625\,x^3I_4{I_3}^2{I_2}^2}{4096\,{I_1}^{11}} \\ &+ \frac{26413065\,x^3I_4I_3{I_2}^4}{1024\,{I_1}^{12}} - \frac{4456305\,x^3I_4{I_2}^6}{512\,{I_1}^{13}} - \frac{83895625\,x^3{I_3}^4I_2}{32768\,{I_1}^{11}} \\ &+ \frac{16200375\,x^3{I_3}^3{I_2}^3}{1024\,{I_1}^{12}} - \frac{98342775\,x^3{I_3}^2{I_2}^5}{4096\,{I_1}^{13}} + \frac{12829887\,x^3I_3{I_2}^7}{1024\,{I_1}^{14}} \\ &- \frac{21023793\,x^3{I_2}^9}{10240\,{I_1}^{15}} + \ldots \quad + \frac{2407\,{N_1}^3}{4096\,x^3{N_0}^9} + \ldots \\ &\text{(insgesamt 208 Terme)} \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

$$\begin{aligned} F_5 = &- \frac{6506875375\,x^4I_{13}}{786432\,{I_1}^9} + \frac{12753475735\,x^4I_{12}I_2}{262144\,{I_1}^{10}} + \frac{2481504025\,x^4I_{11}I_3}{65536\,{I_1}^{10}} \\ &- \frac{5234922693\,x^4I_{11}{I_2}^2}{32768\,{I_1}^{11}} + \frac{2109682575\,x^4I_{10}I_4}{65536\,{I_1}^{10}} - \frac{8203397345\,x^4I_{10}I_3I_2}{32768\,{I_1}^{11}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{12688164489\,x^4 I_{10} I_2^{\,3}}{32768\,I_1^{\,12}}+\frac{1909423425\,x^4 I_9 I_5}{65536\,I_1^{\,10}}-\frac{7044102065\,x^4 I_9 I_4 I_2}{32768\,I_1^{\,11}}\\
&-\frac{12983424025\,x^4 I_9 I_3^{\,2}}{131072\,I_1^{\,11}}+\frac{30087162105\,x^4 I_9 I_3 I_2^{\,2}}{32768\,I_1^{\,12}}-\frac{25370560215\,x^4 I_9 I_2^{\,4}}{32768\,I_1^{\,13}}\\
&+\frac{3611933325\,x^4 I_8 I_6}{131072\,I_1^{\,10}}-\frac{3222490635\,x^4 I_8 I_5 I_2}{16384\,I_1^{\,11}}-\frac{5635204575\,x^4 I_8 I_4 I_3}{32768\,I_1^{\,11}}\\
&+\frac{26135514405\,x^4 I_8 I_4 I_2^{\,2}}{32768\,I_1^{\,12}}+\frac{24057537075\,x^4 I_8 I_3^{\,2} I_2}{32768\,I_1^{\,12}}-\frac{10137152025\,x^4 I_8 I_3 I_2^{\,3}}{4096\,I_1^{\,13}}\\
&+\frac{5553643095\,x^4 I_8 I_2^{\,5}}{4096\,I_1^{\,14}}+\frac{3545717175\,x^4 I_7^{\,2}}{262144\,I_1^{\,10}}-\frac{12359275929\,x^4 I_7 I_6 I_2}{65536\,I_1^{\,11}}\\
&-\frac{5226845715\,x^4 I_7 I_5 I_3}{32768\,I_1^{\,11}}+\frac{24241354137\,x^4 I_7 I_5 I_2^{\,2}}{32768\,I_1^{\,12}}-\frac{4958959005\,x^4 I_7 I_4^{\,2}}{65536\,I_1^{\,11}}\\
&+\frac{42370573245\,x^4 I_7 I_4 I_3 I_2}{32768\,I_1^{\,12}}-\frac{17861648805\,x^4 I_7 I_4 I_2^{\,3}}{8192\,I_1^{\,13}}+\frac{26018510375\,x^4 I_7 I_3^{\,3}}{131072\,I_1^{\,12}}\\
&-\frac{98590152375\,x^4 I_7 I_3^{\,2} I_2^{\,2}}{32768\,I_1^{\,13}}+\frac{179984279475\,x^4 I_7 I_3 I_2^{\,4}}{32768\,I_1^{\,14}}-\frac{35383072725\,x^4 I_7 I_2^{\,6}}{16384\,I_1^{\,15}}\\
&-\frac{20420786925\,x^4 I_6^{\,2} I_3}{262144\,I_1^{\,11}}+\frac{47335422519\,x^4 I_6^{\,2} I_2^{\,2}}{131072\,I_1^{\,12}}-\frac{4685481675\,x^4 I_6 I_5 I_4}{32768\,I_1^{\,11}}\\
&+\frac{20008618245\,x^4 I_6 I_5 I_3 I_2}{16384\,I_1^{\,12}}-\frac{33732646101\,x^4 I_6 I_5 I_2^{\,3}}{16384\,I_1^{\,13}}+\frac{37992975405\,x^4 I_6 I_4^{\,2} I_2}{65536\,I_1^{\,12}}\\
&+\frac{69991007625\,x^4 I_6 I_4 I_3^{\,2}}{131072\,I_1^{\,12}}-\frac{176853471795\,x^4 I_6 I_4 I_3 I_2^{\,2}}{32768\,I_1^{\,13}}+\frac{161462697165\,x^4 I_6 I_4 I_2^{\,4}}{32768\,I_1^{\,14}}\\
&-\frac{217019504625\,x^4 I_6 I_3^{\,3} I_2}{131072\,I_1^{\,13}}+\frac{37121844375\,x^4 I_6 I_3^{\,2} I_2^{\,3}}{4096\,I_1^{\,14}}-\frac{350207643555\,x^4 I_6 I_3 I_2^{\,5}}{32768\,I_1^{\,15}}\\
&+\frac{52671571029\,x^4 I_6 I_2^{\,7}}{16384\,I_1^{\,16}}-\frac{4154848425\,x^4 I_5^{\,3}}{180224\,I_1^{\,11}}+\frac{9188135775\,x^4 I_5^{\,2} I_4 I_2}{16384\,I_1^{\,12}}\\
&+\frac{8459871525\,x^4 I_5^{\,2} I_3^{\,2}}{32768\,I_1^{\,12}}-\frac{1336297095\,x^4 I_5^{\,2} I_3 I_2^{\,2}}{512\,I_1^{\,13}}+\frac{19518799797\,x^4 I_5^{\,2} I_2^{\,4}}{8192\,I_1^{\,14}}\\
&+\frac{16063796175\,x^4 I_5 I_4^{\,2} I_3}{32768\,I_1^{\,12}}-\frac{20308307985\,x^4 I_5 I_4^{\,2} I_2^{\,2}}{8192\,I_1^{\,13}}-\frac{74747945475\,x^4 I_5 I_4 I_3^{\,2} I_2}{16384\,I_1^{\,13}}\\
&+\frac{136426972815\,x^4 I_5 I_4 I_3 I_2^{\,3}}{8192\,I_1^{\,14}}-\frac{40226430195\,x^4 I_5 I_4 I_2^{\,5}}{4096\,I_1^{\,15}}-\frac{91746650625\,x^4 I_5 I_3^{\,4}}{262144\,I_1^{\,13}}\\
&+\frac{250975486125\,x^4 I_5 I_3^{\,3} I_2^{\,2}}{32768\,I_1^{\,14}}-\frac{739690835625\,x^4 I_5 I_3^{\,2} I_2^{\,4}}{32768\,I_1^{\,15}}+\frac{9732778965\,x^4 I_5 I_3 I_2^{\,6}}{512\,I_1^{\,16}}\\
&-\frac{74926833597\,x^4 I_5 I_2^{\,8}}{16384\,I_1^{\,17}}+\frac{5081656475\,x^4 I_4^{\,4}}{131072\,I_1^{\,12}}-\frac{11830867475\,x^4 I_4^{\,3} I_3 I_2}{8192\,I_1^{\,13}}\\
&+\frac{21601719825\,x^4 I_4^{\,3} I_2^{\,3}}{8192\,I_1^{\,14}}-\frac{21786582125\,x^4 I_4^{\,2} I_3^{\,3}}{32768\,I_1^{\,13}}+\frac{357630901425\,x^4 I_4^{\,2} I_3^{\,2} I_2^{\,2}}{32768\,I_1^{\,14}}\\
&-\frac{10981859175\,x^4 I_4^{\,2} I_3 I_2^{\,4}}{512\,I_1^{\,15}}+\frac{147985547535\,x^4 I_4^{\,2} I_2^{\,6}}{16384\,I_1^{\,16}}+\frac{877489930625\,x^4 I_4 I_3^{\,4} I_2}{262144\,I_1^{\,14}}\\
&-\frac{861719557125\,x^4 I_4 I_3^{\,3} I_2^{\,3}}{32768\,I_1^{\,15}}+\frac{1632433564125\,x^4 I_4 I_3^{\,2} I_2^{\,5}}{32768\,I_1^{\,16}}-\frac{261787425795\,x^4 I_4 I_3 I_2^{\,7}}{8192\,I_1^{\,17}}\\
&+\frac{104068152405\,x^4 I_4 I_2^{\,9}}{16384\,I_1^{\,18}}+\frac{26915796875\,x^4 I_3^{\,6}}{262144\,I_1^{\,14}}-\frac{951059690625\,x^4 I_3^{\,5} I_2^{\,2}}{262144\,I_1^{\,15}}\\
&+\frac{625336273125\,x^4 I_3^{\,4} I_2^{\,4}}{32768\,I_1^{\,16}}-\frac{1122904568025\,x^4 I_3^{\,3} I_2^{\,6}}{32768\,I_1^{\,17}}+\frac{430379379675\,x^4 I_3^{\,2} I_2^{\,8}}{16384\,I_1^{\,18}}\\
&-\frac{144886833945\,x^4 I_3 I_2^{\,10}}{16384\,I_1^{\,19}}+\frac{8775042255\,x^4 I_2^{\,12}}{8192\,I_1^{\,20}}+\ldots\\
&+\frac{1608657\,N_1^{\,4}}{131072\,x^4 N_0^{\,12}}+\ldots
\end{aligned}
$$

(insgesamt 695 Terme) (4.4.5)

Genusentwicklung der Korrelatoren

Wie wir gesehen haben, werden bei der iterativen Lösung der Loopgleichung die 1–Loop Korrelatoren sukzessive berechnet, aus denen sich die s–Loop Korrelatoren dann durch Anwendung des Loop–Einsetzungsoperators ergeben.

Die planaren 1– und 2–Loop Korrelatoren hatten wir schon in Abschnitt 2 und 3 angegeben,

$$W_0(p_1)=\frac{1}{2}V'(p_1)-\frac{1}{2}M(p_1)\frac{\sqrt{p_1(p_1-x)}}{p_1}, \qquad (4.4.6)$$

$$W_0(p_1,p_2) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(p_1-p_2)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p_1-p_2)^2}\frac{2p_1p_2 - p_1x - p_2x}{\sqrt{p_1(p_1-x)}\sqrt{p_2(p_2-x)}}, \qquad (4.4.7)$$

wobei der 2–Loop Korrelator ein universelles Verhalten zeigt, indem er von den Kopplungskonstanten nur über den Endpunkt x der Eigenwertdichte abhängt. Aus der Struktur des Loop–Einsetzungsoperators in (4.3.11) folgt dann, daß der planare s–Loop Korrelator sowohl von x als auch den ersten $s-2$ I–Momenten, *nicht* aber von den N–Momenten abhängt. Für den 3–Loop Korrelator ergibt sich

$$\begin{aligned} W_0(p_1,p_2,p_3) &= \frac{d}{dV(p_3)} W_0(p_1,p_2) = \frac{dx}{dV(p_3)}\frac{d}{dx} W_0(p_1,p_2) \\ &= \frac{1}{8xI_1}\frac{x}{(p_1-x)\sqrt{p_1(p_1-x)}}\frac{x}{(p_2-x)\sqrt{p_2(p_2-x)}}\frac{x}{(p_3-x)\sqrt{p_3(p_3-x)}} \end{aligned} \qquad (4.4.8)$$

und auch für die höheren Korrelatoren läßt sich ein relativ geschlossener Ausdruck [27] angeben:

$$W_0(p_1,\ldots,p_s) = \prod_{i=3}^{s}\frac{d}{dV(p_i)} W_0(p_1,p_2) = \left(\frac{1}{I_1}\frac{d}{dx}\right)^{s-3}\left(\frac{1}{8xI_1}\prod_{i=1}^{s}\frac{x}{(p_i-x)\sqrt{p_i(p_i-x)}}\right). \qquad (4.4.9)$$

Analog zu [29] läßt sich durch Induktion zeigen, daß für eine Funktion f, die nur über den Endpunkt x von den Kopplungskonstanten abhängt, folgende Relation gilt:

$$\frac{d}{dV(p)}\left(\frac{1}{I_1}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{1}{I_1}f(x)\right) = \left(\frac{1}{I_1}\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{I_1}\frac{x}{(p-x)\sqrt{p(p-x)}}f(x)\right). \qquad (4.4.10)$$

Die nicht–planaren Korrelatoren werden schnell aufwendig, so daß wir hier nur noch als Beispiel für die allgemeine Struktur den Torus–Beitrag der 1– und 2–Loop Korrelatoren angeben. Der 1–Loop Korrelator ergibt sich dabei aus (4.3.19) zu

$$W_1(p_1) = \frac{1}{16}\frac{1}{\sqrt{p_1(p_1-x)}}\left[\frac{1}{N_0}\frac{1}{p_1} - \left(\frac{1}{I_1} + \frac{xI_2}{{I_1}^2}\right)\frac{1}{p_1-x} + \frac{x}{I_1}\frac{1}{(p_1-x)^2}\right] \qquad (4.4.11)$$

und die Anwendung des Loop–Einsetzungsoperators liefert für den 2–Loop Korrelator

$$\begin{aligned} W_1(p_1,p_2) = &\frac{1}{32}\frac{1}{\sqrt{p_1(p_1-x)}}\frac{1}{\sqrt{p_2(p_2-x)}} \times \\ &\left[\frac{1}{{N_0}^2}\frac{1}{p_1p_2} + \left(\frac{1}{N_0I_1} - \frac{2}{{I_1}^2} - \frac{3xI_2}{{I_1}^3} - \frac{5x^2I_3}{{I_1}^3} + \frac{6x^2{I_2}^2}{{I_1}^4}\right)\frac{1}{(p_1-x)(p_2-x)}\right. \\ &+\left(\frac{x}{{I_1}^2} - \frac{6x^2I_2}{{I_1}^3}\right)\left(\frac{1}{(p_1-x)(p_2-x)^2} + \frac{1}{(p_1-x)^2(p_2-x)}\right) \\ &\left.+\frac{5x^2}{{I_1}^2}\left(\frac{1}{(p_1-x)(p_2-x)^3} + \frac{1}{(p_1-x)^3(p_2-x)}\right) + \frac{3x^2}{{I_1}^2}\frac{1}{(p_1-x)^2(p_2-x)^2}\right]. \end{aligned} \qquad (4.4.12)$$

5. Der Doppelskalenlimes

Wie wir gesehen haben, besitzen die freie Energie und die Loop–Korrelatoren eine topologische Entwicklung in $1/N^2$. Im einfachen Limes $N \to \infty$ überleben daher nur die planaren Beiträge, was in Hinblick auf die Interpretation des Matrixmodells als diskretisierte Quantengravitation unbefriedigend ist, da wir hier an den Beiträgen aller Genera interessiert sind.

