Tree-Level-Amplituden des N=2 Strings

Rainer Hippmann

Diplomarbeit am Institut für

Theoretische Physik, Uni Hannover, Sept. 1997

Betreuer: Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld

Inhalt

Vorwort 1

I **Der freie N=2 String** 3

I.1 Felder, Wirkung und Symmetrien 3

I.2 Quantisierung 6

I.3 Symmetriealgebra und spektraler Fluß 7

I.4 BRST–Ladung, Geist–Sektor und kritische Dimension 8

I.5 Physikalische Zustände 10

II. **Streuamplituden** 12

II.1 Raumzeit–Struktur und Lorentz–Symmetrie 12

II.2 Bosonisierung und Bildladungen 14

II.3 Vertexoperatoren und Streuamplituden 16

II.4 Amplituden des offenen und geschlossenen Strings 18

III. **Berechnung der 5–Punkt–Amplitude** 20

III.1 Berechnung der Korrelationsfunktion 20

III.2 Identitäten der Impulsterme 25

III.3 Amplitude als Integral von Ableitungen 28

III.4 Verschwinden der Integrale über eine Ableitung 32

IV. **M–Punkt–Amplitude auf der Sphäre** 35

Nachwort 48

Literatur 50

Vorwort

Die Stringtheorie mit zwei Supersymmetrien und einer lokalen $U(1)$–Symmetrie wurde erstmals konstruiert von Ademollo et. al. [9,10]. Diese Theorie entstand aus der Vorstellung einer entlang des Strings verteilten Ladung. Die Teilchen dieser Theorie sind $U(1)$–ungeladen, dieses wurde als "Confinement"–Bedingung gedeutet. Die Wirkung der Theorie [11] beinhaltet eine $N{=}2$ Supergravitation auf der Weltfläche, gekoppelt an ein Massenmultiplett. Die kritische Dimension ist zuerst mit $D{=}2$ reellen Dimensionen angegeben, später auf zwei komplexe Dimensionen korrigiert [17]. Die Signatur der Raumzeit ist $4+0$ oder $2+2$ und das Teilchenspektrum besteht nur aus einer endlichen Anzahl von masselosen Bosonen. Somit ist diese Theorie phänomenologisch nicht bedeutungsvoll. Jedoch ist die Theorie wegen ihrer reichhaltigen mathematischen Struktur interessant und viele Aspekte des bosonischen und einfach–supersymmetrischen Strings lassen sich an diesem einfacheren Fall untersuchen. Ferner ist der geschlossene und offene $N{=}2$ String eng verknüpft mit selbstdualer Gravitation und selbstdualer Yang–Mills–Theorie. Trotz der scheinbar einfachen Eigenschaften gestalten sich explizite Berechnungen gelegentlich recht schwierig, teilweise wegen der umfangreichen Symmetrie–Algebra, dem reichhaltigen Geistsektor (nach BRST–Quantisierung) und der vielfachen Entartung durch verschiedenen Geistgehalt und verschiedene Bildladungen (nach der Bosonisierung einiger Weltflächefelder).

Ziel dieser Arbeit ist die explizite Berechnung der Streuamplituden des offenen und geschlossenen $N{=}2$ Strings auf dem Tree–Level. Konsistenzüberlegungen [21] legen nahe, daß die Amplituden für mehr als drei externe Teilchen verschwinden sollten.

Kapitel I betrachtet den freien $N{=}2$ String, dessen Wirkung, Symmetriealgebra und Quantisierung. Der Geistsektor und die BRST–Ladung werden eingeführt, die kritische Dimension und das Teilchenspektrum behandelt. Kapitel II beschäftigt sich mit den Streuamplituden im allgemeinen. Dazu wird die Raumzeit–Struktur in der kritischen Dimension behandelt, einige Weltfläche–Felder bosonisiert und damit die Vertexoperatoren konstruiert. Kapitel III besteht aus der expliziten Berechnung der 5–Punkt–Amplitude. Dieses Kapitel soll anhand expliziter

Berechnungen die teilweise formalen Beweise der IV. Kapitels illustrieren und die wesentlichen Ideen aufzeigen. Kapitel IV schließlich enthält die Behandlung der allgemeinen M–Punkt–Amplitude.

Zur Notation: $\mathbb{R}^{(2,2)}$–Vektoren bekommen lateinische Indizes $i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3$; $\mathbb{C}^{(1,1)}$–Vektoren werden durch griechische Indizes $\mu, \nu, \lambda \dots = 0, 1$ gekennzeichnet. Als $SL(2, \mathbb{R})$–Spinor–Indizes werden griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \dots = +, -$ gewählt, Weltfläche–Indizes werden mit den Buchstaben $a, b, c, \dots = 0, 1$ gekennzeichnet.

Kapitel I

Der freie N=2 String

I.1 Felder, Wirkung und Symmetrien

Die $N = 2$ String–Theorie betrachtet die Einbettung einer zweidimensionalen String–Weltfläche in einen Raum–Zeit–Hintergrund mit D komplexen Dimensionen. Die Weltfläche ist ein Zylinder (geschlossener String) oder ein Parallelstreifen (offener String) und wird parametrisiert durch zwei reelle Parameter (σ, τ) mit $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ (geschlossen) oder $0 \leq \sigma \leq \pi$ (offen). Für die Weltflächenmetrik sei die Signatur $(-,+)$ gewählt, als Raumzeit–Metrik $g^{\mu\nu} = diag(-,+,\ldots,+)$.

Die Einbettung geschieht mittels einer Anzahl von komplexer Weltfläche–Feldern Z^μ, $\mu = 0,\ldots,D-1$. Zusätzliche besitzt der N=2 String D komplexe Spinoren Ψ^μ_α auf der Weltfläche ($\alpha = \uparrow, \downarrow$: Spinorindex). Dieses sind die Supersymmetrie–Partner der bosonischen Felder Z^μ und transformieren wie ein Raumzeit–Vektor. Diese Massenfelder werden an eine N=2 Supergravitation auf der Weltfläche gekoppelt. Das N=2 Supergravitations–Multiplett besteht aus dem Zweibein ${e_a}^b$, dem komplexen Gravitino $\chi_{a\alpha}$ und dem reellen $U(1)$–Eichfeld A_a auf der Weltfläche $(a, b = 0, 1)$.
Die Wirkung ist [11,12,16,29]:

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{\pi} \int d\sigma d\tau e \Big\{ & \frac{1}{2} h^{ab} \partial_a Z \cdot \partial_b Z^* + \frac{i}{2} \overline{\Psi} \cdot \gamma^a \overleftrightarrow{D}_a \Psi^* + A_a \overline{\Psi} \cdot \gamma^a \Psi^* \\
& + (\partial_a Z + \overline{\Psi} \chi_a^*)(\overline{\chi}_b \gamma^a \gamma^b \Psi^*) + (\partial_a Z^* + \overline{\chi}_a \Psi^*) \cdot (\overline{\Psi} \gamma^b \gamma^a \chi_b^*) \Big\} \ .
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

Der Punkt zwischen den Ausdrücken bezeichnet dabei die Raumzeit–Kontraktion. Die Metrik ist $h_{\alpha\beta} = \eta_{ab} {e_\alpha}^a {e_\beta}^b$, die Darstellung der 2D–Dirac–Matrizen ist rein imaginäre gewählt: $\gamma^0 = \sigma_2$, $\gamma^1 = i\sigma_1$, $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$ (σ_i sind die Paulimatrizen). Die Dirac–Konjugation $\overline{\psi} = \psi^T \rho_0$ enthält keine komplexe Konjugation; komplexe Konjugation ist explizit angegeben und wirkt stets zuerst (diese Konventionen entsprechen weitgehend [29]).

Unter Voraussetzung bestimmter Randbedingungen für die Weltflächefelder ist diese Wirkung klassisch invariant gegenüber Reparametrisierung, lokaler Lorentztransformation, lokaler

N=2 Supersymmetrie, lokaler Weyl–Transformation und fermionischer Weyl–Transformation sowie vektorieller und chiraler $U(1)$–Eichtransformation. Spezielle durch die konforme Invarianz ändert sich die Theorie nicht, wenn die Weltfläche durch komplexe Zahlen $z = \tau + i\sigma$ und $\bar{z} = \tau - i\sigma$ parametrisiert wird und mittels $z \to e^z$ ($\bar{z} \to e^{\bar{z}}$) beim geschlossene String auf die komplexe Ebene (ohne den Nullpunkt) und beim offenen String auf die obere (untere) Halbebene abgebildet wird. Bei der Quantisierung werden einige dieser Symmetrien anomal.

Die Felder der Supergravitation besitzen keine dynamischen Freiheitsgrade. Beim freien String können klassisch diese Felder (aufgrund der einfach zusammenhängende Weltfläche) durch die folgenden lokalen Symmetrien weggeeicht werden [24]: Das Vielbein durch die allgemeine Koordinatentransformation, lokale Lorentz– und Weyl–Transformation, das Gravitino durch Supersymmetrie– und fermionische Weyl–Transformation sowie die beiden Komponenten des $U(1)$-Eichfeldes durch die vektorielle– und chirale U(1)–Symmetrie. Auf Riemannflächen von höherem Geschlecht bleibt jedoch eine Abhängigkeit von den Moduli der Felder.

Die Wirkung in dieser *superkonformen Eichung* besitzt dann die Lagrangedichte [6]

$$L = \partial_z Z^* \cdot \partial_{\bar{z}} Z + \partial_{\bar{z}} Z^* \cdot \partial_z Z + \Psi_\uparrow^* \cdot D_z \Psi_\uparrow + \Psi_\downarrow^* \cdot D_z \Psi_\downarrow \ . \tag{1.1.2}$$

Die Bewegungsgleichungen der Massenfelder,

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} Z^\mu = 0, \quad \partial_z \Psi_\uparrow^\mu = 0, \quad \partial_{\bar{z}} \Psi_\downarrow^\mu = 0, \tag{1.1.3}$$

impliziert eine Zerlegung in Felder mit reiner Abhängigkeit von z bzw. $\bar{z}$ (links– bzw. rechtslaufende Anteile oder holomorphe bzw. antiholomorphe Komponenten),

$$Z^\mu(z,\bar{z}) = Z_L^\mu(z) + Z_R^\mu(\bar{z}) \ , \qquad \Psi_\uparrow^\mu = \Psi_\uparrow^\mu(\bar{z}) \ , \qquad \Psi_\downarrow^\mu = \Psi_\downarrow^\mu(z) \ . \tag{1.1.4}$$

Die Invarianz der Wirkung bzgl. der angegebenen Symmetrien erfordert bestimmte Randbedingungen für die Massenfelder. Beim offenen String gilt auf der reellen Achse ($z = \bar{z}$) [24]

$$\partial_z Z_L^\mu(z) = \partial_{\bar{z}} Z_R^\mu(\bar{z}) \ , \qquad \Psi_\downarrow^\mu(z) = \Psi_\uparrow^\mu(\bar{z}) \ . \tag{1.1.5}$$

Beim geschlossenen String sollen die bosonischen Felder Z^μ periodisch sein. Die fermionischen Felder können sich um einen beliebigen Phasenfaktor beim Umlauf des Nullpunktes ändern,

$$Z^\mu(e^{2\pi i} z) = Z^\mu(z) \ , \qquad \Psi^\mu(e^{2\pi i} z) = e^{i\rho} \Psi^\mu(z) \ . \tag{1.1.6}$$

Diese Phasenfaktor ist gleich für alle Komponenten $\mu = 0, \ldots, D-1$. Die Werte $\rho = 0$ und $\rho = 1/2$ gehören zu den Fällen Ramond (periodisch) und Neveu–Schwarz (antiperiodisch). Dieses sind nicht die allgemeinsten Randbedingungen die verträglich sind mit der Eindeutigkeit der Lagrangedichte und den Symmetrien der Wirkung. Es ist ebenso möglich, periodische und antiperiodische Randbedingungen unabhängig für alle reellen Komponenten der Fermionen $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ zu fordern [26]. Dieses führt auch zu Raumzeit–Fermionen im Spektrum. Ebenso kann ein "Twist" in den Feldern durch Randbedingungen

$$\Psi^\mu(e^{2\pi i}z) = \pm\Psi^{\mu *}(z) \ , \qquad Z^\mu(e^{2\pi i}z) = \pm Z^{\mu *}(z) \tag{1.1.6}$$

[27,29,18] und mehrwertige Bosonen erlaubt sein. Schließlich können beim geschlossenen String die Randbedingungen für den links– und rechtslaufenden Sektor unabhängig vorgegeben werden ("$\mathbb{Z}_n$–symmetrischer String" [21] oder "fraktionierter String" [31]).

Die Generatoren der Weltfläche–Diffeomorphismen (Energie–Impulstensor T_{ab}), der lokalen Supersymmetrie–Transformationen (der Superstrom $G^\pm_a$) und der lokalen $U(1)$–Transformation ($U(1)$–Eichstrom J_a) ergeben sich aus der Variation der Lagrangefunktionen nach den zugehörigen Feldern der Supergravitation. Die Bewegungsgleichungen der Supergravitations–Felder impliziert (klassisch) das Verschwinden dieser Symmetrieströme,

$$T_{ab} = 0 \ , \qquad G^\pm_a = 0 \ , \qquad J_a = 0 \ . \tag{1.1.7}$$

Diese Gleichungen geben die Zwangsbedingungen ("Constraints") für die Massenfelder. Die Symmetrieströme zerfallen ebenfalls in holomorphe und antiholomorphe Anteile, die Algebren dieser Anteile sind separat abgeschlossen. Schließlich zerfallen auch die Vertexoperatoren und damit die Wechselwirkungsausdrücke, so daß beim geschlossenen String nur der holomorphe Sektor betrachtet werden muß, der antiholomorphe ist von der Struktur gleich. Beim offenen String ist der antiholomorphe Anteil durch die Randbedingungen nur eine Kopie des holomorphen und kein unabhängiger Sektor. Das Endergebnis (z.B. die Streuamplitude) muß also beim geschlossenen String wieder aus dem holomorphen und antiholomorphen Anteil zusammengesetzt werden. Die holomorphen Felder werden im folgenden mit den gleichen Buchstaben Z und Ψ bezeichnet.

In superkonformer Eichung sind die holomorphen Anteile der Symmetrieströme

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2}\partial Z^* \cdot \partial Z - \frac{1}{4}\partial\Psi^* \cdot \Psi - \frac{1}{4}\partial\Psi \cdot \Psi^* \\ G^+_z &= \partial Z^* \cdot \Psi \\ G^-_z &= \partial Z \cdot \Psi^* \\ J_z &= -\frac{1}{2}\Psi^* \cdot \Psi \ . \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

I.2 Quantisierung

Für die Felder des offenen und geschlossenen Strings kann als Modenentwicklung die Laurententwicklung angesetzt werden (dieses entpricht der Fourier–Entwicklung auf dem Zylinder bzw. dem Parallelstreifen):

$$\partial Z(z)^\mu = i \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^\mu z^{-n-1} \ , \qquad \Psi^\mu = \sum_{r\in\mathbb{Z}-\rho} d_r z^r \ . \tag{1.2.1}$$

Die Indexwahl in den bosonischen Weltflächefeldern entpricht dem konformen Gewicht 1; ρ parametrisiert die Randbedingungen der fermionischen Felder des geschlossenen Strings. Die (Anti–) Kommutatorrelationen sind

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^{\nu *}] = 2n\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu} \ , \qquad \{d_r^\mu, d_s^{\nu *}\} = 2\delta_{r+s,0}\eta^{\mu\nu} \ . \tag{1.2.2}$$

Aus diesen Relationen folgt der singuläre Teil der Operator–Produktentwicklung (OPE, [3,4]):

$$Z^\mu(z) Z^{\nu *}(w) \sim -2\eta^{\mu\nu}\ln(z-w) \ , \qquad \Psi^\mu(z)\Psi^{\nu *}(w) \sim -2\eta^{\mu\nu}\frac{1}{z-w} \ . \tag{1.2.3}$$

Mittels Wick–Theorem und den singulären Anteilen der Operatorprodukte von Z und Ψ können nun die OPEs der Symmetrie–Generatoren berechnet werden. Diese bilden eine N=2 superkonforme Algebra mit zentraler Ladung $c = 3D$ [3]:

$$\begin{aligned}
T(z)T(w) &\sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \\
T(z)G^\pm(w) &\sim \frac{\frac{3}{2}G^\pm(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G^\pm(w)}{z-w} \\
G^\pm(z)G^\mp(w) &\sim \frac{\frac{4}{3}c}{(z-w)^3} \mp \frac{4J(w)}{(z-w)^2} + \frac{4T(w) \mp 2\partial J(w)}{z-w} \\
T(z)J(w) &\sim \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} \\
J(z)G^\pm(w) &\sim \mp\frac{G^\pm(w)}{z-w} \\
J(z)J(w) &\sim \frac{c/3}{(z-w)^2} \ .
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Alle anderen Operatorprodukte besitzen kein singulären Anteile. Die Anomalien in den Symmetrien äußern sich durch dimensionsabhängige c–Zahl–Terme in den $T \cdot T$, $G \cdot G$ und $J \cdot J$ Operatorprodukten.

I.3 Symmetriealgebra und spektraler Fluß

Als Modenentwicklung für die Symmetriegeneratoren wird

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \ , \qquad G^{\pm}(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}\mp\rho} G_r^{\pm} z^{-r-\frac{3}{2}} \ , \qquad J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n z^{-n-1} \tag{1.3.1}$$

gesetzt [6], entsprechend den konformen Gewichten $(2, \frac{3}{2}, 1)$ von $(T, G^{\pm}, J)$ (bis auf die anomalen Terme). Die Randbedingungen der SUSY–Ströme $G^{\pm}(z)$ ergeben sich aus den Randbedingungen der Felder Ψ^{μ}. Die Algebra der Moden L_n, G_r und T_m folgt direkt aus den Operatorprodukten [15],

$$\begin{aligned}
[L_n, L_m] &= \frac{1}{12}cn(n^2-1)\delta_{n+m,0} + (n-m)L_{n+m} \\
[L_n, G_r^{\pm}] &= \left(\frac{1}{2}n - r\right) G_{n+r}^{\pm} \\
\{G_r^{\pm}, G_s^{\mp}\} &= \frac{2}{3}c\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0} + 4L_{r+s} + 2(r-s)J_{r+s} \\
[L_n, J_m] &= -mJ_{n+m} \\
[J_n, G_r^{\pm}] &= \mp G_{n+r}^{\pm} \\
[J_n, J_m] &= \frac{1}{3}cn\delta_{n+m,0} \ .
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Die Symmetriealgebra des N=2 Strings ist offenbar nicht abhängig von der Wahl der Randbedingung der fermionischen Felder und Symmetrieströme, d.h. unabhängig vom Parameter ρ. Die Algebra der Symmetriegeneratoren, realisiert durch Felder mit Randbedingungen zum Parameter ρ sei als ρ*–Algebra* bezeichnet, die zugehörigen Symmetriegeneratoren mit $T^{\rho}, G^{\rho\pm}, J^{\rho}$ und ebenso die Entwicklungsmoden. Die Moden der ρ–Algebra lassen sich abbilden auf die Moden im Ramond–Sektor (ohne ρ–Kennzeichnung) über die lineare Beziehung [6]

$$\begin{aligned}
L_n^{\rho} &= L_n + \rho J_n + \rho^2\delta_{n,0} \\
G_r^{\rho\pm} &= G_{r\mp\rho}^{\pm} \\
J_n^{\rho} &= J_n + 2\rho\delta_{n,0} \ .
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Damit sind alle ρ–Algebren äquivalent. Der Algebra–Isomorphismus zwischen verschiedenen ρ–Algebren (bzw. Automorphismus nach der Identifikation verschiedener ρ–Algebren) wird *spektraler Fluß* genannt. Die Beziehung der Moden bedeutet für die zugehörigen Symmetrieströme die Relationen [6]

$$\begin{aligned}
T^{\rho}(z) &= T(z) + \frac{\rho}{z}J(z) + \frac{\rho^2}{z^2} \\
G^{\rho\pm}(z) &= z^{\mp\rho}G^{\pm}(z) \\
J^{\rho}(z) &= J(z) + \frac{2\rho}{z} \ .
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Die Abbildung $(T,G,J) \mapsto (T^\rho, G^\rho, J^\rho)$ wird erzeugt durch den *Spektral–Fluß–Operator* (SFO)

$$\mathrm{SFO}(\rho) = \exp\left\{\rho \int_0^\infty J\right\} \ . \tag{1.3.5}$$

Nach der Bosonisierung einiger Felder kann dieser Operator in einfacher Form ausgedrückt werden.

Die explizite Kennzeichnung der Randbedingungen (der Parameter ρ) wird im weiteren wieder weggelassen.

I.4 BRST–Ladung, Geist–Sektor und kritische Dimension

Nach der Quantisierung tauchen die Anomalien als Zentralladung in der Algebra der Zwangsbedingungen auf. Für die Konsistenz der Theorie als Quantentheorie ist es jedoch von Bedeutung, daß die Anomalien verschwinden. In der BRST–Quantisierung [16,18,19] wird diese Zentralladung durch Einführung von Geistfeldern in einer bestimmten Dimension der Raumzeit (kritischen Dimension) zum Verschwinden gebracht. Physikalische Zustände und damit das Teilchenspektrum der Theorie werden mittels eines nilpotenten Operators (BRST–Ladung) identifiziert.