Betrachten wir die Struktur der freien Energie im vorigen Abschnitt, so sehen wir, daß die Beiträge der höheren Genera divergieren, wenn wir im Raum der Kopplungskonstanten zu den (kritischen) Unterräumen gehen, in denen die Momente I_1 bzw. N_0 verschwinden. Wir können somit Beiträge von allen Genera erhalten, wenn wir im Doppelskalenlimes den Limes $N \to \infty$ und das Herangehen an die kritischen Kopplungen nicht unabhängig voneinander, sondern in korrelierter Weise durchführen. Das Verschwinden weiterer höherer Momente ermöglicht dann unterschiedliches kritisches Verhalten des Modells im Doppelskalenlimes.

Multikritische Punkte und Skalierung der Momente

Aus den Gln. (4.2.12) und (4.2.13) sehen wir, daß das Verschwinden der Momente dem Entstehen von (höheren) Nullstellen an den Endpunkten der Eigenwertdichte entspricht. Wir definieren daher den (m,k)–kritischen Unterraum im Raum der Kopplungskonstanten dadurch, daß die Eigenwertdichte $m-1$ zusätzliche Nullstellen bei x und k Nullstellen bei 0 entwickelt:

$$I_1^c = \ldots = I_{m-1}^c = 0, \quad I_m^c \neq 0, \qquad N_0^c = \ldots = N_{k-1}^c = 0, \quad N_k^c \neq 0. \qquad (4.5.1)$$

Das Verhalten der Eigenwertdichte an den Endpunkten ist dann

$$\rho(\lambda) \sim (x-\lambda)^{m-1/2}, \quad \lambda \to x, \qquad \rho(\lambda) \sim \lambda^{k-1/2}, \quad \lambda \to 0. \qquad (4.5.2)$$

Wir wollen nun das Verhalten des Endpunktes der Eigenwertdichte und der Momente beim Herangehen an einen (m,k)–kritischen Punkt g_k^c betrachten. Dabei nähern wir uns dem kritischen Punkt auf einer Geraden $g_k = g g_k^c$ im Raum der Kopplungskonstanten.

Die Entwicklung der Randbedingung (4.2.3) um den Endpunkt x^c liefert mit (4.2.10)

$$g \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,0}(x-x_c)^n I_n^c = 2-2g. \tag{4.5.3}$$

Im (m,k)–kritischen Fall ist damit $(x-x_c)^m \sim 1-g$ und wir beschreiben das Herangehen an den kritischen Punkt, $g \to 1$, durch $a \to 0$ in

$$a^m \Lambda_R = (1-g) \approx \frac{1}{2} c_m g I_m^c (x-x_c)^m \quad \rightsquigarrow \quad (x-x_c) \sim a \Lambda_R^{\frac{1}{m}}, \tag{4.5.4}$$

wobei der Parameter a dem Gitterabstand und Λ_R der renormierten kosmologischen Konstante entspricht.

Die Entwicklung der I–Momente (4.2.9) um den multikritischen Punkt gibt

$$I_l = g I_l^c + g \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,l} I_{l+n}^c (x-x_c)^n, \tag{4.5.5}$$

so daß wir für ihre Skalierung im (m,k)–kritischen Fall

$$I_l \sim (a \Lambda_R^{\frac{1}{m}})^{m-l}, \quad l = 1 \dots m-1 \tag{4.5.6}$$

erhalten. Analog finden wir als Entwicklung der N–Momente (4.2.8)

$$N_l = g N_l^c + g \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n c_{n,0} x_c^{-n-l-1} (x-x_c)^n \left[\sum_{r=0}^{l} \binom{n+l-r-1}{n-1} x_c^{r+1} N_r^c + \sum_{r=1}^{n} (-)^r \binom{n+l-r}{l} x_c^r I_r^c \right] \tag{4.5.7}$$

und damit das Skalenverhalten

$$N_l \sim (a \Lambda_R^{\frac{1}{m}})^m, \quad l = 0 \dots k-1. \tag{4.5.8}$$

Zu beachten ist hierbei, daß die Skalierung der N–Momente im (m,k)–kritischen Fall *nur* von der Anzahl der sich zusätzlich bei x – nicht aber bei 0 – entwickelnden Nullstellen abhängt.

Doppelskalenlimes der freien Energie

Das Skalenverhalten der freien Energie auf Genus g in Abhängigkeit von a und Λ_R beim Herangehen an den (m,k)–kritischen Punkt erhalten wir durch Einsetzen der Beziehungen (4.5.6) und (4.5.7). Ein Doppelskalenlimes der freien Energie existiert dann, wenn die Beiträge der höheren Genera im Limes $a \to 0$ so skalieren, daß sich die topologische Entwicklung

$$N^2 F = \sum_{g=0} \frac{1}{N^{2g-2}} F_g \tag{4.5.9}$$

darstellen läßt als eine Entwicklung in G

$$N^2 F = \sum_{g=0} G^{g-1} f_g, \tag{4.5.10}$$

wobei $G^{-1} = N^2 a^\alpha$ der im Limes $N \to \infty$, $a \to 0$ festgehaltene Stringparameter ist. (Dabei treten auf Genus 0 und 1 weitere, das Skalenverhalten verletzende Terme auf.)

Mit dem aus der Liouville–Theorie bekannten Skalenverhalten der freien Energie auf Genus g mit der kosmologischen Konstanten Λ_R

$$f_g \sim \Lambda_R^{(2-\gamma_s)(1-g)} \tag{4.5.11}$$

können wir dann den kritischen Exponenten γ_s ablesen.

Das Verhalten der freien Energie für die verschiedenen (m,k)–kritischen Fälle[1] ist in der folgenden Tabelle zusammenfassend dargestellt:

(m,k)–multikritischer Punkt	G^{-1}	γ_s	dominante Terme
$(1,1)$	$N^2 a^3$	-1	N
$(1,k)$, $k>1$	kein Doppelskalenlimes		
$(m,0)$, $m \geq 2$	$N^2 a^{2m+1}$	$-1/m$	I
$(m,1)$, $m \geq 2$	$N^2 a^{3m}$	-1	N
(m,k), $m \geq 2$, $1<k<m$	kein Doppelskalenlimes		
(m,m), $m \geq 2$	$N^2 a^{2m+1}$	$-1/m$	N, I
(m,k), $m \geq 2$, $k>m$	$N^2 a^{2m+1}$	$-1/m$	I

(4.5.12)

Skalenverhalten der freien Energie des (m,k)–kritischen komplexen Matrixmodells

[1] wie es durch Betrachtung der freien Energie bis Genus 5 im Doppelskalenlimes gewonnen werden konnte.

Dabei geben die Einträge in der letzten Spalte an, von welchen Momenten die dominanten Beiträge zur freien Enerie im Doppelskalenlimes jeweils abhängen. Wir wollen nun die einzelnen Fälle im Limes $a \to 0$ genauer diskutieren:

$(1,1):\quad N_0 \sim (a\Lambda_R)$

Der dominante Beitrag zur freien Energie auf Genus g ist

$$F_g \sim \left(\frac{N_1}{x{N_0}^3}\right)^{(g-1)} \sim (a\Lambda_R)^{-3(g-1)},$$

womit sich ein Doppelskalenlimes mit kritischem Exponenten $\gamma_s = -1$ ergibt. Zu beachten ist dabei, daß die gesamte topologische Entwicklung nur von $N_1/x{N_0}^3$, nicht aber von den höheren Momenten abhängt. Die freie Energie im Doppelskalenlimes ist damit (für $g \geq 2$) gegeben durch

$$\begin{aligned} F_{g\geq 2} \sim & \frac{1}{N^4}\frac{3}{128}\left(\frac{N_1}{x{N_0}^3}\right) + \frac{1}{N^6}\frac{63}{1024}\left(\frac{N_1}{x{N_0}^3}\right)^2 + \frac{1}{N^8}\frac{2407}{4096}\left(\frac{N_1}{x{N_0}^3}\right)^3 \\ & + \frac{1}{N^{10}}\frac{1608657}{131072}\left(\frac{N_1}{x{N_0}^3}\right)^4 + \dots \, . \end{aligned} \tag{4.5.13}$$

$(1,k),\ k > 1:\quad N_0, \dots, N_{k-1} \sim (a\Lambda_R)$

Die dominanten Beiträge hängen jeweils nur von den N–Momenten ab. Für Genus $g = 2\dots k$ skaliert die freie Energie mit $F_g \sim (a\Lambda_R)^{-2(g-1)}$, auf Genus $g = k+1$ aber mit $F_g \sim (a\Lambda_R)^{-2(g-1)-1}$, so daß sich kein Doppelskalenlimes ergibt.

$(m,0),\ m \geq 2:\quad I_l \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^{m-l}, \quad l = 1\dots m-1$

Die freie Energie hängt nur von den I–Momenten ab und skaliert mit $F_g \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^{-(2m+1)(g-1)}$, so daß sich für den kritischen Exponenten $\gamma_s = -1/m$ ergibt. Die potentiell (d.h. in Abhängigkeit von m) dominanten Beiträge auf Genus g sind dabei gerade jene, die proportional zu x^{g-1} sind; diese haben wir auch für Genus 4 und 5 angegeben.

Die freie Energie im Doppelskalenlimes hier entspricht (wie in [16] gezeigt) exakt der des m–kritischen hermiteschen Matrixmodell mit $I_k = d_c^{-k+1} M_k$, wobei M_k die entsprechenden Momente und $d_c = x_c - y_c$ die Länge des Trägers der Eigenwertdichte sind.

$(m,1),\ m \geq 2:\quad N_0 \sim (a\Lambda_R), \quad I_l \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^{m-l}, \quad l = 1\dots m-1$

Die freie Energie ist mit der Ersetzung von $G^{-1} = N^2 a^3$ durch $G^{-1} = N^2 a^{3m}$ identisch zu der im $(1,1)$–kritischen Fall, so daß sich hier ebenfalls $\gamma_s = -1$ ergibt.

$(m,k<m),\ m \geq 2:\quad N_0, \dots, N_{k-1} \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^m, \quad I_l \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^{m-l}, \quad l = 1\dots m$

Für Genus $g = 2\dots k$ skaliert die freie Energie wie im $(m,0)$–Fall , aber auf Genus $g = k+1$ ist der dominante Beitrag durch $F_g \sim N_k/x^k N_0^{2k+1} \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^{-2m(g-1)-m}$ gegeben, so daß sich auch hier kein Doppelskalenlimes ergibt.

$(m,m),\ m \geq 2:\quad N_0, \dots, N_{m-1} \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^m, \quad I_l \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^{m-l}, \quad l = 1\dots m-1$

Die freie Energie ist für Genus $g = 2\dots m$ wieder wie im $(m,0)$–Fall, aber mit Genus $g = m+1$ gibt es zusätzliche N–abhängige dominante Beiträge $N_m/x^m N_0^{2m+1} \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^{-(2m+1)m}$. Diese skalieren wie die dominanten I–abhängigen Beiträge, so daß sich hier wieder ein Doppelskalenlimes ergibt.

$(m,k\geq m),\ m \geq 2:\quad N_0, \dots, N_{k-1} \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^m, \quad I_l \sim (a\Lambda_R^{\frac{1}{m}})^{m-l}, \quad l = 1\dots m-1$

Die freie Energie im Doppelskalenlimes ist identisch zu der im $(m,0)$–Fall.

Das komplexe Matrixmodell zeigt damit für den hier behandelten Fall i) aus Abschnitt 2 ein deutlich anderes kritisches Verhalten als im Fall ii) bzw. dem dazu äquivalenten hermiteschen Matrixmodell [16]. Dessen (m_x, m_y)–kritischer Unterraum ist durch (cf. Gln. (4.2.19)–(4.2.21))

$$M_1^c = \dots = M_{m_x-1}^c = 0, \quad M_{m_x}^c \neq 0, \qquad J_1^c = \dots = J_{m_y-1}^c = 0, \quad J_{m_y}^c \neq 0 \tag{4.5.14}$$

definiert und die freie Energie besitzt für alle $(m_x, m_y) \not\equiv (1,1)$ einen Doppelskalenlimes, wobei der Stringparameter und der kritische Exponent durch $G^{-1} = N^2 a^{2m+1}$ und $\gamma_s = -1/m$ mit $m = \max(m_x, m_y)$ gegeben sind. Die dominanten Terme der freien Energie hängen für $m_x > m_y$ von den M–Momenten und für $m_x < m_y$ von den J–Momenten ab. Im Fall $m_x = m_y$ ergibt sich die Summe der beiden dominanten Beiträge und es treten keine gemischten Terme auf.

Während also beim hermiteschen Matrixmodell das kritische Verhalten im Doppelskalenlimes davon bestimmt wird, an welchem Endpunkt der Eigenwertdichte sich die meisten Nullstellen entwickeln, besitzt die freie Energie des komplexen Matrixmodells im Fall i) nur dann einen Doppelskalenlimes, wenn sich bei $\lambda = 0$ keine, genau eine oder mindestens so viele Nullstellen wie am rechten Randpunkt x entwickeln.

Für die $(m,1)$–kritischen Fälle tritt dabei ein gegenüber dem hermiteschen Matrixmodell neues Skalenverhalten der freien Energie mit $\gamma_s = -1$ auf. Im folgenden wollen wir diese Fälle genauer untersuchen, indem wir auch das Verhalten der Korrelatoren im Doppelskalenlimes betrachten.

Doppelskalenlimes der mikroskopischen Korrelatoren

Die s–Loop Amplituden ergeben sich mit (4.1.5) durch Konturintegration aus den s–Loop Korrelatoren,

$$\langle \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^{k_1}\ldots\mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^{k_s}\rangle_c = N^{-s+2}\prod_{i=1}^{s}\left(\oint\frac{dp_i}{2\pi i}p_i^{k_i}\right)W(p_1,\ldots,p_s) \tag{4.5.15}$$

und beschreiben die Einsetzung von s Loops der diskreten Längen $k_1,\ldots,k_s$ auf der zusammenhängenden polygonierten Riemannfläche. Ihr Doppelskalenlimes ergibt sich damit aus dem der sogenannten mikroskopischen Loop–Korrelatoren, bei denen wir nur die Momente skalieren und keine Skalierung für die Variablen der Loop–Korrelatoren einführen.

Betrachten wir die nicht–planaren Korrelatoren, so finden wir zusammenfassend im $(m,1)$–kritischen Fall folgendes Skalenverhalten

$$W_g(p_1,\ldots,p_s)\sim(\Lambda a^m)^{-3(g-1)-s}, \tag{4.5.16}$$

wobei die Korrelatoren bis auf den Torus Beitrag (für $m\neq 1$) nur von den N–Momenten (genauer: nur von N_0 und N_1) abhängen. Das Verhalten im $(m,0)$–kritischen Falls ist im Vergleich dazu durch

$$W_g(p_1,\ldots,p_s)\sim(\Lambda a^m)^{-(2+1/m)(g-1)-s} \tag{4.5.17}$$

gegeben, so daß wir auch an dem Skalenverhalten der Korrelatoren hier $\gamma_s=-1$ ablesen können.

Im einzelnen erhalten wir als im Limes $a\to 0$ dominante Beiträge für die ersten Korrelatoren

$$W_{\geq 1}(p_1)=\frac{1}{p_1}\frac{1}{\sqrt{p_1(p_1-x)}}\left[\frac{1}{N^2}\frac{1}{16}\frac{1}{N_0}+\frac{1}{N^4}\frac{9}{256}\frac{1}{N_0}\left(\frac{N_1}{xN_0^3}\right)+\frac{1}{N^6}\frac{189}{1024}\frac{1}{N_0}\left(\frac{N_1}{xN_0^3}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{N^8}\frac{21663}{8192}\frac{1}{N_0}\left(\frac{N_1}{xN_0^3}\right)^3+\ldots\right]+\frac{1}{N^2}\frac{1}{(p_1-x)\sqrt{p_1(p_1-x)}}\left[-\frac{1}{16}\frac{xI_2}{{I_1}^2}\right],$$

$$W_{\geq 1}(p_1,p_2)=\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{p_i}\frac{1}{\sqrt{p_i(p_i-x)}}\left[\frac{1}{N^2}\frac{1}{32}\frac{1}{{N_0}^2}+\frac{1}{N^4}\frac{9}{128}\frac{1}{{N_0}^2}\left(\frac{N_1}{xN_0^3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{N^6}\frac{1323}{2048}\frac{1}{{N_0}^2}\left(\frac{N_1}{xN_0^3}\right)^2+\frac{1}{N^8}\frac{108315}{8192}\frac{1}{{N_0}^2}\left(\frac{N_1}{xN_0^3}\right)^3+\ldots\right]$$
$$+\frac{1}{N^2}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{p_i-x}\frac{1}{\sqrt{p_i(p_i-x)}}\left[\frac{3}{16}\frac{x^2{I_2}^2}{{I_1}^4}-\frac{5}{32}\frac{x^2I_3}{{I_1}^3}\right],$$

$$W_{\geq 1}(p_1,p_2,p_3)=\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{p_i}\frac{1}{\sqrt{p_i(p_i-x)}}\left[\frac{1}{N^2}\frac{1}{32}\frac{1}{{N_0}^3}+\frac{1}{N^4}\frac{45}{256}\frac{1}{{N_0}^3}\left(\frac{N_1}{xN_0^3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{N^6}\frac{1323}{512}\frac{1}{{N_0}^3}\left(\frac{N_1}{xN_0^3}\right)^2+\frac{1}{N^8}\frac{1191465}{16384}\frac{1}{{N_0}^3}\left(\frac{N_1}{xN_0^3}\right)^3+\ldots\right]$$
$$+\frac{1}{N^2}\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{p_i-x}\frac{1}{\sqrt{p_i(p_i-x)}}\left[-\frac{9}{8}\frac{x^3{I_2}^3}{{I_1}^6}+\frac{105}{64}\frac{x^3I_2I_3}{{I_1}^5}-\frac{35}{64}\frac{x^3I_4}{{I_1}^4}\right]. \tag{4.5.18}$$

Dabei sind die zusätzlich auf Genus 1 auftretenden I–abhängigen Terme potentiell dominante Terme für $m>1$ mit dem gleichen Skalenverhalten wie die entsprechenden N–abhängigen Terme.

Die topologische Entwicklung der s–Loop Amplituden für $g\geq 1$ liefert nun

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^{k_1}\ldots\mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^{k_s}\rangle_c &\sim N^{-s+2}\sum_{g\geq 1}N^{-2g}W_g(p_1,\ldots,p_s)\\ &\sim\sum_{g\geq 1}N^{-2(g-1)-s}(a^m)^{-3(g-1)-s}\widetilde{W}_g(p_1,\ldots,p_s)\\ &=\sum_{g\geq 1}(N^2a^{3m})^{-(g-1)-s/2}a^{ms/2}\widetilde{W}_g(p_1,\ldots,p_s),\end{aligned} \tag{4.5.19}$$

so daß wir auch für die nicht–planaren mikroskopischen Loop Amplituden einen Doppelskalenlimes mit $G^{-1}=N^2a^{3m}$ erhalten, sofern die s–Loop Amplituden eine multiplikative Renormierung mit $a^{ms/2}$ erfahren.

Die planaren Korrelatoren entsprechen dagegen *nicht* diesem Skalenverhalten, da sie nicht von den N–Momenten abhängen und damit im $(1,1)$–kritischen Fall nicht skalieren und im $(m,1)$–kritischen Fall das gleiche Skalenverhalten zeigen wie im $(m,0)$–kritischen Fall:

$$W_0(p_1,\ldots,p_s)\sim(\Lambda a^m)^{(2+1/m)-s},\quad m\geq 2. \tag{4.5.20}$$

Makroskopische Loops und Iteration im Doppelskalenlimes

Die physikalischen Längen der eben beschriebenen mikroskopischen Loops werden im Doppelskalenlimes proportional zum Gitterabstand sein, $l_i\sim ak_i$, und damit verschwinden. Um daher im Limes $a\to 0$ endliche, makroskopische Loops zu erhalten, müssen wir bei festgehaltenen l_i die k_i nach unendlich gehen lassen.

Für diese makroskopischen Loop Korrelatoren werden wie für den Endpunkt x nun auch für die Variablen p_i Skalenvariablen π_i eingeführt,

$$p_i = x_c + a\pi_i, \quad x = x_c + a\Lambda_R^{\frac{1}{m}}, \qquad \Rightarrow \qquad p_i - x = a(\pi_i - \Lambda_R^{\frac{1}{m}}). \tag{4.5.21}$$

Damit ergibt sich bei der Berechnung der Loop Amplituden im Limes $a \to 0$

$$p_i^{k_i} = (x_c + a\pi_i)^{k_i} = x_c^{k_i}(1 + a\pi_i/x_c)^{k_i} \sim x_c^{k_i} \mathrm{e}^{\pi_i l_i} \quad \text{für} \quad k_i = l_i x_c/a, \tag{4.5.22}$$

$$[0, x] \quad \to \quad]-\infty, \Lambda_R^{\frac{1}{m}}\,] \tag{4.5.23}$$

und aus der Konturintegration wird eine inverse Laplace Transformation mit $c > \Lambda_R^{\frac{1}{m}}$. Wir erhalten dann als makroskopische s–Loop Amplitude

$$\prod_{i=1}^{s} \oint \frac{dp_i}{2\pi i} p_i^{k_i} W(p_1, \ldots, p_s) \to a^s x_c^{k_1+\ldots+k_s} \prod_{i=1}^{s} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\pi_i}{2\pi i} \mathrm{e}^{\pi_i l_i} w(\pi_1, \ldots, \pi_s). \tag{4.5.24}$$

Diese makroskopischen Loops sind von besonderem Interesse, da sie und damit auch die freie Energie durch eine modifizierte Form des Iterationsverfahrens im $(m, 0)$–kritischen Fall analog zum hermiteschen Matrixmodell direkt im Doppelskalenlimes berechnet werden können [16], was den rechnerischen Aufwand deutlich verringert. Der entscheidende Punkt dabei ist, daß die dominanten Beiträge des zu bestimmenden 1–Loop Korrelators auf der linken Seite der Loop–Gleichung (4.1.38) nur von den dominanten Beiträgen der rechten Seite der Loop–Gleichung abhängen. Wir skizzieren kurz das modifizierte Verfahren nach [16]:

Mit dem hier betrachteten Skalenverhalten auch für die Variable p erhalten wir aus (4.3.3)

$$\Phi_0^{(n)}(p) = \frac{1}{x_c^n} \frac{1}{\sqrt{x_c(p-x)}} \sim a^{-1/2}, \quad \Phi_x^{(n)}(p) = \frac{1}{(p-x)^n} \frac{1}{\sqrt{x_c(p-x)}} \sim a^{-n-1/2} \tag{4.5.25}$$

und zusammen mit dem bekannten Verhalten der Momente im $(m, 0)$–kritischen Fall für die Basisfunktionen aus (4.3.2)

$$Y^{(n)} \sim a^{-1/2}, \qquad X^{(n)} \sim a^{-n-m+1/2}, \tag{4.5.26}$$

wobei alle Terme der Basisfunktionen homogen skalieren. Für den Loop–Einsetzungsoperator ergibt sich

$$\frac{d}{dV(p)} = \sum_{n=1} \frac{dI_n}{dV(p)} \frac{\partial}{\partial I_n} + \frac{dx}{dV(p)} \frac{\partial}{\partial x} \sim a^{-m-3/2}$$

mit

$$\frac{dI_k}{dV(p)} = -(k + \tfrac{1}{2}) \left[\Phi_x^{(k+1)}(p) - \frac{I_{k+1}}{I_1} \Phi_x^{(1)}(p) \right] x, \tag{4.5.27}$$

so daß jede Anwendung des Loop–Einsetzungsoperators die Potenz von a um $m+3/2$ verringert. Das gesamte Iterationverfahren hängt nur von den I–Momenten ab und der 1–Loop Korrelator besitzt nur noch eine Entwicklung nach den X–Basisfunktionen, deren Darstellung durch Ableitungen nach dem Potential sich ebenfalls vereinfacht:

$$W_g(p) = \sum_{n=1}^{3g-1} \mathcal{A}_g^{(n)} X^{(n)}(p), \quad X^{(n)}(p) = -\frac{2}{2n-1} \frac{1}{x_c} \frac{1}{I_1} \frac{dI_{n-1}}{dV(p)} - \frac{1}{I_1} \sum_{l=2}^{n-1} X^{(l)}(p) I_{n-l+1}, \quad n \geq 2. \tag{4.5.28}$$

Das Skalenverhalten der makroskopischen Loop Korrelatoren ist dabei durch

$$W_g(p_1, \ldots, p_s) \sim (a^m)^{-(2+1/m)(g-1)-(2+1/m)s/2-s} \widetilde{w}_g(\pi_1, \ldots, \pi_s) \tag{4.5.29}$$

gegeben und wir erhalten für die topologische Entwicklung der makroskopischen s-Loop Amplituden

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^{k_1} \ldots \mathrm{tr}\,(\phi^\dagger\phi)^{k_s} \rangle_c &= N^{-s+2} \sum_g N^{-2g} \prod_{i=1}^{s} \oint \frac{dp_i}{2\pi i} p_i^{k_i} W(p_1, \ldots, p_s) \\ &= \sum_g N^{-2(g-1)-s} a^s x_c^{k_1+\ldots+k_s} \prod_{i=1}^{s} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\pi_i}{2\pi i} \mathrm{e}^{\pi_i l_i} w(\pi_1, \ldots, \pi_s) \\ &= x_c^{k_1+\ldots+k_s} \sum_g (N^2 a^{2m+1})^{-(g-1)-s/2} \prod_{i=1}^{s} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\pi_i}{2\pi i} \mathrm{e}^{\pi_i l_i} \widetilde{w}_g(\pi_1, \ldots, \pi_s). \end{aligned} \tag{4.5.30}$$

Es stellt sich natürlich die Frage, ob sich auch im $(m, 1)$–kritischen Fall ein modifiziertes Iterationsverfahren angeben läßt, mit dem die Loop–Korrelatoren und die freie Energie direkt im Doppelskalenlimes berechnet werden können. Betrachten wir daher zunächst einmal das Verhalten der Korrelatoren, soweit wir es durch Einsetzen der Skalenvariablen gewinnen können:

$(1, 1)$: Hier skalieren N_0 und $p - x$ proprtional zu a und es zeigt sich, daß alle makroskopischen Korrelatoren nur von I_1, nicht aber von den N–Momenten abhängen (cf. Gln. (4.4.11),(4.4.12) für den 1– und 2–Loop Korrelator auf Genus 1). Explizit finden wir für den 1–Loop Korrelator

$$\begin{aligned} W_{\geq 1} = \frac{1}{\sqrt{p(p-x)}} \Bigg[&\frac{1}{N^2} \frac{1}{16} \frac{x}{I_1 (p-x)^2} + \frac{1}{N^4} \frac{105}{256} \frac{x^2}{{I_1}^3 (p-x)^5} + \frac{1}{N^6} \frac{25025}{2048} \frac{x^3}{{I_1}^5 (p-x)^8} \\ &+ \frac{1}{N^8} \frac{56581525}{65536} \frac{x^4}{{I_1}^7 (p-x)^{11}} + \ldots \Bigg] \end{aligned} \tag{4.5.31}$$

und allgemein für das Skalenverhalten der s–Loop Korrelatoren

$$W_g(p_1, \ldots, p_s) \sim a^{-3(g-1)-3/2\,s-s}, \tag{4.5.32}$$

so daß wir auch hier einen Doppelskalenlimes für die makroskopischen Loop–Korrelatoren erhalten. Es ist aber offensichtlich, daß wir von dem makroskopischen 1–Loop Korrelator *nicht* auf die freie Energie im Doppelskalenlimes in Gl. (4.5.13) schließen können.