Für die Konstruktion der BSRT–Ladung und der geisterweiterten Symmetrie–Generatoren werden zu allen Moden der Symmetrie–Generatoren ein Geist–/Antigeist–Paar mit umgekehrter Statistik und mit folgenden Kommutator– und Antikommutator–Relationen eingeführt [18]:

$$\begin{array}{ccccc} L_n & : & c_n, b_n & : & \{c_n, b_m\} = \delta_{m+n} \\ G_p^\pm & : & \beta_p^\pm, \gamma_p^\mp & : & [\beta_p^\pm, \gamma_q^\mp] = \delta_{p+q} \\ J_m & : & \tilde{c}_n, \tilde{b}_n & : & \{\tilde{c}_n, \tilde{b}_m\} = \delta_{m+n} \end{array} \tag{1.4.1}$$

Diese Geist– /Antigeistpaare entsprechen der Modenentwicklung von Weltflächefeldern mit dem konformen Gewicht $1-j$ und j wobei j das konforme Gewicht des Symmetriegenerators ist. Die Geistfelder der Reparametrisierung, Supersymmetrie und $U(1)$–Tranformation sind also

$$\begin{aligned} c(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^{-n+1} \ , & b(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^{-n-2} \ , \\ \gamma^\pm(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}\pm\rho} \gamma_r^\pm z^{-r+\frac{1}{2}} \ , & \beta^\mp(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}\mp\rho} \beta_r^\mp z^{-r-\frac{3}{2}} \ , \\ \tilde{c}(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_n z^{-n} \ , & \tilde{b}(z) &= \sum b_n z^{-n-1} \ . \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Die singulären Teile der Operatorprodukte entsprechend den (Anti–) Kommutatorrelationen der Entwicklungsmoden sind

$$b(z)\ c(w) \sim \frac{1}{z-w}\ , \quad \beta^{\pm}(z)\ \gamma^{\mp}(w) \sim -\frac{1}{z-w}\ , \quad \tilde{b}(z)\ \tilde{c}(w) \sim \frac{1}{z-w}\ . \tag{1.4.3}$$

Allgemein hat ein antikommutierendes Geist– / Antigeistsystem $\hat{c}(z)$ und $\hat{b}(z)$ mit den konformen Gewichten $(1-j)$ und j, dem Propagator

$$\left\langle \hat{b}(z)\ \hat{c}(w) \right\rangle = \frac{1}{z-w} \tag{1.4.4}$$

und dem Energie–Impulstensor

$$T(z) = -j\hat{b}\partial_z\hat{c} + (1-j)(\partial_z\hat{b})\hat{c} \tag{1.4.5}$$

eine Zentralladung in der Entwicklung von $T(z)\cdot T(w)$ von [5]

$$c_{(\hat{b},\hat{c})} = -2(6j(j-1)+1)\ . \tag{1.4.6}$$

Sind dagegen die Felder $\hat{c}$, $\hat{b}$ kommutierend mit dem Propagator

$$\left\langle \hat{c}(z)\ \hat{b}(z) \right\rangle = -\frac{1}{z-w}\ , \tag{1.4.7}$$

so hat der Beitrag des Geistsystems zur Zentralladung das umgekehrte Vorzeichen vom antikommutierenden Fall. Die Zentralladungen der Massen– und Geistfelder addieren sich, so daß das Verschwinden der konformen Anomalie folgende Bedingung an die Dimension der Raumzeit impliziert [26]:

$$\left.\begin{array}{lcr} \text{Diffeomorphismen–Geister} & : & -26 \\ \text{Geister der SUSY} & : & 2\cdot 11 \\ U(1)\text{–Geister} & : & -2 \\ D \text{ komplexe Bosonen} & : & 2D \\ D \text{ komplexe Fermionen} & : & D \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 3D+6=0 \quad \Rightarrow \quad D=2 \tag{1.4.8}$$

Gleichzeitig verschwinden in der kritischen Dimension auch die anderen Anomalien.

Die Operatoren $L, G^{\pm}$ und T werden nun durch die entsprechende Geistterme erweitert. Diese Erweiterung ergibt sich durch den (Anti–) Kommutator mit dem Antigeistfeld der zugehörigen Symmetrie [6],

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \{Q, b\} = T + T_{gh}\ , \\ \hat{G}^{\pm} &= [Q, \beta^{\pm}] = G^{\pm} + G^{\pm}_{gh}\ , \\ \hat{J} &= \{Q, \tilde{b}\} = J + J_{gh}\ . \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

explizit ausgedrückt durch die Geistfelder gilt:

$$
\begin{aligned}
\hat{T} &= T + 2(\partial c)b + c\partial b + (\partial\tilde{c})\tilde{b} - \frac{3}{2}\left((\partial\gamma^-)\beta^+ + (\partial\gamma^+)\beta^-\right) - \frac{1}{2}(\gamma^-\partial\beta^+ + \gamma^+\partial\beta^-) \ , \\
\hat{G}^\pm &= G^\pm - 4\gamma^\pm b \mp 4(\partial\gamma^\pm)\tilde{b} \mp 2\gamma^\pm\partial\tilde{b} + \frac{3}{2}(\partial c)\beta^\pm + c\partial\beta^\pm \mp \tilde{c}\beta^\pm \ , \\
\hat{J} &= J + \partial(c\tilde{b}) + (\gamma^+\beta^- - \gamma^-\beta^+) \ .
\end{aligned}
\tag{1.4.10}
$$

Dabei ist Q die BRST–Ladung

$$
Q_{BRST} = \frac{1}{2\pi i}\oint dz J_{BRST} \ , \tag{1.4.11}
$$

mit dem BRST–Strom [6]

$$
\begin{aligned}
J_{BRST} =& cT + \gamma^+G^- + \gamma^-G^+ + \tilde{c}J + c\partial cb + c\partial\tilde{c}\tilde{b} - 4\gamma^+\gamma^- b + 2\partial\gamma^-\gamma^+\tilde{b} \\
&- 2\partial\gamma^+\gamma^-\tilde{b} + \frac{3}{2}\partial c\left(\gamma^+\beta^- + \gamma^-\beta^+\right) - \frac{3}{4}c\left(\partial\gamma^+\beta^- + \partial\gamma^-\beta^+\right) \\
&+ \frac{1}{4}c\left(\gamma^+\partial\beta^- + \gamma^-\partial\beta^+\right) + \tilde{c}\left(\gamma^+\beta^- - \partial\gamma^-\beta^+\right) \ .
\end{aligned}
\tag{1.4.12}
$$

Die geisterweiterten Symmetriegeneratoren besitzen in der kritischen Dimension die gleichen OPE's und die Moden die gleichen Kommutatorrelationen wie die ursprünglichen Operatoren, jedoch ohne c–Zahl–Terme.

Die Bedingung $Q^2 = 0$ ist notwendig und hinreichend für das Verschwinden der Anomalie [18], somit folgt aus der Forderung nach Nilpotenz des BRST–Operators ebenfalls die kritische Dimension $D = 2$.

I.5 Physikalische Zustände

Im antiperiodische Sektor (NS) des geschlossenen Strings bestehen die Lösungen der Bedingung für physikalische Zustände,

$$
Q\,|\text{phys}\rangle = 0 \ ,
$$

nur aus einen Raumzeit–bosonischen Zustand $|\text{phys}\rangle = |0,p\rangle$ mit $p^2 = 0$. [26]. Ebenso besitzt der offene String nur einen masselosen, skalaren Zustand im Spektrum.

Sind alle fermionischen Felder periodisch (Ramond), so lassen sich mittels der fermionischen Nullmoden d_0^μ aus dem formalen Vakuum des geisterweiterten Fockraums weitere Zustände auf den gleichen Level konstruieren. Die Bedingung für physikalische Zustände, $Q\,|\text{phys}\rangle = 0$, angewendet auf eine allgemeine Linearkombination dieser Zustände liefert als einzige Lösung [18]

$$p^*_\mu d_0^\mu \left|0,p\right\rangle \ , \qquad p^2 = 0 \ .$$

Dieser Raumzeit–bosonische Zustand ist der einzige Zustand im Ramond–Sektor, ein masseloser, longitudinaler Vektor.

Nach der Bosonisierung wird der einzige Zustand noch etwas genauer untersucht.

Kapitel II

Streuamplituden

II.1 Raumzeit–Struktur und Lorentz–Symmetrie

In der kritischen Dimension $D{=}2$ ist die Raumzeit $\mathbb{C}^{1,1}$, d.h. zwei komplexe Dimensionen mit Signatur $(-,+)$. Die zugehörige Lorentzgruppe ist $U(1,1) \cong U(1) \times SU(1,1)$. Die Theorie (und speziell die Streuamplituden) sind invariant unter globaler $U(1,1)$–Drehung der Raumzeit (als "Lorentzgruppe" wird hier die Gruppe $U(1,1)$ der Raumzeit–Transformationen bezeichnet, bezüglich der die Theorie auch (offensichtlich) invariant ist).

Ebenso kann die Theorie auch in 4 reellen Dimensionen mit Signatur $(-,+,-,+)$ betrachtet werden. Die Gruppe der linearen, isometrischen (und homogenen) Transformationen $SO(2,2)$ auf $\mathbb{R}^{2,2}$ ist zwar Invarianzgruppe der eichfixierten Wirkung, jedoch koppeln die Felder Ψ^i und Ψ^{i*} wegen ihrer unterschiedlichen $U(1)$–Ladung auch unterschiedlich an das $U(1)$–Eichfeld, so daß die tatsächliche Symmetrie der Theorie nicht $SO(2,2)$ ist. Die masselosen Darstellungen der Gruppe $U(1,1)$ bestehen nur aus einem Skalar [21]. Es gibt hier also keine Spinor–Darstellungen und es scheint keine Raumzeit–Supersymmetrie möglich zu sein.

Siegel hingegen argumentiert [25], die tatsächlich (versteckte) Symmetrie der Theorie sollte $SO(2,2)$ sein, da die $N{=}4$ Theorie diese Symmetrie besitzt und die $N{=}2$ String im wesentlichen das Gleiche ist wie die $N{=}4$ Theorie (bzw. der $N{=}2$ Fall eine nur teilweise geeichte Version des $N{=}4$ Theorie).

Auch wenn $SO(2,2)$ zumindest nicht die offenkundige Symmetrie des $N{=}2$ Strings ist, sollen für alle Raumzeit–Größen $SO(2,2)$–Indizes gewählt werden, bzw. mittels des Isomorphismuses

$$SO(2,2) \cong SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})'/\mathbb{Z}_2 \tag{2.1.1}$$

zwei $SL(2,\mathbb{R})$–Spinor–Indizes. Die Zuordnung eines reellen (2,2)–Vektors X^μ zu komplexen (1,1)–Vektoren geschieht über

$$X^\pm = (X^{\pm 0}, X^{\pm 1}) = (X^0 \pm iX^2, X^1 \pm iX^3) \ . \tag{2.1.2}$$

Als Bispinor hat X die Form [32]

$$X^{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\mu}^{\alpha\dot{\alpha}} X^{\mu} = \begin{pmatrix} X^0 + X^3 & X^1 + X^2 \\ X^1 - X^2 & X^0 - X^3 \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

mit den "γ–Matrizen" σ_μ. Aus zwei Vektoren p, k können nun folgende bilineare Ausdrücke gebildet werden:

$$\begin{aligned} S(k,p) &= k^+p^- + k^-p^+ = -\varepsilon_{\alpha\beta} k^\alpha \wedge p^\beta \ , \\ C(k,p) &= k^+p^- - k^-p^+ = -i\delta_{\alpha\beta} k^\alpha \wedge p^\beta \ , \\ (k,p)^\pm &= S(k,p) \pm C(k,p) = 2k^\pm p^\mp = (-\varepsilon_{\alpha\beta} \mp i\delta_{\alpha\beta}) k^\alpha \wedge p^\beta \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

wobei die Kontraktion bezüglich der gepunkteten Indizes mit $k^\alpha \wedge p^\beta = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} k^{\alpha\dot{\alpha}} p^{\beta\dot{\beta}}$ bezeichnet ist. Die Kombination $S(k,p)$ ist eine Invariante unter $SO(2,2)$–Transformationen, die anderen Kombination sind nur invariant bzgl. eines $SL(2,\mathbb{R})$–Faktors.