$(m,1)$, $m \geq 2$: Nun skalieren auch die I–Momente in Abhängigkeit von m und wir finden für die nicht–planaren Korrelatoren ein unterschiedliches Skalenverhalten von Genus 1 zu den höheren Genera.

Die Genus 1 Korrelatoren hängen dabei nur von den I–Momenten ab und skalieren mit

$$W_1(p_1,\ldots,p_s) \sim a^{-(2+1/m)s/2} a^{-s}, \qquad (4.5.33)$$

während die höheren Korrelatoren zusätzlich noch von N_0 und N_1 abhängen und dabei auch gemischte Terme in den N– und I–Momenten auftreten; das Skalenverhalten ist gegeben durch

$$W_g(p_1,\ldots,p_s) \sim (a^m)^{-3(g-1)-(2+1/m)s/2} a^{-s} a. \qquad (4.5.34)$$

Dabei ist zu beachten, daß die dominanten Terme der höheren 1–Loop Korrelatoren die gleichen sind wie bei den mikroskopischen Korrelatoren (bis auf zusätzliche I-abhängige Terme für $m=2$) und im Vergleich zu (4.5.16) mit $W_g(p) \sim (a^m)^{-3(g-1)} a^{-m-1/2}$ um einen Faktor $a^{-1/2}$ stärker skalieren, da hier auch $p-x$ skaliert.

Im Gegensatz zum $(m,0)$–kritischen Fall war es im $(m,1)$–kritischen Fall aufgrund des veränderten Skalenverhaltens der Basisfunktionen und des Loopeinsetzungs–Operators nicht möglich, ein modifiziertes Iterationsverfahren anzugeben, mit dem die makroskopischen Korrelatoren und die freie Energie direkt im Doppelskalenlimes bestimmt werden können.

Auch der Versuch, die Variable p in Bezug auf den linken Randpunkt 0 der Eigenwertdichte mit dem Gitterabstand zu skalieren – bei dem wir natürlich die Darstellung der makroskopischen Loop Amplituden als inverse Laplace-Transformierte verlieren – führt zu keinem modifizierten Iterationsverfahren im Doppelskalenlimes, da sub–dominante Terme auf der rechten Seite der Loop–Gleichung zum dominanten Verhalten des zu bestimmenden 1–Loop Korrelators beitragen.

Im Gegensatz zu den hier betrachteten makroskopischen Loop–Amplituden hingen die mikroskopischen Loop-Amplituden (bis auf die zusätzlichen I–abhängigen Terme auf Genus 1) und die freie Energie nur von den N–Momenten ab, so daß es möglich sein sollte, ein modifiziertes Verfahren ab Genus 1 anzugeben, das nur den Satz der N–Momente enthält. Im folgenden Abschnitt werden wir dies für den $(1,1)$–kritischen Fall tun.

Iterationsverfahren im $(1,1)$–kritischen Fall

Im (1,1)–kritischen Fall skaliert nur das Moment $N_0 \sim a\Lambda$, so daß wir es im wesentlichen mit der kosmologischen Konstanten identifizieren können. Die einzige Möglichkeit, die Potenz von a zu verringern, ist damit die Ableitung nach N_0 und wir finden als dominanten Beitrag des Loopeinsetzungs–Operators

$$\frac{d}{dV(p)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{p(p-x)}}\frac{\partial}{\partial N_0} \sim a^{-1}. \qquad (4.5.35)$$

Ausgehend von der freien Energie erhalten wir dann die dominanten Beiträge der Loop Korrelatoren durch Anwendung dieses Operators; so finden wir auf Genus 1

$$F_1 = -\frac{1}{8}\ln N_0 \quad \Rightarrow \quad W_1(p) = \frac{1}{16}\frac{1}{N_0}\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{p(p-x)}} \qquad (4.5.36)$$

und analog die s–Loop Korrelatoren auf allen Genera (cf. (4.5.18)) mit ihrem Skalenverhalten

$$W_g(p_1,\ldots p_s) \sim a^{-3(g-1)-s}. \qquad (4.5.37)$$

Aber auch hier ist es nicht möglich, nur aus der Kenntnis der dominanten Beiträge auf der rechten Seite der Loop-Gleichung den dominanten Beitrag des zu bestimmenden 1–Loop Korrelators zu erhalten. Da die freie Energie und die Loop–Korrelatoren im Doppelskalenlimes aber nur von den N–Momenten abhängen, besteht die einzig mögliche Vereinfachung darin, das Iterationsverfahren ab Genus 1 so zu modifizieren, daß die von den I–Momenten abhängigen Terme nicht mehr mit berechnet werden müssen:

Wir starten die Iteration mit dem N-abhängigen Term des 1–Loop Korrelators auf Genus 1,

$$W_1(p) = \frac{1}{16}\frac{1}{N_0}\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{p(p-x)}}, \qquad (4.5.38)$$

und verwenden als Loopeinsetzungs–Operator

$$\frac{d}{dV(p)} = \sum_{n=0} \frac{dN_n}{dV(p)}\frac{\partial}{\partial N_n} \quad \text{mit} \quad \frac{dN_k}{dV(p)} = -(k+\tfrac{1}{2})\Phi_0^{(k+1)}(p) - \tfrac{1}{2}\Phi_x^{(k)}(p) + \tfrac{1}{2}\frac{1}{x^k}\Phi_x^{(1)}(p). \qquad (4.5.39)$$

Die Partialbruchzerlegung der rechten Seite der Loop-Gleichung liefert uns dann die Koeffizienten, durch die wir den 1–Loop Korrelator darstellen können als

$$W_g(p) = \sum_{n=1}^{g} \mathcal{D}_g^{(n)} Y^{(n)}(p) + \mathcal{A}_g^{(1)} X^{(1)}(p). \qquad (4.5.40)$$

Daraus erhalten wir mit (4.3.13) und (4.3.12) die dominanten sowie sub–dominante Beiträge der freien Energie, die nur von den N–Momenten abhängen, von denen allerdings nur der dominante für die Bestimmung der s-Loop Korrelatoren im Doppelskalenlimes von Bedeutung ist. Für den nächsten Schritt der Iteration können wir den Koeffizienten $\mathcal{A}_g^{(1)}$ zu Null setzen, da seine Mitnahme zu I-abhängigen Beiträgen führen würde.

Nachdem wir zum Start der Iteration den 1–Loop Korrelator für Genus 1 mit dem vollständigen Iterationsverfahren berechnet haben, verringert sich der rechnerische Aufwand für die Bestimmung der höheren Loop–Korrelatoren und der freien Energie durch die Vernachlässigung der I–abhängigen Terme deutlich; so treten pro Iterationsschritt bei der Anwendung des Loopeinsetzungs–Operators nur noch $g-1$ statt $4g-3$ Ableitungen auf und es müssen nur noch $g+1$ statt $4g-1$ Koeffizienten berechnet werden.

Kapitel V:

Ein Beispiel des $(1,1)$–kritischen CMM

In diesem Kapitel wird das Verhalten am $(1,1)$–kritischen Punkt anhand des einfachsten Potentials, das dieses Verhalten zeigt, detailliert untersucht (cf. [21]). Dabei wird sich zeigen, daß die planaren Rekursionsfunktionen am kritischen Punkt ein qualitativ anderes Verhalten zeigen als das aus den $(m,0)$–Fällen bekannte. Mit Hilfe der Rekursionsfunktionen wird danach die Stringgleichung für die freie Energie, genauer: die Stringsuszeptibilität, abgeleitet und verifiziert, daß ihre asymptotische Lösung übereinstimmt mit der in Kapitel IV mit Hilfe der Momentenmethode bis Genus 5 gewonnenen Lösung.

1. Das Modell

Das Potential des komplexen Matrixmodells ist gegeben durch

$$V(\lambda) = g_1\lambda + \tfrac{1}{2}g_2\lambda^2 \tag{5.1.1}$$

und beschreibt für $g_1 > 0$ Quadrigulierungen, während diese Interpretation für negative g_1 nicht mehr besteht. Die Eigenwertdichte kann mit Hilfe der Sattelpunkts- oder der Momentenmethode bestimmt werden und besitzt in Abhängigkeit der Kopplungskonstanten einen Träger $\sigma = [y,x]$ bzw. $\sigma = [0,x]$. Es zeigt sowohl $(1,1)$– wie auch $(2,0)$–kritisches Verhalten, wenn sich im letzteren Fall eine (zusätzliche) Nullstelle bei 0 bzw x entwickelt.

i) $\sigma = [y,x]$

Diese Lösung existiert für $g_2 > 0$, $g_1 \le -2\sqrt{g_2} \;\Leftrightarrow\; \delta \equiv \frac{g_1}{2\sqrt{g_2}} \le -1$

und ist gegeben durch

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}g_2\sqrt{(x-\lambda)(\lambda-y)}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{g_2}}(-\delta-1), \quad x = \frac{2}{\sqrt{g_2}}(-\delta+1). \tag{5.1.2}$$

Sie entspricht der Eigenwertdichte des verschobenen Gauß'schen HMM und beschreibt einen um $\lambda = -g_1/g_2$ zentrierten Halbkreis. Dieser wandert für $\delta > -1$ auf die negative Eigenwertachse und stellt damit keine Lösung mehr für das CMM dar.

ii) $\sigma = [0,x]$

Die Eigenwertdichte existiert in den Bereichen $g_2 > 0$, $\delta > -1$ und $g_2 < 0$, $g_2 \ge -\frac{1}{12}g_1^2$ und lautet

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{x-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}(g_2\lambda + g_1 + \frac{1}{2}g_2 x). \tag{5.1.3}$$

Der Endpunkt der Eigenwertdichte ist dabei gegeben durch

$$x = -\frac{2}{3}\frac{g_1}{g_2} + \sqrt{\frac{4}{9}\frac{g_1^2}{g_2^2} + \frac{16}{3g_2}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{g_2}}(-\delta + \sqrt{3+\delta^2}), \quad g_2 > 0 \tag{5.1.4}$$

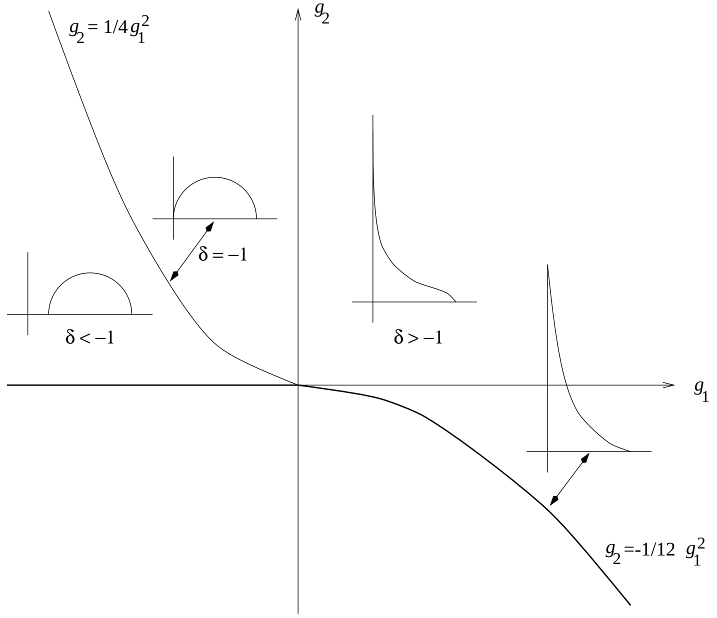
und

$$x = -\frac{2}{3}\frac{g_1}{g_2} - \sqrt{\frac{4}{9}\frac{g_1^2}{g_2^2} + \frac{16}{3g_2}} = -\frac{2}{3}\frac{g_1}{g_2}(1 - \sqrt{1 + 12g_2/g_1^2}), \quad g_2 < 0. \tag{5.1.5}$$

Am $(1,1)$–kritischen Punkt für $\delta = -1$ entwickelt sich eine Nullstelle bei $x = 0$ und die Eigenwertdichte geht über in den Halbkreis aus i) mit $x = 4/\sqrt{g_2}$. Der zweite, $(2,0)$–kritische Punkt wird für $g_2 = -1/12\,g_1^2$ erreicht, wenn sich bei $x = 8/g_1$ eine zusätzliche Nullstelle bildet und die Eigenwertdichte in

$$\rho(\lambda) = -\frac{g_2}{2\pi}\frac{(x-\lambda)^{3/2}}{\sqrt{\lambda}} \tag{5.1.6}$$

übergeht. Der qualitative Verlauf der Eigenwertdichte für die verschiedenen Regionen der Kopplungskonstanten ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



2. Prä–Stringgleichungen

Wie in Kapitel II beschrieben, ergeben sich für dieses Potential die Prä–Stringgleichungen zu

$$\tilde{\Omega}(x) + \tilde{\Omega}(x+\varepsilon) = a(x)\Omega(x), \quad \Omega(x)\Omega(x-\varepsilon)r(x) = \tilde{\Omega}^2(x) \tag{5.2.1}$$

mit

$$\Omega(x) = g_1 + g_2 a(x), \quad \tilde{\Omega}(x) = x - g_2 r(x). \tag{5.2.2}$$

Für die $\Omega = \tilde{\Omega} = 0$–Lösung lassen sich die Rekursionsfunktionen damit sofort angeben und wir sehen, daß sie nur planare Beiträge haben:

$$a(x) = a_0(x) = -\frac{g_1}{g_2}, \quad r(x) = r_0(x) = \frac{x}{g_2}. \tag{5.2.3}$$

Offensichtlich kann diese Lösung nur für $g_2 > 0$ existieren, da die Rekursionskoeffizienten R_n positiv sein müssen.