Anders als im Minkowski Raum $\mathbb{R}^{3,1}$ gibt es im $\mathbb{R}^{2,2}$ Ebenen, die nur aus Vektoren mit verschwindender Norm ("Nullvektoren") gebildet werden. Damit ist es möglich, daß ein masseloses Teilchen in zwei ebenfalls Masselose zerfällt (d.h. es gibt drei Vektoren k_i, die nicht parallel sind, mit $k_i^2 = 0$ und $\sum k_i = 0$). Die Beschreibung der Nullebenen gelingt am einfachsten in der $\mathbb{C}^{1,1}$–Schreibweise. Ein Nullvektor $k \neq 0$ erfüllt $|k^{\pm 0}| = |k^{\pm 1}|$ und definiert somit zwei Phasenfaktoren mittels [22]

$$k^{+0} - e^{i\alpha} k^{-1} = 0 \ , \qquad k^{+0} - e^{i\beta} k^{+1} = 0 \ . \tag{2.1.5}$$

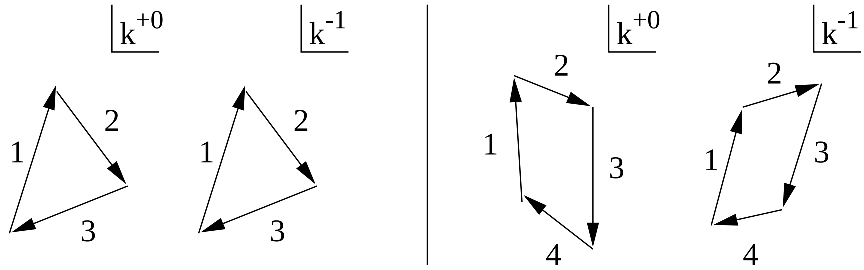
Umgekehrt ist jeder Vektor, der eine dieser Beziehungen erfüllt , ein Nullvektor. Jede dieser komplexen Gleichungen definiert eine Ebene N_α bzw. N_β. Sind zwei Vektoren einer Nullebene gegeben, beispielsweise $p, k \in N_\alpha$, so ist auch

$$(k+p)^2 = k^2 + 2kp + p^2 = 0 \ , \tag{2.1.6}$$

womit auch das (2,2)–Skalarprodukt zwischen Vektoren einer Nullebene verschwindet. Der spezielle Fall in der M–Punkt–Amplitude, daß alle Impulse k_i in der gleichen Nullebene liegen, erscheint in der expliziten Berechnung der Tree–Level–Amplituden als Sonderfall, kann aber für $M \geq 4$ durch stetige Fortsetzung erledigt werden.

Für die Streuung von M masselosen Teilchen, $k_i^2 = 0$ und $\sum k_i = 0$, gilt ebenso $\sum k_i^{+0} = \sum k_i^{\pm 1} = 0$, somit können diese beiden komplexen Komponenten als Polygone in der komplexen

Ebene dargestellt werden:



Die Komponenten k^{+0} und $k^{\pm 1}$

Sind zwei Impulse in der gleichen Nullebene (hier N_α), so ist der Winkel zwischen den Komponenten k_i^{+0} und k_i^{-1} gleich. Alle Impulse der 3–Punkt–Streuung liegen also zwangsläufig in einer (N_α oder N_β) Nullebene, während die Impulse für $M \geq 4$ offenbar nur für ganz spezielle Konfigurationen in der gleichen Nullebene liegen (die zugehörigen Polygone sind dann deckungsgleich oder spiegelbildlich–deckungsgleich). Daß die 3–Punkt–Amplitude nur aus diesem Sonderfall besteht, ist letztlich auch der Grund dafür, daß diese Amplitude nicht auch verschwindet.

II.2 Bosonisierung und Bildladungen

Für die Konstruktion der Vertexoperatoren werden die antikommutierenden Weltflächefelder und die SUSY–Geister bosonisiert [27]. Die Reparametrisierungs–Geister (b, c) werden durch ein freies Boson σ ausgedrückt mittels

$$c \cong e^{+\sigma} \ , \qquad b \cong e^{-\sigma} \tag{2.2.1}$$

wobei die OPE des Bosons $\sigma(z)\sigma(w) \sim +\ln(z-w)$ ist und somit die Operatorprodukt–Entwicklung des (b, c)–Systems reproduziert wird. Ebenso wird für die $U(1)$–Geister

$$\tilde{c} \cong e^{+\tilde{\sigma}} \ , \qquad \tilde{b} \cong e^{-\tilde{\sigma}} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{\sigma}(z)\tilde{\sigma}(w) \sim +\ln(z-w) \tag{2.2.2}$$

gesetzt. Die Weltfläche–Spinoren werden in $\mathbb{C}^{1,1}$–Lichtkegel–Koordinaten bosonisiert durch Felder $\phi^\pm$ mit $\phi^\pm(z)\phi^\pm(w) \sim +\ln(z-w)$:

$$\psi^0 \pm \psi^1 \cong 2iC^+ e^{\pm\phi^+} \ , \qquad \psi^{0*} \pm \psi^{1*} \cong 2iC^- e^{\pm\phi^-} \ . \tag{2.2.3}$$

Die antikommutierenden Faktoren $C^{\pm}$ mit $(C^{\pm})^2) = \{C^{\pm}, C^{\mp}\} = 0$ (*Kozykel-Fektoren*) stellen sicher, daß die bosonisierten Ausdrücke die gleichen Antikommutator–Relationen besitzen wie die Weltfläche–Fermionen. Die kommutierenden SUSY–Geister können ebenfalls ausgedrückt werden durch Bosonen $\varphi^{\pm}$ und zusätzliche antikommutierenden Felder $\eta^{\pm}, \xi^{\mp}$ mittels

$$\gamma^{\pm} \cong \eta^{\pm} e^{+\varphi^{\pm}} \ , \qquad \beta^{\mp} \cong e^{-\varphi^{\pm}} \partial \xi^{\mp} \ , \tag{2.2.4}$$

wobei $\varphi^{\pm}(z)\varphi^{\pm}(w) \sim -\ln(z-w)$ und $\xi^{\mp}(z)\eta^{\pm}(w) \sim \dfrac{2}{z-w}$. Schließlich können die zusätzlichen Felder $\xi^{\mp}$ und $\eta^{\pm}$ noch bosonisiert werden,

$$\xi^{\pm} \cong \sqrt{2} e^{+\theta^{\pm}} \ , \qquad \eta^{\mp} \cong \sqrt{2} e^{-\theta^{\pm}} \qquad \text{mit} \qquad \theta(z)\theta(w) \sim +\ln(z-w) \ . \tag{2.2.5}$$

Die Einführung zusätzlicher Felder für die SUSY–Geister führt zu einer Vergrößerung der Fockraums. In der Bosonisierung treten nur die Operatoren $e^{\varphi^{\pm} - \chi^{\pm}}$ auf, andere Kombinationen führen zur *Bildentartung*, d.h. die ursprünglichen Zustände werden zusätzlich durch zwei ganz Zahlen (π_+, π_-) gekennzeichnet, den Bildladungen. Die Bildladungs–Operatoren sind

$$\Pi_{\pm} = -\frac{1}{2} \oint [\beta^{\pm}\gamma^{\mp} + \eta^{\pm}\xi^{\mp}] = -\frac{1}{2} \oint [-\partial\varphi^{\mp} + \partial\theta^{\mp}] \ , \tag{2.2.6}$$

dabei ist $\oint = \dfrac{1}{2\pi i} \oint dz$. In den Vertexoperatoren zählt $\Pi_{\pm}$ die Potenzen von $e^{\varphi^{\pm}}$ und $e^{\chi^{\mp}}$ ab [6]. Damit hat der Operator $e^{q_{\pm}\varphi^{\mp}}$ die Bildladung $\Pi_{\pm} = q_{\pm}$ und Zustände mit einem c–Geist, Impuls k und verschiedenen Bildladungen $q_{\pm}$ können aus dem Vakuum erzeugt werden durch Anwendung des Operators [29]

$$|k, q_+, q_-\rangle \cong e^{ikZ(0)} e^{\sigma(0)} e^{q_+\varphi^- + q_-\varphi^+} |0\rangle \ . \tag{2.2.7}$$

Hierbei ist $|0\rangle$ das Super–$SL(2)$–invariante Vakuum im NS–Sektor mit verschwindendem Impuls, konformer Dimension $h = 0$ und verschwindender $U(1)$–Ladung.

Die freien Bosonen der Bosonisierung besitzen folgende Hintergrundladungen $\tilde{Q}$ [14]:

$$\tilde{Q}_{\sigma} = 3 \ , \quad \tilde{Q}_{\tilde{\sigma}} = 1 \ , \quad \tilde{Q}_{\phi} = 0 \ , \quad \tilde{Q}_{\varphi} = -2 \ , \quad \tilde{Q}_{\theta} = 1 \ . \tag{2.2.8}$$

Ist ρ ein Boson aus der Bosonisierung der Geistsysteme, so sind in der Korrelationsfunktion der Tree–Level–Amplituden die Operatoren $e^{q_j\rho}$ so auszuwählen, das die q_j die Hintergrundladung kompensieren [27],

$$\sum_j q_j = -\tilde{Q}_{\rho} \ . \tag{2.2.9}$$

Diese liefert als Auswahlregeln für die Tree–Level–Amplituden die totale Bildladung $(\pi_+, \pi_-) = (-2, -2)$, drei Reparametrisierungsgeister und ein $U(1)$–Geist in der Korrelationsfunktion.

Der Operator des spektralen Flusses kann mit den bosonisierten Feldern angegeben werden durch

$$\mathrm{SFO}(z,\theta) = \exp\{\theta(-\phi^+ + \phi^- + \varphi^+ - \varphi^- + \tilde{b}c)\}(z) \ . \tag{2.2.10}$$

Der SFO ist BRST–invariant aber nicht BRST–trivial [29]. Jedoch ist dier Ableitung $\partial\mathrm{SFO}(z,\theta)$ BRST–trivial, so daß das Argument des SFO in einer Korrelationsfunktion beliebig verschoben werden kann. Die Einsetzungspunkte z_j eines Produktes

$$\prod_j \mathrm{SFO}(z_j,\theta_j) \tag{2.2.11}$$

mit $\sum\theta_j = 0$ können zu einem gemeinsamen Punkt verschoben werden (und das Produkt zur Identität gemacht), somit ist dieses Produkt BRST–äquivalent zur Identität.

Der SFO ist ein zusätzlicher Bildwechseloperator. Die Anwendung des $\mathrm{SFO}(z,\theta)$ auf einen Vertexoperator im Bild (π_+,π_-) verschiebt das Bild zu $(\pi_+ + \theta, \pi_- - \theta)$. Mit dem Parameter $\theta = \pm\frac{1}{2}$ vermittelt der SFO zwischen Vertexoperatoren im NS– und R–Sektor. Eine Korrelationsfunktion von Vertexoperatoren im R–Sektor nach den Auswahlregeln der Tree–Level–Amplitude unterscheidet sich von der entsprechenden Amplitude im NS–Sektor nur um ein Produkt (2.2.11). Somit sind die Amplituden in beiden Sektoren gleich und es reicht aus, sich auf den NS–Sektor zu beschränken.

Trotzdem entspricht der SFO nicht einer entsprechenden Kombination von Bildwechseloperatoren $X^\pm$ da die Impulse in den Vertexoperatoren verändert werden [6]. Allerdings kommutiert der SFO mit der Bildwechseloperatoren $X^\pm$ bis auf BRST–exakte Terme [31].

II.3 Vertexoperatoren und Streuamplituden

Die Feynman–Diagramme der Wechselwirkung von Punktteilchen entsprechen in der Stringtheorie Flächen, die konform abgebildet werden können auf kompakten Riemann–Flächen mit bestimmten Geschlecht g (geschlossener String) oder Flächen mit einer bestimmten Anzahl von "Fenstern", d.h. mit einer bestimmten Zusammenhangszahl h. Die ein– und auslaufenden freien Zustände entsprechen dann inneren Punkten der Riemann–Fläche bzw. Randpunkten des h–fach zusammenhängenden Gebiets. Die Stringzustände werden in diesen Punkten durch Vertexoperatoren eingesetzt. Der Entwicklungen nach Anzahl der Loops entspricht hier der Entwichlung nach den Größen g und h. Die Tree–Level–Amplituden sind der Teil der Entwicklung mit $g = 0$ (topologisch die Riemann–Kugel S^2) bzw. $h = 1$ (einfach zusammenhängendes Gebiet). Der

Korrelator der Vertexoperatoren ist zu integrieren über alle Konfigurationen "modulo konformer Äquivalenz". Es reicht also, Vertexoperatoren auf der Riemannkugel (oder der komplexen Ebene unter Vernachlässigung des Punktes ∞) bzw. auf dem Rand der oberen Halbebene zu betrachten und die global konforme Gruppe der komplexen bzw. reellen Möbiustransformationen

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \ , \quad ad-bc=1 \ , \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ bzw. } a,b,c,d \in \mathbb{R} \tag{2.3.1}$$

zu berücksichtigen [1,2].

Eine weitere topologische Invariante des geschlossenen N=2 Strings (und damit durch konforme Transformation nicht zu verändern) ist die Instanton–Anzahl $c = \int dF$, wobei dF die Feldstärken–2–Form des Maxwellfeldes A_a ist [29]. Die gesamte (M–Punkt) Tree–Level–Amplitude ergibt sich zu

$$A_M = \sum_c \lambda^c \int \langle \cdots \rangle_c \ , \tag{2.3.2}$$

wobei λ die Maxwell–Kopplungskonstante ist (die Gravitations–Kopplungskonstante κ ist hier weggelassen). $\langle \cdots \rangle_c$ ist der Korrelator von M Vertexoperatoren entsprechend der Instanton–Anzahl c.

Eine Instanton–Anzahl c wird erzeugt durch das Einsetzen von Spektral–Fluß–Operatoren SFO(z_j, θ_j) mit $\sum \theta_j = c$ in die Korrelationsfunktion [31]. Gleichzeitig werden die Bildladung der Vertexoperatoren asymmetrisch gewählt als

$$\sum (\pi_+, \pi_-) = (-2-c, -2+c) \ . \tag{2.3.4}$$

Die in den folgenden Berechnungen gewählten Vertexoperatoren sind [27]

$$\begin{aligned} V^{c(\tilde{c})}_{(-1,-1)} &= (\tilde{c}) c e^{\varphi^- + \varphi^+} e^{ikZ} \ , \\ V^{\int}_{(0,0)} &= \int \Big(C(k, \partial Z) - \frac{i}{4} (k,\Psi)^+ (k,\Psi)^- \Big) e^{ikZ} \ , \\ V^{c}_{(0,0)} &= c \Big\{ \big(C(k,\partial Z) - \frac{i}{4} (k,\Psi)^+ (k,\Psi)^- \big) - \frac{1}{2} (\gamma^+ (k,\Psi)^+ - \gamma^- (k,\Psi)^-) \Big\} e^{ikZ} \ . \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Beim geschlossenen String gibt es keine ausgezeichnete Anordnung der Einsetzungpunkte der Vertexoperatoren, während beim offenen String zyklisch inäquivalente Anordnungen der externen Linien durch "gruppentheoretische Faktoren" gewichtet werden können [23,24]. Diese Faktoren sind von Chan und Paton [8] eingeführt worden, um z.B. Isospin in das Veniziano–Modell einzuführen. Dabei sind die zyklisch inäquivalenten Anordnungen durch die Spur von Produkten von Paulimatrizen gewichtet.

Bei der Amplitude des offenen Strings kann dieser Faktor ebenfalls eingeführt werden: Die Dreipunkt–Amplitude des offenen Strings und der holomorphe Anteil des geschlossenen String ergibt sich aus dem Korrelator der Vertexoperatoren

$$A_3 = \left\langle V^{c\tilde{c}}_{(-1,-1)}(0) V^{c}_{(-1,0)}(1) V^{c}_{(0,-1)}(\infty) \right\rangle = c_{12} \ , \tag{2.3.6}$$

wobei für die drei Punkte z_i eine bestimmte Anordnung gewählt worden ist. Marcus [23] gewichtet dieses Ergebnis für den offenen String durch einen antisymmetrischen Tensor f^{abc},

$$A_3^{\text{offen}} = i c_{12} f^{abc} \ . \tag{2.3.7}$$

Da jedoch die 4–Punkt–Amplitude verschwindet, ergibt sich durch die Faktorisierungs–Bedingung der Amplituden [8] keine weitere Einschränkung, jedoch schließt Marcus aus einem Vergleich mit der effektiven Feldtheorie [23], daß der Tensor f^{abc} die Strukturkonstante einer Lie–Algebra eines Produktes einer halbeinfachen Gruppe mit einer Anzahl $U(1)$–Faktoren sein sollte.

In der anschließenden Rechnung spielen Chan–Paton–Faktoren keine Rolle, denn die Amplituden des offenen Strings verschwinden für jede vorgegebene zyklische Ordnung.

Der 3–Punkt–Amplitude des geschlossenen Strings,

$$A_3^g = |c_{12}|^2 \tag{2.3.8}$$

faktorisiert dabei offenbar in ein Produkt aus zwei Amplituden des offenen Strings (dieses gilt auch allgemeiner).

II.4 Amplituden des offenen und geschlossenen Strings

Die Vertexoperatoren und Auswahlregeln für die Amplituden des offenen und geschlossenen Strings sind gleich, so daß sich die Amplituden nur durch die Integration der Korrelationsfunktion unterscheiden. Nach Kawai, Lewellen und Tye [13] kann die Amplitude des geschlossenen Strings ausdrücken werden durch das Produkt zweier Amplituden des offenen Strings (multipliziert mit einem Phasenfaktor und summiert über nichtzyklische Permutationen der externen Linien). Dieses ist zwar berechnet mit Blick auf den N=1 und heterotischen String, jedoch gilt diese Zerlegung allgemeiner, da die Korrelationsfunktionen auch beim N=2 String von der Struktur her gleich sind. Es ist eine Relation zwischen Integralen

$$\int d^2 z_2 \cdots d^2 z_{M-2} I(z_j) I(\bar{z}_j) \quad \text{und} \quad \int\limits_{0<z_2<\cdots<z_{M-3}<1} dz_2 \cdots dz_{M-2} I(z_j) \ , \tag{2.4.1}$$

sowie allen zyklisch inäqivalenten Permutationen im zweiten Integral. Aufgrund der verbleibenden $SL(2)$–Invarianz ist $z_1 = 0$, $z_{M-1} = 1$ und $z_M = \infty$ gewählt. Der Integrand ist von der Form

$$I = \sum_k \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\alpha_{ij}^k} \ , \tag{2.4.2}$$

wobei sich die Exponenten α_{ij}^k für feste i, j und verschiedene Werte $k = k_1, k_2$ nur um ganzzahlige Werte unterscheiden, so daß der Integrand (als Funktion eines z_{k_1}) beim Umlauf eines Verzweigungspunktes z_{k_2} nur einen Phasenfaktor aufsammelt.

Die Relationen entstehen dadurch, daß die Integration $\int d^2z$ als Integration $\int dx \int dy$ umgeschrieben wird und die y–Integration als Wegintegral in einer komplexen y–Ebene aufgefaßt wird. Der Integrand $I(z_j)I(\bar{z}_j)$ ist komplex analytisch *als Funktion von* y, so daß alle y–Integrationswege auf die imaginäre Achse verschoben werden können, ohne den Wert des Integrals zu ändern (es ist jedoch auf die korrekte Verzweigung und den richtigen Umlauf der Verzweigungspunkte zu achten). Mit der Umbenennung $\tilde{y} = iy$ und $\xi = x + \tilde{y}$, $\eta = x - \tilde{y}$ wird dieses zum zweifachen reellen Integral $\int d\xi I(\xi) \cdot \int d\eta I(\eta)$. Der Umlauf der Verzweigungspunkte und damit die Wahl eines möglichen Phasenfaktors hängt von der zyklischen Ordnung der Punkte ξ und η ab, so daß als Zerlegung der Amplitude des geschlossenen String die Formel bleibt (vgl. [12])

$$A_M^g \propto \sum_{P,P'} A_M^o(P) A_M^{o\,*}(P') e^{iF(P,P')} \ , \tag{2.4.3}$$

wobei die Summe über alle nichtzyklischen Permutationen geht und $F(P, P')$ ein nicht näher bestimmter Phasenfaktor ist. Wenn gezeigt ist, daß die Amplitude des offenen Strings für $M \geq 4$ für alle zyklischen Anordnungen der externen Linien verschwindet, so verschwindet auch die Amplitude des geschlossenen Strings.

Kapitel III

Berechnung der 5–Punkt–Amplitude

III.1 Berechnung der Korrelationsfunktion

Die wesentlichen Bestandteile der Berechnung der M–Punkt–Amplitude sind am Beispiel der 5–Punkt–Amplitude zu erkennen. Weite Teile der Rechnung lassen sich in diesem Beispiel explizit durchführen und auf die Systematik untersuchen. Diese läßt sich dann meistens direkt auf den M–Punkt–Fall übertragen.