Die andere Lösung läßt sich nur als Potenzreihe in ε bestimmen und die planaren Gleichungen

$$2\tilde{\Omega}_0 = a_0\Omega_0,\ \Omega_0^2 r_0 = \tilde{\Omega}_0^2 \quad \rightsquigarrow r_0 = \frac{1}{4}a_0^2 \tag{5.2.4}$$

führen auf

$$x = \frac{1}{2}g_1 a_0 + \frac{3}{4}g_2 a_0^2 = g_1\sqrt{r_0} + 3g_2 r_0. \tag{5.2.5}$$

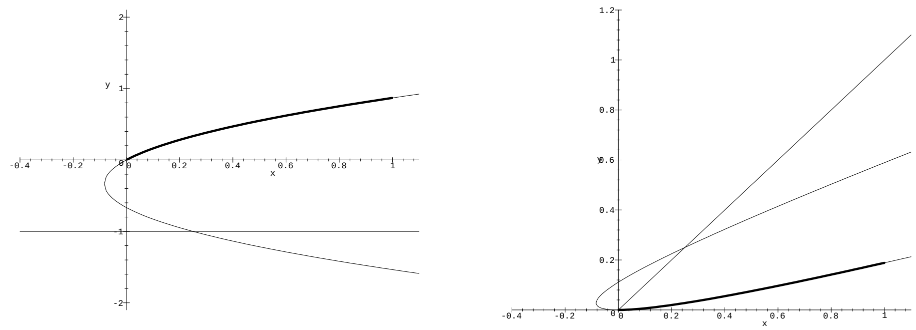
Im folgenden sind die möglichen Lösungen für verschiedene Werte von $\delta = g_1/2\sqrt{g_2}$ dargestellt. Welche davon in den verschiedenen Bereichen nun angenommen wird, wurde durch explizite Iteration der diskreten Stringgleichung (für $N = 30$) bestimmt und ist in der Abbildung fett dargestellt.

Die Rekursionsgleichungen lassen sich nach

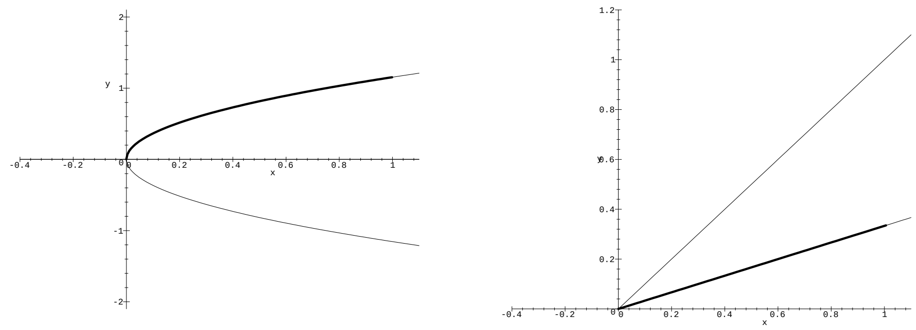
$$R_{n+1} = -\frac{g_1}{g_2}A_n - (A_n^2 + R_n) + \frac{1}{g_2}\frac{2n+1}{N}, \quad A_{n+1} = \frac{(\frac{n+1}{N} - g_2 R_{n+1})^2}{g_2 R_{n+1}(g_1 + g_2 A_n)} - \frac{g_1}{g_2}, \tag{5.2.6}$$

auflösen, so daß als Startwerte nur $P_0 = 1$, $R_0 = 0$, $A_0 = \langle P_0|\lambda|P_0\rangle \,/\, \langle P_0|P_0\rangle$ benötigt werden.

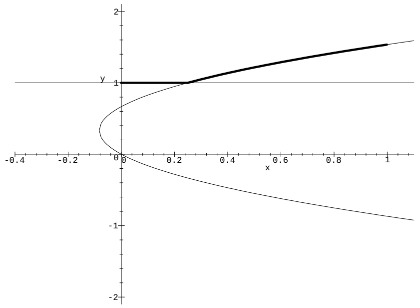
Rekursionsfunktionen $a_0(x)$ (links) und $r_0(x)$ (rechts) für $\delta = 0.5 \ldots -1.0$:

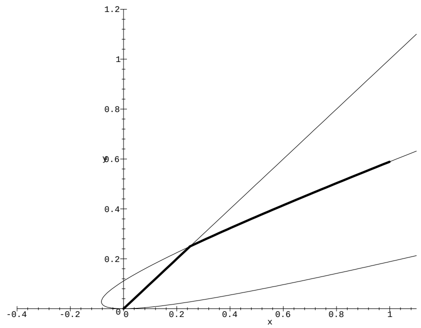


$\delta = 0.5$

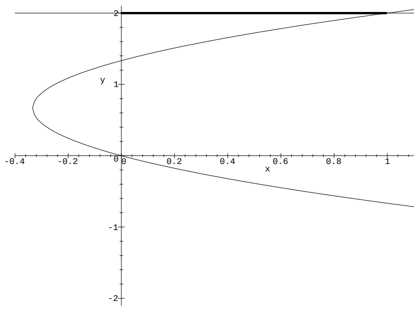


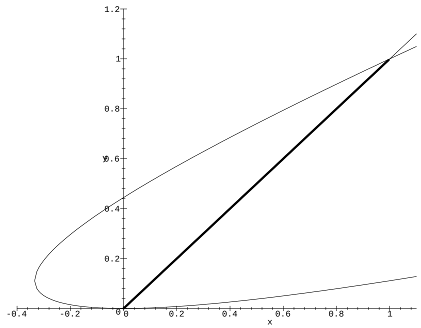
$\delta = 0$





$\delta = -0.5$





$\delta = -1.0$

Wir finden damit für positive Kopplung g_2 folgende drei Bereiche:

a) $g_1 \geq 0 \leftrightarrow \delta \geq 0$:

Hier sind die Rekursionsfunktionen durch die positive Lösung a_0 der Gl. (5.2.5) gegeben,

$$a_0(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{g_2}}(-\delta + \sqrt{\delta^2 + 3x}), \quad r_0(x) = \frac{1}{9}\frac{1}{g_2}(-\delta + \sqrt{\delta^2 + 3x})^2. \tag{5.2.7}$$

b) $-2\sqrt{g_2} \leq g_1 \leq 0 \leftrightarrow -1 \leq \delta \leq 0$:

In dieser Übergangsregion sind die Rekursionsfunktionen bis zum Schnittpunkt der beiden möglichen Lösungen mit positivem a_0 bei $\bar{x} = \frac{1}{4}\frac{g_1^2}{g_2} = \delta^2$ durch die $\Omega = \tilde{\Omega} = 0$–Lösungen gegeben, und von da an bis $x = 1$ durch die obige:

$$a_0(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{g_2}}\delta \\ \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{g_2}}(-\delta + \sqrt{\delta^2 + 3x}) \end{cases}, \quad r_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{g_2} & , \ 0 \leq x \leq \delta^2 \ (I) \\ \frac{1}{9}\frac{1}{g_2}(-\delta + \sqrt{\delta^2 + 3x})^2 & , \ \delta^2 \leq x \leq 1 \ (II) \end{cases}. \tag{5.2.8}$$

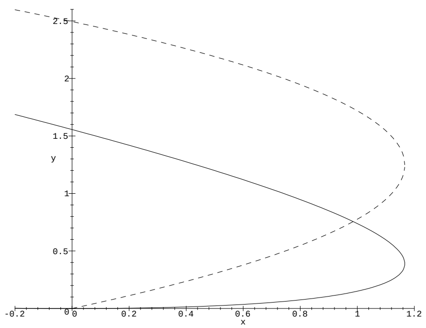
Die planaren Rekursionsfunktionen sind beide stetig bei $\bar{x}$, nicht aber ihre Ableitungen. (1,1)–kritisches Verhalten tritt auf, wenn der „Knick“ in den Rekursionsfunktionen bei für $\delta = -1$ bei $x = 1$ angelangt ist.

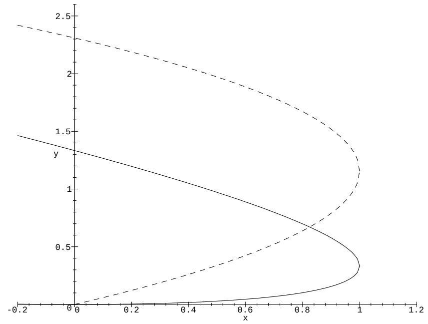
c) $g_1 \leq -2\sqrt{g_2} \leftrightarrow \delta \leq -1$:

Hier sind die Rekursionsfunktionen auf dem gesamten Intervall $[0,1]$ durch die $\Omega = \tilde{\Omega} = 0$ Lösung gegeben, wie sie auch dem Gauß'schen HMM entspricht:

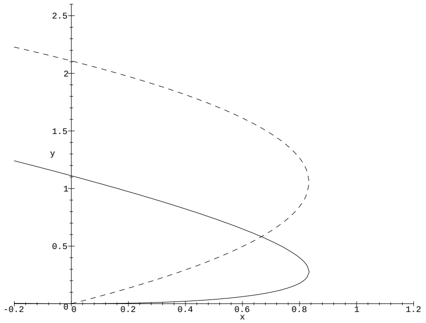
$$a_0(x) = -\frac{g_1}{g_2}, \quad r_0(x) = \frac{x}{g_2}. \tag{5.2.9}$$

Für den Fall negativer Kopplung g_2 ist es nicht möglich, orthogonale Polynome zu definieren, da das Maß $\exp(-NV(\lambda))$ nicht integrabel ist (es sei denn als störungstheoretische Entwicklung in g_2). Das Matrixmodell ist aber dennoch bis zu einer kritischen Kopplung in g_2 definiert, was man auch an den planaren Rekursionsfunktionen erkennen kann, die von $g_2 = 0$ bis zur kritischen Kopplung $g_2 = -1/\,12g_1^2$ eine stetige Fortsetzung besitzen. Im folgenden sind die möglichen Lösungen für verschiedene Werte von $\delta = g_1/\,2\sqrt{|g_2|}$ gegeben und wir erhalten als vierten Bereich:





Rekursionsfunktionen a_0 (gestrichelt) und r_0 für $\delta^2 = 3.5, 3.0$ und $\delta^2 = 2.5$ (nächste Seite)



d) $g_1 > 0,\ 0 \geq g_2 \geq -1/12 g_1^2 \leftrightarrow \delta^2 \geq 3$:

Die Rekursionsfunktionen sind die mit $r_0(0) = 0$ verträgliche Lösung von Gl. (5.2.5):

$$a_0(x) = \frac{2}{3\sqrt{|g_2|}}(\delta - \sqrt{\delta^2 - 3x}), \quad r_0(x) = -\frac{1}{9}\frac{1}{g_2}(\delta - \sqrt{\delta^2 - 3x})^2. \tag{5.2.10}$$

Wie in Kapitel II beschrieben, tritt das $(2,0)$–kritische Verhalten hier bei $\delta^2 = 3$ auf, wenn die Ableitung von x nach r_0 bei $r_0(1)$ verschwindet. Mit dem in Kapitel II gezeigten Zusammenhang zwischen den planaren Rekursionsfunktionen und der Eigenwertdichte ließ sich auch analytisch bestätigen, daß die für die verschiedenen Bereiche angegebenen Lösungen jeweils zu der Eigenwertdichte aus Abschnitt 1 führen.

Am interessantesten ist dieser Zusammenhang im Übergangsbereich b), wo sich die Eigenwertdichte zusammensetzt aus

$$\rho(\lambda) = \int_0^{\bar{x}} \frac{dx}{\pi} \frac{\Theta(4r_0^I - (\lambda - a_0^I)^2)}{\sqrt{4r_0^I - (\lambda - a_0^I)^2}} + \int_{\bar{x}}^1 \frac{dx}{\pi} \frac{\Theta(4r_0^{II} - (\lambda - a_0^{II})^2)}{\sqrt{4r_0^{II} - (\lambda - a_0^{II})^2}} = I^I + I^{II}. \tag{5.2.11}$$

Die Theta-Funktion im ersten Integral schränkt den Bereich der x–Integration auf $x \geq \frac{g_2}{4}(\lambda + \frac{g_1}{g_2})^2$ ein und liefert damit nur einen Beitrag für $\lambda \in [0, -2\frac{g_1}{g_2}]$,

$$I^I(\lambda) = \frac{g_2}{2\pi}\sqrt{\lambda(-2\frac{g_1}{g_2} - \lambda)}. \tag{5.2.12}$$

Im zweiten Integral erhalten wir als Bedingung $a_0(x) \geq \frac{\lambda}{2}$, so daß die untere Grenze für $\lambda \in [0, -2\frac{g_1}{g_2}]$ durch $\bar{x}$ und für $\lambda \in [-2\frac{g_1}{g_2}, 2a_0^{II}(1)]$ durch $\frac{1}{4}g_1\lambda + \frac{3}{16}g_2\lambda^2$ gegeben ist (cf. die Abb. mit a_0 im Übergangsbereich). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} I^{II}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{x-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}(g_2\lambda + g_1 + \tfrac{1}{2}g_2 x) - \sqrt{\lambda(-2\tfrac{g_1}{g_2} - \lambda)}\right), & \lambda \in [0, -2\tfrac{g_1}{g_2}], \\ I^{II}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{x-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}(g_2\lambda + g_1 + \tfrac{1}{2}g_2 x) & ,\quad \lambda \in [-2\tfrac{g_1}{g_2}, x], \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

so daß sich der zusätzlich auftretende Term für $\lambda \in [0, -2\frac{g_1}{g_2}]$ gegen den aus I^I weghebt und wir die Eigenwertdichte (5.1.3) erhalten.