Betrachtet wird die Streuung von 5 Teilchen mit Impulsen k_j, $j = 1, \ldots, 5$. Impulserhaltung bedeutet $\sum k_i = 0$. Die 5–Punkt–Amplitude ist nun die Korrelationsfunktion von Vertexoperatoren zu den Impulsen k_i mit totaler Bildladung $(\pi_+, \pi_-) = (-2, -2)$, drei Reparametrisierungs–Geister c und ein $U(1)$ – Geist $\tilde{c}$. Eine mögliche Wahl ist demnach

$$A_5 = \left\langle V^{\int}_{(0,0)}(z_1) V^{\int}_{(0,0)}(z_2) V^{c}_{(0,0)}(z_3) V^{c}_{(-1,-1)}(z_4) V^{\tilde{c}c}_{(-1,-1)}(z_5) \right\rangle \ . \tag{3.1.1}$$

Der Anteil ohne c–Geist im Vertexoperator $V^{c}_{(0,0)}$ leistet keinen Beitrag zum Korrelator. Es bleibt für die Amplitude das Integral über die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} &\left\langle \tilde{c}(z_5)\ c(z_3)c(z_4)c(z_5)\ e^{-\varphi^- - \varphi^+}(z_4) e^{-\varphi^- - \varphi^+}(z_5) \right\rangle \\ &\cdot \left\langle \prod_{j=1}^{3} \left\{ C(k, \partial Z(z_j)) - \frac{i}{4}(k,\psi)^+(z_j)(k,\psi)^-(z_j) \right\} \prod_{j=1}^{5} e^{ikZ}(z_j) \right\rangle \ . \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Die erste Korrelationsfunktion liefert nur einen (z_1, z_2)–unabhängigen Vorfaktor vor dem Integral und wird nicht weiter betrachtet. Der zweite Teil soll nach dem Wick–Theorem vollständig kontrahiert werden.

Um die Polstellen 2. Ordnung zu beseitigen, wird die Korrelationsfunktion um einige totale

Ableitungen modifiziert:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\langle \prod_j \left\{ C(\cdots) + S(k_j,\partial Z) - \frac{i}{4}(\cdots)^+(\cdots)^- \right\} \prod e^{ik_j Z} \right\rangle \\
&+\frac{1}{2}\left\langle \prod_j \left\{ C(\cdots) - S(k_j,\partial Z) - \frac{i}{4}(\cdots)^+(\cdots)^- \right\} \prod e^{ik_j Z} \right\rangle \\
=&\left\langle \prod_j \left\{ C(\cdots) - \frac{i}{4}(\cdots)^+(\cdots)^- \right\} \prod e^{ik_j Z} \right\rangle \\
&+\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in P_3} \Big\langle S(k_{\sigma(1)},\partial Z)(z_{\sigma(1)}) S(k_{\sigma(2)},\partial Z)(z_{\sigma(2)}) \\
&\qquad \cdot \left(C(k_{\sigma(3)},\partial Z)(z_{\sigma(3)}) - \frac{i}{4}(\cdots)^+(\cdots)^- \right) \prod e^{ik_j Z(z_j)} \Big\rangle \ ,
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

mit $C(\cdots) = C(k_j,\partial Z)$ und $(\cdots)^\pm = (k_j,\psi)^\pm(z_j)$. Die Summe läuft dabei über alle Permutationen σ der Menge $\{1,2,3\}$. Die Summanden sind von der Form

$$4\frac{\partial}{\partial z_{\sigma(1)}}\frac{\partial}{\partial z_{\sigma(2)}}\left\langle \left(C(\cdots) - \frac{i}{4}(\cdots)^+(\cdots)^- \right) \prod e^{ikZ} \right\rangle \tag{3.1.4}$$

also Ableitungen einer Korrelationsfunktion. Wegen $\sigma(1) \neq \sigma(2)$ ist jeder Term auch Ableitung nach z_1 oder z_2, über die in der Amplitude schließlich integriert wird. Das Verschwinden dieser Ableitungen nach der Integration wird später in einem allgemeineren Zusammenhang gezeigt, vorerst werden diese Terme einfach ignoriert.
Es sind also Korrelationen von der Form

$$\left\langle \prod_1^3 \left\{ \pm(k_j,\partial Z)^\pm(z_j) - \frac{i}{4}(k_j,\psi)^+(z_j)\cdot(k_j,\psi)^-(z_j) \right\} \prod_1^5 e^{ik_j Z(z_j)} \right\rangle \tag{3.1.5}$$

auszuwerten. Es gibt jetzt keine nichtverschwindende Kontraktion zwischen den Operatoren ∂Z und damit keine Polstellen 2. Ordnung. Es treten zwar noch Kontraktionen $\langle (k_l,\partial Z)^+ ik_m Z\rangle \langle (k_m,\partial Z)^+ ik_l Z\rangle$ auf, diese heben sich allerdings gegen entsprechende fermionische Anteile weg, wie sich noch herausstellen wird.

Die Propagatoren der reellen Massefelder Z^i, Ψ^i sind gegeben durch

$$\left\langle Z^i(z)Z^j(w)\right\rangle = -\eta^{ij}\ln(z-w)\ , \qquad \left\langle \Psi^i(z)\Psi^j(w)\right\rangle = -\frac{\eta^{ij}}{z-w}\ , \tag{3.1.6}$$

wobei $\eta = diag(-+-+)$ der Metriktensor in $\mathbb{R}^{(2,2)}$ ist. In der $\mathbb{C}^{(1,1)}$ Schreibweise bedeutet dieses

$$\left\langle Z^{\pm\mu}(z)Z^{\mp\nu}(w)\right\rangle = -2\gamma^{\mu\nu}\ln(z-w)\ , \qquad \left\langle \Psi^{\pm\mu}(z)\Psi^{\mp\nu}(w)\right\rangle = -\frac{2\gamma^{\mu\nu}}{z-w} \tag{3.1.7}$$

mit $\gamma = diag(-+)$ als Metriktensor in $\mathbb{C}^{(1,1)}$. Es ist $Z^{+\mu} = Z^{\mu}$ und $Z^{-\mu} = Z^{\mu *}$ gesetzt (und ebenso für $\Psi^{\pm\mu}$) zur eindeutigen Unterscheidbarkeit der komplexen und reellen Felder, die mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet werden (ebenso wie die entsprechenden Bispinoren). Wie für einen allgemeinen Vektor ist hier $Z^{\pm 0} = Z^0 \pm iZ^2$ und $Z^{\pm 1} = Z^1 \pm iZ^3$ als Zerlegung in reelle Felder gewählt. Die elementaren Kontraktionen in Bispinor–Notation sind

$$\left\langle Z^{\alpha\dot\alpha}(z) Z^{\beta\dot\beta}(w)\right\rangle = 2\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\ln(z-w) \ , \qquad \left\langle \Psi^{\alpha\dot\alpha}(z)\Psi^{\beta\dot\beta}(w)\right\rangle = \frac{2\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}}{z-w} \ , \tag{3.1.8}$$

mit $\varepsilon^{+-} = \varepsilon^{\dot+\dot-} = +1$.

Als weitere Bezeichnungen seien folgende Größen eingeführt:

$$\begin{aligned} &c_{ij} = C(k_i,k_j) \ , \qquad s_{ij} = S(k_i,k_j) \ , \\ &k_{ij}^{\pm} = \frac{1}{2}(k_i,k_j)^{\pm} \quad \text{sowie} \quad k_{ij} = k_i k_j = \frac{1}{2}s_{ij} = \mathrm{Re}\, k_{ij}^{\pm} \ . \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Damit lassen sich die als die in den Kontraktionen auftretenden Ausdrücke berechnen,

$$\begin{aligned} \left\langle (k_i,\partial Z)^{\pm}(z_i)\ ik_j Z(z_j)\right\rangle &= -\frac{2ik_{ij}^{\pm}}{z_{ij}} \\ \frac{i}{4}\left\langle (k_i,\psi)^{\pm}(z_i)\ (k_j,\psi)^{\mp}(z_j)\right\rangle &= -\frac{2ik_{ij}^{\pm}}{z_{ij}} \ . \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Die Gleichheit dieser Ausdrücke führt dazu, daß sich etliche Ausdrücke in der Kontraktion wegheben. Die Korrelation der bosonischen Weltfläche–Felder Z ergibt sich aus folgendem allgemeineren Fall: Sind $A_1,\ldots,A_n$ eine Auswahl von Operatoren $(k_j,\partial Z)^+$ oder $(k_j,\partial Z)^-$ (jedoch die gleiche Wahl für alle A_k's, so daß $\langle A_k, A_l\rangle = 0$), $B_1,\ldots,B_m$ Operatoren von der Form $B_i = q_i Z(z_i)$ (mit $\sum q_i = 0$), so ist

$$\left\langle A_1\cdots A_n : e^{B_1} : \cdots : e^{B_m} :\right\rangle = \left(\sum_{j_1=1}^{m}\langle A_1 B_{j_1}\rangle\right)\cdots\left(\sum_{j_n=1}^{m}\langle A_n B_{j_n}\rangle\right)\cdot\exp\left\{\sum_{i<j}\langle B_i B_j\rangle\right\} \ . \tag{3.1.12}$$

Falls ein Produkt $A_k e^{B_i}$ normalgeordnet ist, so ist in der Summe der Term mit $j_k = i$ auszulassen.

Nach dem Ausmultiplizieren der Produkte in den Korrelationsfunktionen liefern nur Terme mit $0,2,3$ verschiedenen fermionischen Operatoren $(k,\psi)^+\cdot(k,\psi)^-$ einen Beitrag zur Korrelationsfunktion. Die vollständige Kontraktion der bosonischen Anteile liefert

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_1^3 (k_j,\partial Z)^+(z_j)\prod_1^5 e^{ik_j Z(z_j)}\right\rangle &= (-2i)^3 \sum_{\substack{j,l,m=1\\ j\neq 1, l\neq 2, m\neq 3}}^{5} \frac{k_{1j}^+ k_{2l}^+ k_{3m}^+}{z_{1j}z_{2l}z_{3m}}\prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \\ \left\langle (k_l,\partial Z)^+(z_l)\prod_1^5 e^{ik_j Z(z_j)}\right\rangle &= (-2i)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{5}\frac{k_{lj}}{z_{lj}}\prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}^+} \qquad l = 1,2,3 \ . \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Analog für $-(k_j, \partial Z)^-(j)$:

$$\left\langle \prod_1^3 -(k_j,\partial Z)^-(z_j) \prod_1^5 e^{ik_j Z(z_j)} \right\rangle = (2i)^3 \sum_{\substack{j,l,m=1\\ j\neq 1, l\neq 2, m\neq 3}}^{5} \frac{k_{1j}^- k_{2l}^- k_{3m}^-}{z_{1j} z_{2l} z_{3m}} \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}}$$
$$\left\langle -(k_l,\partial Z)^-(z_l) \prod_1^5 e^{ik_j Z(z_j)} \right\rangle = (2i) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{5} \frac{k_{lj}^-}{z_{lj}} \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \qquad l = 1,2,3\;. \tag{3.1.14}$$

Die Korrelation der fermionischen Operatoren kann wie folgt angegeben werden: Für eine Auswahl von zwei Indizes $l, m \in \{1,2,3\}$, $l \neq m$ gibt es die Korrelation von zwei Operatoren $-\frac{i}{4}(k_i, \psi)^+ \cdot (k_i\psi)^-$:

$$\left(-\frac{i}{4}\right)^2 \left\langle (k_l,\Psi)^+(z_l)(k_l,\Psi)^-(z_l)\;(k_m,\Psi)^+(z_m)(k_m,\Psi)^-(z_m)\right\rangle$$
$$= (-2i)^2(-1)\frac{k_{lm}^+ k_{ml}^+}{z_{lm} z_{ml}} = (-2i)^{|\{m,l\}|} \sum_{\substack{\sigma\in P(\{m,l\})\\ \sigma(j)\neq j}} (-1)^{\zeta(\sigma)} \frac{k_{l,\sigma(l)}^+ k_{m,\sigma(m)}^+}{z_{l,\sigma(l)} z_{m,\sigma(m)}} \tag{3.1.15}$$

Der zweite Ausdruck ist ein Vorgriff auf die Verallgemeinerung auf die M–Punkt–Amplitude. Die Summe geht über alle fixpunktfreien Permutationen auf der Indexmenge $\{m,l\}$, $|\{m,l\}|$ bezeichnet die Anzahl der Indizes und $\zeta(\sigma)$ ist die Anzahl der Zyklen in der Permutation σ. Da jede Permutation auf zwei und drei Indizes ohne Fixpunkt aus genau einem Zyklus besteht, ist dieser Term in der 5–Punkt–Amplitude trivial; erst in der M–Punkt–Amplitude gewinnt diese Größe eine Bedeutung.