Ebenso läßt sich die planare freie Energie

$$F_0 = \int_0^1 dx(1-x)\ln r_0(x) + \frac{1}{N}\ln h_0|_{N^0} \tag{5.2.14}$$

nun mit Hilfe der planaren Rekursionsfunktion r_0 und der Norm h_0 angeben. Dabei liefert die Norm nur für $g_2 > 0,\ g_1 < 0$ einen planaren Beitrag.

Für $g_2 > 0$ folgt mit

$$h_0 = \int_0^\infty d\lambda \exp(-N(g_1\lambda + \frac{1}{2}g_2\lambda^2)) = \sqrt{\pi/2g_2N}\exp(Ng_1^2/2g_2)\mathrm{erfc}(g_1\sqrt{N/2g_2}) \tag{5.2.15}$$

im Limes $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln h_0 = \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{g_1^2}{g_2} + \mathcal{O}(\frac{1}{N}) & g_1 < 0 \\ \mathcal{O}(\frac{1}{N}) & g_1 > 0 \end{cases}, \tag{5.2.16}$$

während die Norm für $g_2 < 0$ nur störungstheoretisch in g_2 existiert

$$h_0 = \int_0^\infty d\lambda \exp(-N(g_1\lambda + \frac{1}{2}g_2\lambda^2)) = \frac{1}{Ng_1}\int_0^\infty d\mu \exp(-\mu)\exp(-\frac{g_2\mu^2}{2g_1^2 N}) \tag{5.2.17}$$

und für $N \to \infty$ der Beitrag $\frac{1}{N}\ln h_0$ von der Ordung $1/N$ ist.

Für die verschiedenen Bereiche der Kopplungskonstanten erhalten wir so für die freie Energie:

c) $g_2 > 0,\ \delta \leq -1$:

$$e_0 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln g_2 + 2\delta^2 \tag{5.2.18}$$

a),b) $g_2 > 0,\ \delta \geq -1$:

$$e_0 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln g_2 - \ln 3 + \ln(-\delta + \sqrt{\delta^2+3}) - \frac{1}{27}(15\delta + 2\delta^3)\sqrt{\delta^2+3} + \frac{1}{27}(18\delta^2 + 2\delta^4) \tag{5.2.19}$$

d) $g_2 < 0,\ \delta^2 \geq 3$:

$$e_0 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln(-g_2) - \ln 3 + \ln(\delta - \sqrt{\delta^2-3}) + \frac{1}{27}(15\delta - 2\delta^3)\sqrt{\delta^2+3} - \frac{1}{27}(18\delta^2 - 2\delta^4) \tag{5.2.20}$$

Im Limes $\delta = g_1/2\sqrt{|g_2|} \to \infty$, entsprechend $g_1 \to \infty$ oder $g_2 \to 0$ (bei jeweils festgehaltener zweiter Kopplung) wird die freie Energie unabhängig von g_2 und ergibt sich zu

$$e_0 = -\frac{3}{2} - \ln g_1. \tag{5.2.21}$$

3. Stringgleichungen

Nachdem wir die planaren Rekursionsgleichungen gelöst haben, lassen sich nun die höheren Rekursionsfunktionen für den Fall nicht identisch verschwindendem Ω und $\tilde{\Omega}$ durch Einsetzten der ε–Entwicklung von a und r in die Prä–Stringgleichungen (5.2.1)

$$2x + \varepsilon - g_2(r(x) + r(x+\varepsilon)) = g_1 a(x) + g_2 a^2(x) \tag{5.3.1}$$

und

$$(g_1 + g_2 a(x))(g_1 + g_2 a(x-\varepsilon))r(x) = (x - g_2 r(x))^2 \tag{5.3.2}$$

gewinnen. Wir erhalten bis Ordnung ε^2 (cf. [21])

$$\begin{aligned} &r_1 = 0, \quad a_1 = 1/(g_1 + 3g_2 a_0), \\ &r_2 = \tfrac{1}{4} a_0^2 g_2^2 (5g_1^2 + 15 g_1 g_2 a_0 + 12 g_2^2 a_0^3)\,/(g_1 + 3g_2 a_0)^4 (g_1 + g_2 a_0)^2 \,, \\ &a_2 = -\tfrac{1}{2} g_2 (4g_1^3 + 18 g_1^2 g_2 a_0 + 27 g_1 g_2^2 a_0^2 + 15 g_2^3 a_0^3)\,/(g_1 + 3g_2 a_0)^4 (g_1 + g_2 a_0)^2 \,. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Um das Skalenverhalten der Rekursionsfunktionen im Doppelskalenlimes zu erhalten, betrachten wir wie in Kapitel IV

$$g_k = g g_k^c \quad \text{mit} \quad g = 1 - a\Lambda \quad \rightsquigarrow \quad \delta = g^{1/2}\delta^c = -g^{1/2} = -\sqrt{1 - a\Lambda} \tag{5.3.4}$$

und führen für x eine Skalenvariable z ein über

$$x = (1 - az)/(1 + a\Lambda) \Leftrightarrow z = (1 - (1 + a\Lambda)x)/a, \tag{5.3.5}$$

so daß die Endpunkte der Bereiche I und II aus Gl. (5.2.8) übergehen in

$$x = (0, \delta^2, 1) \to z = (\tfrac{1}{a}, a\Lambda^2, -\Lambda) \to (\infty, 0, -\Lambda). \tag{5.3.6}$$

Damit ergeben sich im Doppelskalenlimes für die Rekursionsfunktionen im Bereich II mit den Beiträgen der Sphäre und des Torus

$$\left.\begin{aligned} a(x) &= \tfrac{2}{\sqrt{g_2^c}}(1 + a[-\tfrac{1}{4}z - \tfrac{1}{16}\varepsilon^2 a^{-3} z^{-2} + \ldots]) \\ r(x) &= \tfrac{1}{g_2^c}(1 + 2a[-\tfrac{1}{4}z + \tfrac{1}{16}\varepsilon^2 a^{-3} z^{-2} + \ldots]) \end{aligned}\right. \quad a\lambda^2 \geq z \geq -\Lambda, \tag{5.3.7}$$

was auf folgenden Skalierungsansatz für alle Genera führt,

$$a(x) = \frac{2}{\sqrt{g_2^c}}(1 + a\alpha(z)), \quad r(x) = \frac{1}{g_2^c}(1 + 2a\rho(z)), \tag{5.3.8}$$

mit

$$\alpha(z) = -\tfrac{1}{4}z - \tfrac{1}{16}Gz^{-2} + \ldots, \quad \rho(z) = -\tfrac{1}{4}z + \tfrac{1}{16}Gz^{-2} + \ldots, \quad G^{-1} = N^2 a^3. \tag{5.3.9}$$

Einsetzen in die Prä–Stringgleichungen und Taylor-Entwicklung nach $\varepsilon = 1/N$ liefert im Doppelskalenlimes mit $\varepsilon = \sqrt{G}a^{3/2}$

$$-2(2\alpha+2\rho+z)a + (2\rho'+1)\sqrt{G}a^{3/2} + (-G\rho'' - 4\alpha^2 + 2\Lambda(2\alpha+2\rho+z+\Lambda))a^2 + \ldots = 0 \tag{5.3.10}$$

und

$$\begin{aligned} &(4\alpha^2 - (2\rho+z)^2)a^2 + 4\sqrt{G}\alpha\alpha' a^{5/2} \\ &\quad + 2(4\alpha^2\rho + G\alpha\alpha'' + \Lambda(-4\alpha^2 + 4\rho^2 + 4\rho z + 2\Lambda\rho - z^2 + \Lambda z))a^3 + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Die erste Gleichung kann nun durch Taylorentwicklung von α nach $a^{1/2}$ in Abhängigkeit von ρ gelöst werden

$$\alpha = -R + \tfrac{\sqrt{G}}{2}R' a^{1/2} + (-R^2 - \tfrac{G}{4}R'' + \tfrac{1}{2}\Lambda^2)a + \ldots, \quad R = \rho + \tfrac{z}{2} \tag{5.3.12}$$

und die zweite Gleichung liefert dann in Ordnung a^3 folgende nicht–lineare Differentialgleichung für R

$$16R^3 - 4R^2 z - GR'^2 + 2GRR'' = 0, \tag{5.3.13}$$

die nach Substitution von $S^2 = -R = -\rho - \frac{z}{2}$ in die Painlevé II Gleichung übergeht (cf. [25])

$$zS + 4S^3 = GS''. \tag{5.3.14}$$

Wenn wir dagegen zuerst ρ in Abhängigkeit von α bestimmen, erhalten wir dieselbe Gleichung für $S^2 = \alpha$.

Die asymptotische Lösung der Painlevé Gleichung (cf. Anhang C) ist gegeben durch

$$S(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{-z}\sum_{n=0} a_n(-2Gz^{-3})^n, \tag{5.3.15}$$

so daß wir mit

$$S^2(z) = -\tfrac{1}{4}z(1 + \tfrac{1}{4}Gz^{-3} - \tfrac{9}{8}G^2 z^{-6} + \tfrac{1323}{64}G^3 z^{-9} - \tfrac{108315}{128}G^4 z^{-12} + \tfrac{62737623}{1024}G^5 z^{-10} + \ldots) \tag{5.3.16}$$

die Rekursionsfunktionen im Doppelskalenlimes angeben können

$$\rho(z) = -\tfrac{z}{2} - S^2(z), \quad \alpha(z) = S^2(z). \tag{5.3.17}$$

Dabei ist die Funktion $\rho(z)$ von besonderem Interesse, da sie in direktem Zusammenhang mit der Stringsuszeptibilität (der zweifachen Ableitung der freien Energie nach der kosmologischen Konstanten) im Doppelskalenlimes steht. Bis auf zusätzliche, das Skalenverhalten verletzende Terme der freien Energie auf Genus 0 und 1 gilt nämlich

$$\begin{aligned}\partial_\Lambda^2(N^2F) &= 2G^{-1}\rho(-\Lambda)\\ &= \tfrac{1}{2}G^{-1}\Lambda^2+\tfrac{1}{8}\Lambda^{-2}+\tfrac{9}{16}G\Lambda^{-5}+\tfrac{1323}{128}G^2\Lambda^{-8}+\tfrac{108315}{256}G^3\Lambda^{-11}\\ &\quad+\tfrac{62737623}{2048}G^4\Lambda^{-14}+\ldots.\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Die Ableitung dieser Beziehung geschieht durch Betrachtung der freien Energie in der Darstellung von Gl. (2.2.34); im Doppelskalenlimes trägt nur das Integral in der Euler–Maclaurin Formel bei und die dem Skalenverhalten entsprechenden Terme kommen allein aus dem Bereich II:

$$N^2\int_{\delta^2}^{1}dx\,(1-x)\ln r^{II}(x)=\frac{N^2a^2}{(1+a\Lambda)^2}\int_{-\Lambda}^{a\Lambda^2}dz\,(z+\Lambda)\ln(1+2a\rho^{II}(z))=2G^{-1}\int_{-\Lambda}^{a\Lambda^2}dz\,(z+\Lambda)\rho^{II}(z)+\mathcal{O}(a) \tag{5.3.19}$$

Betrachten wir die planare freie Energie in unserem Beispiel, so folgt im Doppelskalenlimes für die verschiedenen Beiträge

$$F_0=\int_0^{\delta^2}dx\,(1-x)\ln r_0^I(x)+\int_{\delta^2}^{1}dx\,(1-x)\ln r_0^{II}(x)+2\delta^2=I_1+I_2+I_3 \tag{5.3.20}$$

mit

$$\begin{aligned}I_1&=-\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}\ln g_2^c+\tfrac{1}{2}a\Lambda+\tfrac{1}{4}a^2\Lambda^2+\tfrac{1}{2}a^2\Lambda^2\ln g_2^c\\ I_2&=-\tfrac{1}{2}a^2\Lambda^2+\tfrac{1}{12}a^3\Lambda^3+\mathcal{O}(a^4),\qquad I_3=2-2a\Lambda,\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

von denen der Term $\frac{1}{12}a^3\Lambda^3$ das richtige Skalenverhalten zeigt.

Um die mit der Momentenmethode bestimmten Beiträge der höheren Genera explizit anzugeben, müssen wir die Skalierung der Momente und des Endpunktes der Eigenwertdichte betrachten,

$$\begin{aligned}N_0&=g_1+\tfrac{1}{2}g_2x=\sqrt{g_2^c}(\tfrac{1}{2}a\Lambda+\ldots),\qquad N_1=g_2=g_2^c(1-a\Lambda),\\ x&=\tfrac{4}{3}\tfrac{1}{\sqrt{g_2}}(-\delta+\sqrt{\delta^2+3})=\tfrac{1}{\sqrt{g_2^c}}(4+a\Lambda+\ldots).\end{aligned} \tag{5.3.22}$$

Für den Beitrag des Torus zur freien Energie erhalten wir damit

$$F_1=-\tfrac{1}{24}(3\ln N_0+\ln I_1+4\ln x)=-\tfrac{1}{8}\ln a-\tfrac{7}{24}\ln 2-\tfrac{1}{8}\ln\Lambda+\mathcal{O}(a), \tag{5.3.23}$$

wobei $-\frac{1}{8}\ln\Lambda$ richtig skaliert. Das Skalierungsverhalten der höheren Genera folgt dann mit

$$\frac{N_1}{xN_0^3}=\frac{2}{a^3\Lambda^3}+\mathcal{O}(a^{-2}) \tag{5.3.24}$$

aus Gl. (4.5.13), so daß sich insgesamt für den Skalenanteil der freien Energie

$$N^2F=\tfrac{1}{12}G^{-1}\Lambda^3-\tfrac{1}{8}\ln\Lambda+\tfrac{3}{64}G\Lambda^{-3}+\tfrac{63}{256}G^2\Lambda^{-6}+\tfrac{2407}{512}G^3\Lambda^{-9}+\tfrac{1608657}{8192}G^4\Lambda^{-12}+\ldots \tag{5.3.25}$$

ergibt. Zweifaches Ableiten nach der kosmologischen Konstante führt dann zu der in Gl. (5.3.18) angegebenen Stringsuszeptibilität und stellt damit einen nicht–trivialen Check der mit der Momentenmethode gewonnenen freien Energie im Doppelskalenlimes dar.

Anhang A: Die Hilberttransformation

Wir fassen hier die Definitionen und grundlegenden Eigenschaften sowohl der unendlichen wie auch der endlichen Hilbert-Transformation zusammen; eine ausführliche Behandlung der unendlichen Hilberttransformation findet sich in [30], während die endliche in [31] betrachtet wurde (cf. auch [32]).

Die Hilberttransformationen sind definiert durch die folgenden Hauptwertintegrale,

$$u(x) = \mathcal{H}_x[v(y)] = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x-y} v(y), \quad \text{bzw.} \quad u(x) = {}^b_a\mathcal{T}_x[v(y)] = \frac{1}{\pi} \fint_a^b \frac{dy}{x-y} v(y), \tag{A.1}$$

und mit $v \in L^p$, $p > 1$ ist auch die Transformierte aus L^p.

Die Inverse der unendlichen Hilberttransformation ist mit

$$v(x) = \mathcal{H}^{-1}[u] = -\mathcal{H}[u] = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x-y} u(y) \tag{A.2}$$

durch die reziproke Formel gegeben, was sich aber nicht auf die endliche verallgemeinert (s.u.).

Aus den Definitionen erhalten wir sofort folgende Eigenschaften der Hilberttransformation[1]:

$$\mathcal{T}_x[yv(y)] = x\mathcal{T}_x[v(y)] - \frac{1}{\pi} \int dy\, v(y)$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{T}_x[y^{k+1}v(y)] = x^{k+1}\mathcal{T}_x[v(y)] - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{k} \int dy\, y^l\, v(y), \tag{A.3}$$

$$\mathcal{H}_x[v(\alpha y + \beta)] = \varepsilon(\alpha)\mathcal{H}_{\alpha x+\beta}[v(y)], \quad {}^b_a\mathcal{T}[v(\alpha y + \beta)] = {}^{\alpha b+\beta}_{\alpha a+\beta}\mathcal{T}_{\alpha x+\beta}[v(y)], \tag{A.4}$$

mit $\varepsilon(a) = \mathrm{sgn}(a)$ und

$$\mathcal{H}'_x[v] = \mathcal{H}_x[v'], \quad {}^b_a\mathcal{T}'[v] = {}^b_a\mathcal{T}[v'] + \frac{1}{\pi}\frac{v(a)}{x-a} - \frac{1}{\pi}\frac{v(b)}{x-b}, \tag{A.5}$$

[1],wobei $\mathcal{T}$ ohne Grenzen sowohl die endliche wie auch unendliche Hilberttransformation bezeichne.

wobei letzteres erlaubt, die Ableitung mit der unendlichen Hilberttransformation zu vertauschen.

Ferner gelten für $v_i \in L^{p_i}$ mit $p_i > 1$ und $1/p_1 + 1/p_2 < 1$ die folgenden Gleichungen:

Faltungstheorem (Tricomi):

$$\mathcal{T}_x\big[\, v_1(y)\, \mathcal{T}_y[v_2(z)] + v_2(y)\, \mathcal{T}_y[v_1(z)] \,\big] = \mathcal{T}_x[v_1(y)]\, \mathcal{T}_x[v_2(z)] - v_1(x)v_2(x), \tag{A.6}$$

was sich auch als Identität der Hauptwert–Distributionen darstellen läßt,

$$\frac{P}{x-y}\frac{P}{y-z} + \frac{P}{x-z}\frac{P}{z-y} + \frac{P}{y-x}\frac{P}{x-z} = -\pi^2\delta(x-y)\delta(x-z). \tag{A.7}$$

Vertauschungstheorem (Hardy, Poincaré):

$$\fint dy \fint dz \frac{v_1(y)v_2(z)}{(x-y)(y-z)} = \fint dz \fint dy \frac{v_1(y)v_2(z)}{(x-y)(y-z)} - \pi^2 v_1(x)v_2(x), \tag{A.8}$$

welches äquivalent zum Faltungstheorem ist und zeigt, daß die Hintereinanderausführung zweier Hauptwertintegrationen nicht–kommutativ ist.

Parseval's Theorem:

$$\int v_1\mathcal{T}[v_2] = -\int v_2\mathcal{T}[v_1] \quad \Leftrightarrow \quad \int dx \fint dy \frac{v_1(x)v_2(y)}{(x-y)} = \int dy \fint dx \frac{v_1(x)v_2(y)}{(x-y)}, \tag{A.9}$$

so daß die Hilberttransformation anti-selbstadjungiert bezüglich des normalen Skalarproduktes ist; insbesondere ist die Hilberttransformierte $\mathcal{T}[v]$ senkrecht zu v. Zusammen mit dem Faltungstheorem erhalten wir damit noch folgende Relation

$$\int \Big(\mathcal{T}[v_1]\mathcal{T}[v_2]v_3 + \mathcal{T}[v_1]v_2\mathcal{T}[v_3] + v_1\mathcal{T}[v_2]\mathcal{T}[v_3] \Big) = \int v_1 v_2 v_3. \tag{A.10}$$

A: Die Hilberttransformation

Der Beweis der Gleichungen findet sich bei Tricomi; sie lassen sich aber auch verifizieren, indem man die Fouriertransformierten betrachtet. So ist mit $\mathcal{T}_x[\mathrm{e}^{iay}] = -i\varepsilon(a)\mathrm{e}^{iax}$ und $\tilde{u}(k) = \int dx \mathrm{e}^{-ikx} u(x)$ die Fouriertransformierte der Hilberttransformation durch $\tilde{u}(k) = -i\varepsilon(k)\tilde{v}(k)$ gegeben und die Gleichungen sind dann aufgrund der Symmetrie der Fourierintegrale erfüllt. Das Faltungs – und Vertauschungstheorem entspricht dabei der für $(k,l) \neq (0,0)$ geltenden Identität

$$\varepsilon(k+l)\varepsilon(k) + \varepsilon(k+l)\varepsilon(l) - \varepsilon(k)\varepsilon(l) - 1 = 0. \tag{A.11}$$

Ferner ergibt sich aus (A.7) für zwei zusammenfallende Argumente noch folgende Identität der Hauptwert–Distributionen,

$$\left(\frac{\mathcal{P}}{x-y}\right)^2 = \frac{\mathcal{P}}{(x-y)^2} + \pi^2\delta(0)\delta(x-y). \tag{A.12}$$

Bevor wir zur Invertierung der endlichen Hilberttransformation kommen, wollen wir noch einige relevante Hilberttransformationen angeben:

Unendliche Hilberttransformationen:

$v(y)$	$\mathcal{H}_x[v] = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x-y} v(y)$
1	0
$\frac{\alpha a + \beta y}{y^2+a^2}$, $\mathrm{Re}\, a > 0$	$\frac{\alpha x - \beta a}{x^2+a^2}$
e^{iay}	$-i\varepsilon(a)\mathrm{e}^{iax}$
$\delta(y)$	$\frac{1}{\pi x}$
$\mathrm{e}^{-\alpha y^{2n}}$	$-\frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1}\Gamma\left(-\frac{2k+1}{2n}\right)$ mit $z = \alpha^{1/2n}x$

(A.13)

Letztere Formel ergibt sich folgendermaßen mit Hilfe von (A.5) und (A.3):

$$\partial_\alpha u(n,\alpha,x) = -\frac{1}{\pi}\fint \frac{dy}{x-y} y^{2n}\mathrm{e}^{-\alpha y^{2n}} = -\frac{x}{\pi}\fint \frac{dy}{x-y} y^{2n-1}\mathrm{e}^{-\alpha y^{2n}} = \frac{x}{2n\alpha}\partial_x u(n,\alpha,x)$$

$$= -\frac{x^{2n}}{\pi}\fint \frac{dy}{x-y}\mathrm{e}^{-\alpha y^{2n}} + \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{2n-1} x^{2n-1-l}\int dy y^l \mathrm{e}^{-\alpha y^{2n}},$$

so daß $u(n,\alpha,x)$ nur eine Funktion von $z = \alpha^{1/2n}x$ ist, für die wir folgende DGL erhalten

$$\partial_z u(n,z) = -2nu(n,z)z^{2n-1} + \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{2l+1}{2n}\right)z^{2(n-1-l)},$$

die mit der Randbedingung $u(n,0) = 0$ die Lösung

$$u(n,z) = \frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{-z^{2n}} \int_0^z dw \sum_{l=0}^{n-1} \Gamma(\frac{2l+1}{2n}) w^{2(n-1-l)} \mathrm{e}^{w^{2n}}$$

liefert. Entwicklung der Exponentialfunktionen und Ausführung der Integration ergibt dann die in der Tabelle angegebene konvergente Potenzreihe für u.

Die asymptotische Entwicklung von u für große z erhalten wir direkt aus der Darstellung als Hauptwertintegral zu

$$u(n,z) = \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k-1}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2n}\right). \tag{A.14}$$

Wir sehen hier explizit, daß man mit $\alpha = g_2 N/2$, $n = 2$ *keine* asymptotische Entwicklung in $1/N$ erhält.

Endliche Hilberttransformationen:

$v(y)$	${}^b_a\mathcal{T}_x[v] = \frac{1}{\pi}\fint_a^b \frac{dy}{x-y} v(y)$
1	$-\frac{1}{\pi}\ln\left\lvert\frac{b-x}{x-a}\right\rvert$
$\sqrt{(b-y)(y-a)}$	$x - \frac{b+a}{2}$ $\quad(\pm\sqrt{(b-x)(a-x)}$ für $x < a$ bzw. $x > b$)
$\sqrt{(b-y)(y-a)}^{-1}$	0 $\quad(\mp\sqrt{(b-x)(a-x)}^{-1}$ für $x < a$ bzw. $x > b$)

(A.15)

Mit Hilfe des Faltungstheorems läßt sich nun die Inverse der endlichen Hilberttransformation finden [31],

$$v(x) = \mathcal{T}_x^{-1}[u] = \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\left[\gamma - \frac{1}{\pi}\fint_a^b \frac{dy}{x-y}u(y)\sqrt{(b-y)(y-a)}\right], \tag{A.16}$$

welche für $u \in L^{4/3+\varepsilon}$ ebenfalls aus $L^{4/3+\varepsilon}$ ist (was aber für $u \in L^{1+\varepsilon}$ nicht notwendigerweise der Fall ist) und wobei die auftretende Nullmode die Norm der Lösung bestimmt,

$$\gamma = \frac{1}{\pi}\int_a^b dy\, \mathcal{T}_x^{-1}[u]. \tag{A.17}$$

Für ein $u \in L^{2+\varepsilon}$ ist die Hilberttransformierte $\mathcal{T}_x[u]$ mit Parseval's Theorem senkrecht

 A: Die Hilberttransformation

auf der Nullmode,

$$\int_a^b dx \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \mathcal{T}_x[u] = 0, \tag{A.18}$$

so daß wir in diesem Fall die inverse Hilberttransformation auch darstellen können als

$$v(x) = \mathcal{T}_x^{-1}[u] = \frac{\gamma'}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} - \frac{1}{\pi} \fint_a^b \frac{dy}{x-y} u(y) \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{\sqrt{(b-y)(y-a)}}, \tag{A.19}$$

mit

$$\gamma' = \frac{1}{\pi} \Big[\int_a^b dy\, \mathcal{T}_x^{-1}[u] - \int_a^b dy\, \frac{y u(y)}{\sqrt{(b-y)(y-a)}} \Big], \tag{A.20}$$

welche für $(a, b) \to (-\infty, \infty)$ in die Formel der unendlichen Hilberttransformation übergeht.

Die endliche Hilberttransformation läßt sich ferner mittels der Transformation

$$z = f(y) = \frac{1}{b-a}(2y - b - a) \quad \Rightarrow \quad \fint_a^b \frac{dy}{x-y} v(y) = \fint_{-1}^{1} \frac{dz}{f(x) - z} v(y(z)) \tag{A.21}$$

immer auf das Standardintervall $[-1, 1]$ zurückführen, für welches wir nun noch einige Hilberttransformationen angeben:

$v(y)$	${}_{-1}^{\;1}\mathcal{T}_x[v] = \frac{1}{\pi} \fint_{-1}^{1} \frac{dy}{x-y} v(y)$
$\sqrt{1-y^2}$	$x \quad (\ \pm\sqrt{x^2-1}\ \text{ für } x \lessgtr \mp 1\ )$
$y^{2n+1}\sqrt{1-y^2}$	$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} F(1, -n-1; 1/2; 1-x^2) \quad (\ \pm x^{2n+1}\sqrt{x^2-1}\ \text{ für } x \lessgtr \mp 1\ )$
$y^{2n+2}\sqrt{1-y^2}$	$x\mathcal{T}_x[y^{2n+1}\sqrt{1-y^2}]$
1	$-\frac{1}{\pi} \ln \left\lvert \frac{1-x}{x+1} \right\rvert$
y^{2n+1}	$-\frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2n+1-2l} x^{2l} - \frac{1}{\pi} x^{2n+1} \ln \left\lvert \frac{1-x}{x+1} \right\rvert$
y^{2n+2}	$x\mathcal{T}_x[y^{2n+1}]$

(A.22)

Anhang B: Das Gaußsche Matrixmodell

Für das Gaußsche Matrixmodell, d.h. das HMM mit quadratischem Potential $V(x) = \frac{g_2}{2}x^2$, lassen sich sowohl die freie Energie als auch die Momente (1–Punkt Korrelatoren) mit Hilfe der orthogonalen Polynome explizit als Entwicklung in $1/N$ angeben.