Die einzige fixpunktfreie Permutation aus $\{l,m\}$ ist $\sigma(l) = m$, $\sigma(m) = l$. Zwei Elemente und ein Zyklus in der Permutation ergibt das Vorzeichen (-1).

Weiter gibt es noch die Korrelation von drei verschiedenen fermionischen Ausdrücken:

$$(-\frac{i}{4})^3 \left\langle k_1^+\Psi^-(z_1)k_1^-\Psi^+(z_1)\; k_2^+\Psi^-(z_2)k_2^-\Psi^+(z_2)\; k_3^+\Psi^-(z_3)k_3^-\Psi^+(z_3)\right\rangle$$
$$= (-2i)^3(-1)\left(\frac{k_{12}^+ k_{23}^+ k_{31}^+}{z_{12} z_{23} z_{31}} + \frac{k_{13}^+ k_{21}^+ k_{32}^+}{z_{13} z_{21} z_{32}}\right)$$
$$= (-2i)^{|\{1,2,3\}|} \sum_{\substack{\sigma\in P_3\\ \sigma(j)\neq j}} (-1)^{\zeta(\sigma)} \frac{k_{1,\sigma(1)}^+ k_{2,\sigma(2)}^+ k_{3,\sigma(3)}^+}{z_{1,\sigma(1)} z_{2,\sigma(2)} z_{3,\sigma(3)}} \tag{3.1.16}$$

Die zwei fixpunktfreie Permutationen auf der Menge $\{1,2,3\}$ sind hier $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$ und $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$, beide mit $\zeta(\sigma) = 1$ (Anzahl der Zyklen).

Insgesamt ergibt sich für die Korrelation (3.1.5) mit " + ":

$$\langle \ldots \rangle = \left\langle \left\{ \prod_1^3 (k_j, \partial Z)^+ + \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{i}{4}\right)^2 (k_j, \partial Z)^+ \cdot \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^3 (k_l\psi)^+ \cdot (k_l\psi)^- \right] \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{i}{4}\right)^3 \prod_1^3 (k_j\psi)^+ \cdot (k_j\psi)^- \right\} \prod e^{ik_j Z} \right\rangle$$
$$= \left[(-2i)^3 \sum_{\substack{j,l,m=1\\ j\neq 1, l\neq 2, m\neq 3}}^5 \frac{k_{1j}^+ k_{2l}^+ k_{3m}^+}{z_{1j} z_{2l} z_{3m}} - (-2i) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^5 \frac{k_{1j}^+}{z_{1j}} (-2i)^2 \frac{k_{23}^+ k_{32}^+}{z_{23} z_{32}} - (-2i) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^5 \frac{k_{2j}^+}{z_{2j}} (-2i)^2 \frac{k_{13}^+ k_{31}^+}{z_{13} z_{31}} \right.$$
$$\left. - (-2i) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 3}}^5 \frac{k_{3j}^+}{z_{3j}} (-2i)^2 \frac{k_{12}^+ k_{21}^+}{z_{12} z_{21}} - (-2i)^3 \left(\frac{k_{12}^+ k_{23}^+ k_{31}^+}{z_{12} z_{23} z_{31}} + \frac{k_{13}^+ k_{21}^+ k_{32}^+}{z_{13} z_{21} z_{32}} \right) \right] \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \tag{3.1.17}$$

Alle Audrücke, die durch die Kontraktion fermionischer Operatoren entstanden sind, heben sich weg durch Terme in der Summe der rein bosonischen Kontraktionen (die Dreifachsumme über j, l, m). Das liegt daran, daß z.B. eine Kontraktion fermionische Weltfläche–Felder

$$-\left(\frac{i}{4}\right)^2 \left\langle (k_1\psi)^+ (k_2\psi)^- \right\rangle \left\langle (k_2\psi)^- (k_1\psi)^+ \right\rangle \tag{3.1.18}$$

den gleichen Wert mit umgekehrem Vorzeichen liefert wie ein entsprechender Ausdruck mit bosonischen Feldern,

$$\left\langle (k_1, \partial Z)^+ \; ik_2 Z \right\rangle \left\langle (k_2, \partial Z)^+ \; ik_1 Z \right\rangle \;, \tag{3.1.19}$$

und ebenso für drei Kontraktionen.

Es bleibt also nur ein Teil der ersten Summe,

$$\langle 3.1.5; + \rangle = (-2i)^3 \sum_{j,l,m} \frac{k_{1j}^+ k_{2l}^+ k_{3m}^+}{z_{1j} z_{2l} z_{3m}} \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \;, \tag{3.1.20}$$

mit einem noch zu bestimmenden Summationsbereich für (j, l, m). Dieser kann angegeben werden durch alle Abbildungen $i : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, die keinen Zyklus besitzen (d.h. keine Zahlen $j_1, \ldots, j_n$ mit $j_2 = i(j_1), \ldots, j_n = i(j_{n-1}) = j_1$). Die Summe geht über alle diese Abbildungen mit der Zuordnung $j = i(1), l = i(2)$ und $m = i(3)$.

Der Ausdruck (240) mit "−" liefert die gleiche Summe, jedoch mit komplex konjugiertem Zähler in der Summe und anderem Vorzeichen, also

$$\langle 3.1.5; - \rangle = -(-2i)^3 \sum_{j,l,m} \frac{k_{1j}^- k_{2l}^- k_{3m}^-}{z_{1j} z_{2l} z_{3m}} \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \;. \tag{3.1.21}$$

Die Invarianz unter Möbius–Transformation erlaubt den Grenzübergang $z_5 \to \infty$. Damit fallen in (3.1.20) und (3.1.21) alle Summanden weg, für die ein Index j, l, m gleich 5 ist.

Die 5–Punkt–Amplitude ist dann proportional zu

$$A_5 \propto \int \sum_{j,l,m} \frac{\mathrm{Im}\,(k_{1j}^+ k_{2l}^+ k_{3m}^+)}{z_{1j} z_{2l} z_{3m}} \prod z_{pq}^{k_{pq}} = \int \sum_{j,l,m} \alpha(j,l,m) N(j,l,m) \prod z_{pq}^{k_{pq}} \ , \tag{3.1.22}$$

wobei die Summation die folgenden 16 Werte umfaßt:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} \mathrm{Nr.} & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ j & : & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ l & : & 3 & 4 & 4 & 4 & 1 & 3 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ m & : & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{array} \ . \tag{3.1.23}$$

Als Abkürzung ist in (3.1.22) gesetzt:

$$\alpha(j,l,m) = \mathrm{Im}\,(k_{1j}^+ k_{2l}^+ k_{3m}^+) \ , \qquad N(j,l,m) = \frac{1}{z_{1j} z_{2l} z_{3m}} \ . \tag{3.1.24}$$

III.2 Identitäten der Impulsterme

Masselosigkeit der externen Teilchen ($k_i^2 = 0$) und Impulserhaltung ($\sum k_i = 0$) implizieren für die bilinearen Kombinationen $k_{ij}^\pm$ die Gleichungen

$$k_{jj} = 0 \ , \qquad \sum_{i=1}^{5} k_{ji}^\pm = 0 \ , \qquad (j = 1, \ldots 5) \ . \tag{3.2.1}$$

Umgekehrt jedoch besitzt nicht jedes System von Zahlen $k_{ij}^\pm$ mit $i, j = 1, \ldots 5$ mit Gl.(3.2.1) eine Darstellung in der Form $k_{ij}^\pm = \frac{1}{2}(-\varepsilon_{\alpha\beta} \pm i\delta_{\alpha\beta}) k_i^\alpha \wedge k_j^\beta$ zu Impulsen k_i mit $k_i^2 = 0$ und $\sum k_i = 0$. Schon das Verschwinden der 4–Punkts–Amplitude (ausgedrückt durch die Zahlen $k_{ij}^\pm$) kann nur aufgrund der Gleichungen (3.2.1) nicht gezeigt werden [21]. Nötig ist zudem eine weitere Beziehung der Form

$$\mathrm{Re}\,\left(k_{12}^+ k_{23}^+ k_{31}^+\right) = 0 \ . \tag{3.2.2}$$

Für die 5–Punkt–Amplitude ist zudem eine Verallgemeinerung auf mehr als drei Faktoren notwendig. Diese ist wie folgt erhältlich: Ein Bispinor $X^{\alpha\dot\alpha}$ mit $X^2 = -\det(X^{\alpha\dot\alpha}) = 0$ kann zerlegt werden in das Tensorprodukt zweier Größen X^α, $X^{\dot\alpha}$ (bezeichnet mit dem gleichen Buchstaben) mit nur einem $SL(2,\mathbb{R})$–Index: $X^{\alpha\dot\alpha} = X^\alpha X^{\dot\alpha}$. Diese können z.B. explizit gewählt werden als ($X^1 + X^2 \neq 0$)

$$X^a = \frac{1}{X^1 + X^2} \begin{pmatrix} X^1 + X^2 \\ X^0 - X^3 \end{pmatrix} \ , \qquad X^{\dot a} = \left(X^0 + X^3, X^1 + X^2\right) \ . \tag{3.2.3}$$

Ebenso besitzt die Matrix $(-\varepsilon_{\alpha\beta}+i\delta_{\alpha\beta})$ eine ähnliche Zerlegung:

$$-\varepsilon_{\alpha\beta}+i\delta_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\cdot(i,-1)=x^T\cdot y \quad \text{mit } x=(1,-i)\ , \quad y=(i,-1)\ . \tag{3.2.4}$$

Es ist also

$$2k_{ij}^+=x_\alpha k_i^\alpha\ y_\beta k_j^\beta\ \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}k_i^{\dot\alpha}k_j^{\dot\beta}\ , \tag{3.2.5}$$

(Die Summe über die ungepunkteten Indizes ist hier als $x_\alpha k^\alpha=x_+k_i^+ + x_-k_i^-$ zu verstehen) Der Teil von (3.2.5) mit ungepunkteten Indizes für die Verallgemeinerung von (3.2.2), $k_{12}^+k_{23}^+k_{34}^+k_{41}^+$, lautet demnach

$$xk_1\,yk_2\,xk_2\,yk_3\,xk_3\,yk_4\,xk_4\,yk_1\propto(xk_1\,yk_1)(xk_2\,yk_2)(xk_3\,yk_3)(xk_4\,yk_4) \tag{3.2.6}$$

mit $xk_i=x_\alpha k_i^\alpha$ etc. Jeder eingeklammerte Ausdruck der rechten Seite ist von der Form

$$(1,-i)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot(i,-1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=i(a^2+b^2)\ , \tag{3.2.7}$$

als rein imaginär (der Proportionalitätsfaktor ist reell). Damit ist

$$\mathrm{Im}\,(k_{12}^+k_{23}^+k_{34}^+k_{41}^+)=0 \tag{3.2.8}$$

(und ebenso für jede andere Wahl von Indizes mit dieser Systematik).