Wie in Kapitel II beschrieben, kann die Zustandssumme durch die Norm der zum Maß $\exp[-NV(\lambda)]$ orthogonalen Polynome P_n ausgedrückt werden als

$$Z = e^{-N^2 F} = \int \prod_i d\lambda_i e^{-N\sum_i \frac{g_2}{2}\lambda_i^2} \Delta^2[\lambda] = N! \prod_{n=0}^{N-1} h_n, \tag{B.1}$$

wobei die Polynome für obiges Potential durch die Hermite–Polynome H_n gegeben sind:

$$P_n(\lambda) = (2Ng_2)^{-n/2} H_n(\sqrt{g_2 N/2}\lambda) \quad \rightsquigarrow \quad h_n = n!\sqrt{2\pi}(g_2 N)^{-n-\frac{1}{2}}. \tag{B.2}$$

Für die Zustandssumme ergibt sich

$$Z = (2\pi)^{N/2}(g_2 N)^{-N^2/2} \prod_{k=0}^{N} k! = (2\pi)^{N/2}(g_2 N)^{-N^2/2} \prod_{k=0}^{N} k^{N-k+1} \tag{B.3}$$

und damit für die freie Energie

$$\ln Z = \frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{N^2}{2}\ln g_2 - \frac{N^2}{2}\ln N + (N+1)\sum_{k=1}^{N}\ln k - \sum_{k=1}^{N} k\ln k. \tag{B.4}$$

Mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung[1] für die beiden Summen

$$\sum_{k=1}^{N}\ln k = N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{m=1} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)}\frac{1}{N^{2m-1}} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\ln k = {} & \frac{1}{2}N^2\ln N - \frac{1}{4}N^2 + \frac{1}{2}N\ln N + \frac{1}{12}\ln N + \frac{1}{12} - \zeta'(-1) \\ & - \sum_{m=1} \frac{B_{2m+2}}{2m(2m+1)(2m+2)}\frac{1}{N^{2m}}\end{aligned} \tag{B.6}$$

[1]Diese ergeben sich durch Anwendung der Euler–Maclaurin Formel.

erhält man für die freie Energie

$$\begin{aligned}\ln Z = {} & -\frac{3}{4}N^2 - \frac{1}{2}N^2\ln g_2 + N(\ln(2\pi)-1) + \frac{5}{2}\ln N + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \zeta'(-1) \\ & + \sum_{m=1} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)}\frac{1}{N^{2m-1}} + \sum_{m=1} \frac{B_{2m+2}}{2m(2m+2)}\frac{1}{N^{2m}}\end{aligned} \tag{B.7}$$

mit

$$\frac{1}{2}\ln(2\pi) + \zeta'(-1) = 0.7535173893. \tag{B.8}$$

Nur der planare Beitrag ist dabei von der Kopplungskonstanten g_2 abhängig.

Für die Ein–Punkt–Korrelatoren

$$G_{2k} = \frac{1}{N}\left\langle \mathrm{tr}\, M^{2k}\right\rangle = \left\langle \lambda_1^{2k}\right\rangle = \frac{1}{Z}\int \prod_i d\lambda_i \lambda_1^{2k} e^{-N\sum_i V(\lambda_i)}\Delta^2[\lambda] \tag{B.9}$$

ergibt sich mit $\Delta[\lambda] = \det P_{j-1}(\lambda_i)$

$$G_{2k} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{h_n}\int d\lambda e^{-NV(\lambda)}P_n^2(\lambda)\lambda^{2k} = \int d\lambda \rho(\lambda)\lambda^{2k} \tag{B.10}$$

mit der Eigenwertdichte $\rho(\lambda)$, die sich auch als Variationsableitung der freien Energie darstellen läßt:

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{N^2}\frac{d}{dV(\lambda)}\ln Z. \tag{B.11}$$

Die Momente

$$I_{rs}^n = \int d\lambda e^{-NV(\lambda)}P_r(\lambda)P_s(\lambda)\lambda^n \tag{B.12}$$

lassen sich durch Entwicklung von x^n nach Hermite–Polynomen

$$\begin{aligned} x^{2n} &= 2^{-2n}\sum_{m=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2m)!(n-m)!}H_{2m}(x), \\ x^{2n+1} &= 2^{-2n-1}\sum_{m=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2m+1)!(n-m)!}H_{2m+1}(x)\end{aligned} \tag{B.13}$$

B: Das Gaußsche Matrixmodell

und der Orthogonalitätseigenschaft

$$H_{lmn} = \int d\lambda e^{-x^2} H_l(x) H_m(x) H_n(x) = \frac{2^{(l+m+n)/2}\sqrt{\pi}l!m!n!}{(s-l)!(s-m)!(s-n)!}, \quad 2s = l+m+n \tag{B.14}$$

explizit angeben.

Die 1–Punkt Amplituden können wir damit durch eine hypergeometrische Funktion ausdrücken,

$$G_{2k} = \frac{1}{N}\langle \mathrm{tr}\, M^{2k}\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{h_n} I_{nn}^{2k} = (2g_2N)^{-k}\frac{(2k)!}{k!}F(-k,-N+1;2;2), \tag{B.15}$$

wobei die Genusentwicklung in $1/N^2$ auf Genus $[k/2]$ abbricht. Für die 2–Punkt Amplituden

$$\begin{aligned} G_{k,l} = \langle \mathrm{tr}\, M^k \mathrm{tr}\, M^l\rangle_c &= N\langle\lambda_1^{k+l}\rangle + N(N-1)\langle\lambda_1^k\lambda_2^l\rangle - N^2\langle\lambda_1^k\rangle\langle\lambda_2^l\rangle \\ &= \sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{h_r}I_{rr}^{k+l} - \sum_{r,s=0}^{N-1}\frac{1}{h_rh_s}I_{rs}^k I_{rs}^l \end{aligned} \tag{B.16}$$

läßt sich aufgrund der auftretenden Doppelsumme dagegen kein solch geschlossener Ausdruck finden; es ist aber offensichtlich, daß auch die Genusentwicklung der s-Punkt Amplituden im Gauß'schen Modell abbricht.

Anhang C: Painlevé–Gleichung

Painlevé – I:

Die Painlevé–Gleichung der ersten Art ist in einer Standarddarstellung gegeben durch

$$t = f(t)^2 - \frac{1}{3}f''(t) \tag{C.1}$$

und wird für $t \to \infty$ durch die asymptotische Entwicklung

$$f(t) = \sqrt{t}\sum_{n=0} a_n t^{-5/2n+1/2} \tag{C.2}$$

gelöst, wobei die Koeffizienten a_n durch folgende Rekursionsgleichung bestimmt sind:

$$a_0^2 = 1, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2a_0}(\sum_{m=1}^{n} a_m a_{n+1-m} - \frac{1}{12}(25n^2-1)a_n). \tag{C.3}$$

Mit $a_0 = 1$ ergibt sich damit für die ersten Koeffizienten

$$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{24},\ a_2 = -\frac{49}{1152},\ a_3 = -\frac{1225}{6912},\ a_4 = -\frac{4412401}{2654208},\ a_5 = -\frac{73560025}{2654208}, \tag{C.4}$$

während die Koeffizienten der zweiten Lösung durch $a_{n(-)}^{n+1}$ gegeben sind.
Durch Reskalierung von f und t

$$f(t) = \beta R(u),\ t = \alpha u \tag{C.5}$$

läßt sich damit die Lösung der allgemeinen Gleichung

$$u = \frac{\beta^2}{\alpha}R(u)^2 - \frac{\beta}{\alpha^3}\frac{1}{3}R''(u) \tag{C.6}$$

darstellen als

$$R(u) = \frac{\alpha^{1/2}}{\beta}u^{1/2}\sum_{n=0} a_n \alpha^{-5/2n} u^{-5/2n}. \tag{C.7}$$

Painlevé – II:

Die Painlevé–Gleichung der zweiten Art ist gegeben durch

$$tf(t) = f(t)^3 - \frac{1}{2}f''(t) \tag{C.8}$$

und wird durch die asymptotische Entwicklung

$$f(t) = \sqrt{t}\sum_{n=0} a_n t^{-3n} \tag{C.9}$$

gelöst. Die Koeffizienten bestimmen sich durch

$$a_0^2 = 1, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n+1-k} a_k a_l a_{n+1-k-l} - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} a_0 a_l a_{n+1-l} + \frac{1}{16}(36n^2-1)a_n \tag{C.10}$$

und sind für $a_0 = 1$ durch

$$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{16},\ a_2 = -\frac{73}{512},\ a_3 = -\frac{10657}{8192},\ a_4 = -\frac{13912277}{524288},\ a_5 = -\frac{8045883943}{8388608} \tag{C.11}$$

gegeben (die zweite Lösung entsprechend $a_0 = -1$ ist offensichtlich $-f(t)$). Durch Reskalierung von f und t

$$f(t) = \beta R(u),\ t = \alpha u \tag{C.12}$$

läßt sich damit die Lösung der allgemeinen Gleichung

$$uR = \frac{\beta^2}{\alpha}R^3 - \frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{2}R'' \tag{C.13}$$

darstellen als

$$R(u) = \frac{\alpha^{1/2}}{\beta}\sqrt{u}\sum_{n=0} a_n \alpha^{-3n} u^{-3n}. \tag{C.14}$$

Literatur

[1] M.L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, 1991.

[2] F. J. Dyson, J. Math. Phys. 3 (1962) 140.

[3] G. t'Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461, Nucl. Phys. B75 (1974) 461.

[4] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi und J. B. Zuber, Commun. Math. Phys. 59 (1978) 35.

[5] D. Bessis, C. Itzykson und J. B. Zuber, Adv. Appl. Math. 1 (1980) 109.

[6] E. Brezin und V. A. Kazakov, Phys. Lett. B236 (1990) 144.
M. R. Douglas und S. H. Shenker, Nucl. Phys. B335 (1990) 635.
D. J. Gross und A. A. Migdal, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 127.

[7] E. Brezin, M. R. Douglas, V. Kazakov und S. H. Shenker, Phys. Lett. B237 (1990) 43.

[8] P. Ginsparg and G. Moore, *Lectures on 2D Gravity and 2D String Theory* , TASI '92 and hep-th/9304011.
E. Abdalla, M.C.B. Abdalla, D. Dalmazi and A. Zadra, *2D–Gravity in Non–Critical Strings*,
Lecture notes in Physics m20, Springer, 1994.
P. Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *2D Gravity and Random Matrices*, Phys. Rep. 254 (1995) 1.

[9] J.C. Plefka, *Supersymmetrische Verallgemeinerungen von Matrixmodellen*, Dissertation, Universität Hannover, 1995.

[10] O. Lechtenfeld, Int. J. Mod. Phys. A7 (1992) 7097.

[11] D. Karabali und B. Sakita, Int. J. Mod. Phys. A6 (1991) 5079.

[12] S. Ben-Menahem, Nucl. Phys. B391 (1993) 176.

[13] J. Ambjørn Yu. Makeenko, Mod. Phys. Lett. A5 (1990) 1753.

[14] J. Ambjørn, L. Chekhov, und Yu. Makeenko, Phys. Lett. B282 (1992) 341.

[15] J. Ambjørn, C. F. Kristjansen und Yu. Makeenko, Mod. Phys. Lett. A7 (1992) 3187.

[16] J. Ambjørn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen und Yu. Makeenko, Nucl. Phys. B404 (1993) 127.

[17] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov und A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 819.
F. David, Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 1651.
J. Distler und H. Kawai, Nucl. Phys. B321 (1989) 569.

[18] J. M. Daul, V.A. Kazakov und I.K. Kostov, Nucl. Phys. B409 (1993) 311.

[19] O. Lechtenfeld, Int. J. Mod. Phys. A7 (1992) 2335.

[20] G. Akemann, *Phasenübergänge in Matrixmodellen*, Dissertation, Universität Hannover, 1996.

[21] T. Morris, Nucl. Phys. B356 (1991) 703.

[22] I. Andrić und V. Bardek, J. Phys. A21 (1988) 2847,
I. Andrić, V. Bardek und L. Jonke, Fizika B4 (1995) 93 und hep-th/9409191, Phys. Lett. B357 (1995) 374.

[23] A. Jevicki und B. Sakita, Nucl. Phys. B165 (1980) 511, Nucl. Phys. B185 (1981) 89.
B. Sakita, *Quantum Theory of Many-Variable Systems and Fields*, World Scientific, 1985.

[24] S. Dalley, C. Johnson und T. Morris, Nucl. Phys. B368 (1992) 625.

[25] T. Morris, Class. Quantum Grav. 9 (1992) 1873.

[26] Yu. Makeenko, JETP Lett. 52 (1990) 259, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 1901.

[27] J. Ambjørn, *Quantization of geometry*, Les Houches '94 und hep-th/9411179.

[28] C. F. Kristjansen, *Random geometries in quantum gravity*, Ph.D. Thesis, Kopenhagen und hep-th/9310020.

[29] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz und Yu. Makeenko, Phys. Lett. B251 (1990) 517.

Literatur

[30] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford, 1948.

[31] H. Söhngen, Math. Z. 45 (1939) 245.
F.G. Tricomi, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 2 (1951) 199.

[32] N.I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Noordhoff (Leyden), 1977.

[33] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, 1972.

[34] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, 1979.

Lebenslauf

19.12.1966	Geboren in Hannover
1972–1976	Besuch der Grundschule in Hannover und Garbsen
1976–1978	Besuch der Orientierungsstufe in Garbsen
1978–1985	Besuch des Gymnasiums Garbsen
12.06.1985	Abitur am Gymnasium Garbsen
1985–1986	Grundwehrdienst
1986–1992	Studium der Physik (Diplom) an der Universität Hannover
17.10.1988	Vordiplom in Physik
01.09.1992	Diplom in Theoretischer Physik an der Universität Hannover
Seit 1991	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der Universität Hannover
Seit 1.10.1992	Doktorand bei Prof. Dr. O. Lechtenfeld Graduiertenstipendium des Landes Niedersachsen ('93–'94) Promotionsstipendium der Studienstiftung des Deutschen Volkes ('94–'96)

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem Prof. Dr. O. Lechtenfeld für die Betreuung dieser Arbeit, die vielen Diskussionen und die angenehme Atmosphäre in seiner Arbeitsgruppe.

Weiterhin danke ich G. Akemann, J. Bischoff, Prof. Dr. N. Dragon und J. Plefka für viele hilfreiche Diskussionen und Kommentare sowie Stefanie, Eike und Myriam für Aufmunterungen und Abwechslungen im Verlauf dieser Arbeit.

Der Studienstiftung des Deutschen Volkes und der Graduiertenförderung des Landes Niedersachsen danke ich für die finanzielle Unterstützung.