Mit den Gleichungen (3.2.2) und (3.2.8) lassen sich nun Identitäten für die Zahlen $\alpha(j,l,m)$ in der Korrelationsfunktion für die 5–Punkt–Amplitude herleiten. Für beleibige komplexe Zahlen a_1,a_2,a_3 mit der Zerlegung $a_i=x_i+iy_i$ gilt

$$\mathrm{Re}\,(a_1a_2a_3)=x_1a_2a_3-x_2a_1^*a_3+x_3a_1^*a_2^* \tag{3.2.9}$$

(eine verallgemeinerte Beziehung wird in der Berechnung der M–Punkt–Amplitude beweisen) Werden die $a_i's$ mit gewissen Zahlen k_{ij}^+ identifiziert, die x_i's mit den Realteilen $k_{ij}=\mathrm{Re}\,k_{ij}^+$ und die Gleichung mit einem weiteren k_{ij}^+ multipliziert, ergeben sich folgende 15 Gleichungen für die α's:

Mit $\{a_1,a_2,a_3\}=\{k_{12}^+,k_{23}^+,k_{31}^+\}$ (in verschiedenen Zuordnungen):

$$\begin{aligned} &k_{13}\alpha(4,1,2)-k_{23}\alpha(4,1,1)+k_{12}\alpha(4,3,1)=0\\ &k_{13}\alpha(2,4,2)-k_{23}\alpha(2,4,1)-k_{12}\alpha(3,4,2)=0\\ &k_{13}\alpha(2,4,4)+k_{23}\alpha(3,1,4)-k_{12}\alpha(3,3,4)=0 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

$(a_1, a_2, a_3) = (k_{41}^+, k_{12}^+, k_{24}^+)$:

$$
\begin{aligned}
k_{14}\alpha(2,4,1) - k_{24}\alpha(4,1,1) - k_{12}\alpha(4,4,1) &= 0 \\
k_{14}\alpha(2,4,2) - k_{24}\alpha(4,1,2) - k_{12}\alpha(4,4,2) &= 0 \\
k_{14}\alpha(2,3,4) + k_{24}\alpha(4,1,4) - k_{12}\alpha(4,4,4) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.2.11}
$$

$(a_1, a_2, a_3) = (k_{41}^+, k_{13}^+, k_{34}^+)$:

$$
\begin{aligned}
k_{14}\alpha(3,1,4) + k_{34}\alpha(4,1,1) - k_{13}\alpha(4,1,4) &= 0 \\
k_{14}\alpha(3,3,4) + k_{34}\alpha(4,3,1) - k_{13}\alpha(4,3,4) &= 0 \\
k_{14}\alpha(3,4,4) + k_{34}\alpha(4,4,1) - k_{13}\alpha(4,4,4) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.2.12}
$$

$(a_1, a_2, a_3) = (k_{42}^+, k_{23}^+, k_{34}^+)$:

$$
\begin{aligned}
k_{24}\alpha(2,3,4) + k_{34}\alpha(2,4,2) - k_{23}\alpha(2,4,4) &= 0 \\
k_{24}\alpha(3,3,4) + k_{34}\alpha(3,4,2) - k_{23}\alpha(3,4,4) &= 0 \\
k_{24}\alpha(4,3,4) + k_{34}\alpha(4,4,2) - k_{23}\alpha(4,4,4) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

Die Beziehung (3.2.9) kann erweitert werden auf vier komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{C}$,

$$
i\mathrm{Im}\,(a_1 a_2 a_3 a_4) = x_1 a_2 a_3 a_4 - x_2 a_1^* a_3 a_4 + x_3 a_1^* a_2^* a_4 - x_4 a_1^* a_2^* a_3^* \ , \tag{3.2.14}
$$

und führt zu drei weiteren Gleichungen :

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (k_{41}^+, k_{12}^+, k_{23}^+, k_{34}^+)$:

$$
k_{14}\alpha(2,3,4) - k_{34}\alpha(4,1,2) + k_{23}\alpha(4,1,4) - k_{12}\alpha(4,3,4) = 0 \tag{3.2.15}
$$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (k_{41}^+, k_{13}^+, k_{32}^+, k_{24}^+)$:

$$
k_{14}\alpha(3,4,2) - k_{24}\alpha(4,3,1) + k_{23}\alpha(4,4,1) - k_{13}\alpha(4,4,2) = 0 \tag{3.2.16}
$$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (k_{42}^+, k_{21}^+, k_{13}^+, k_{34}^+)$:

$$
k_{12}\alpha(3,4,4) - k_{24}\alpha(3,1,4) + k_{34}\alpha(2,4,1) - k_{13}\alpha(2,4,4) = 0 \tag{3.2.17}
$$

Daneben gibt es noch Gleichungen, die die Nennerausdrücke $N(j,l,m)$ miteinander verknüpfen. Erstaunlicherweise kann für jede Gleichung der $\alpha(\ldots)$ eine analoge Gleichung für die $N(\ldots)$ hingeschrieben werden durch Austausch von $\alpha \leftrightarrow N$ und fortlassen der Zahlen k_{ij}. So gibt es z.B. zur Gleichung (3.2.17) die Gleichung

$$
N(3,4,4) - N(3,1,4) + N(2,4,1) - N(2,4,4) = 0 \ . \tag{3.2.18}
$$

III.3 Amplitude als Integral von Ableitungen

Es kann nun versucht werden die in den 16 Summanden der Summe (3.1.22) auftretenden α's und Nenner N durch diese Gleichungen auf einen minimalen Satz zu reduzieren. Es gäbe dann nur noch6 Zahlen $\alpha(\ldots)$, die in den Gleichungen (3.2.10) - (3.2.13) und (3.2.15) - (3.2.17) als frei wählbare Größen erscheinen. Es stellt sich bei der Rechnung jedoch heraus, daß diese maximale Reduktion nicht nötig ist und auch zu unnötig komplizierten Gleichungen führt. Auch ist die Verallgemeinerung dieser Reduktion auf die M–Punkt–Amplitude schwer ersichtlich.

Besser (und direkt übertragbar auf den M–Punkt–Fall) ist die systematische Ersetzung nach dem folgenden Schema: Wichtig für die Berechnung sind die Gleichungen (3.2.12) und (3.2.13) sowie (3.2.15) und (3.2.17). In diesen 8 Gleichungen kann ein α dargestellt werden in der Form

$$\frac{1}{k_{34}}\alpha(\ldots) = \sum k_{(..)}\alpha(\ldots)\ . \tag{3.3.1}$$

Mittels diesen Gleichungen kann die Summe (3.1.22) umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,l,m} \alpha(j,l,m)N(j,l,m)\ \prod z_{pq}^{\ k_{pq}} \\
&\quad = \frac{1}{k_{34}}\left\{ \frac{-k_{14}\alpha(3,1,4)+k_{13}\alpha(4,1,4)}{z_{14}z_{21}z_{31}} + \frac{-k_{14}\alpha(3,3,4)+k_{13}\alpha(4,3,4)}{z_{14}z_{23}z_{31}} \right.\\
&\qquad + \frac{-k_{14}\alpha(3,4,4)+k_{13}\alpha(4,4,4)}{z_{14}z_{24}z_{31}} + \frac{-k_{24}\alpha(2,3,4)+k_{23}\alpha(2,4,4)}{z_{12}z_{24}z_{32}} \\
&\qquad + \frac{-k_{24}\alpha(3,3,4)+k_{23}\alpha(3,4,4)}{z_{13}z_{24}z_{32}} + \frac{-k_{24}\alpha(4,3,4)+k_{23}\alpha(4,4,4)}{z_{14}z_{24}z_{32}} \\
&\qquad + \frac{k_{14}\alpha(2,3,4)+k_{23}\alpha(4,1,4)-k_{12}\alpha(4,3,4)}{z_{14}z_{21}z_{32}} \\
&\qquad + \frac{-k_{12}\alpha(3,4,4)+k_{24}\alpha(3,1,4)+k_{13}\alpha(2,4,4)}{z_{12}z_{24}z_{31}} \\
&\qquad + \frac{k_{34}\alpha(2,3,4)}{z_{12}z_{23}z_{34}} + \frac{k_{34}\alpha(2,4,4)}{z_{12}z_{24}z_{34}} + \frac{k_{34}\alpha(3,1,4)}{z_{13}z_{21}z_{34}} + \frac{k_{34}\alpha(3,3,4)}{z_{13}z_{23}z_{34}} \\
&\qquad \left. + \frac{k_{34}\alpha(3,4,4)}{z_{13}z_{24}z_{34}} + \frac{k_{34}\alpha(4,1,4)}{z_{14}z_{21}z_{34}} + \frac{k_{34}\alpha(4,3,4)}{z_{14}z_{23}z_{34}} + \frac{k_{34}\alpha(4,4,4)}{z_{14}z_{24}z_{34}} \right\} \prod_{1\le p<q\le 4} z_{pq}^{\ k_{pq}}
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Die auftretenden Terme lassen sich folgendermaßen umordnen:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j,l,m} \alpha(j,l,m)N(j,l,m) \prod z_{pq}^{k_{pq}} \\
= \frac{1}{k_{34}} \Bigg\{ \; & \alpha(2,3,4)\left(\frac{k_{14}}{z_{14}z_{21}z_{32}} - \frac{k_{24}}{z_{12}z_{24}z_{32}} + \frac{k_{34}}{z_{12}z_{23}z_{34}}\right) \\
& +\alpha(2,4,4)\left(\frac{k_{13}}{z_{12}z_{24}z_{31}} + \frac{k_{23}}{z_{12}z_{24}z_{32}} + \frac{k_{34}}{z_{12}z_{23}z_{34}}\right) \\
& +\alpha(3,1,4)\left(-\frac{k_{14}}{z_{14}z_{21}z_{31}} + \frac{k_{24}}{z_{12}z_{24}z_{31}} + \frac{k_{34}}{z_{13}z_{21}z_{34}}\right) \\
& +\alpha(3,3,4)\left(-\frac{k_{14}}{z_{14}z_{23}z_{31}} - \frac{k_{24}}{z_{13}z_{24}z_{32}} + \frac{k_{34}}{z_{13}z_{23}z_{34}}\right) \\
& +\alpha(3,4,4)\left(-\frac{k_{12}}{z_{12}z_{24}z_{31}} - \frac{k_{14}}{z_{14}z_{24}z_{31}} + \frac{k_{23}}{z_{13}z_{24}z_{32}} + \frac{k_{34}}{z_{13}z_{24}z_{34}}\right) \\
& +\alpha(4,1,4)\left(\frac{k_{13}}{z_{14}z_{21}z_{31}} + \frac{k_{23}}{z_{14}z_{21}z_{32}} + \frac{k_{34}}{z_{14}z_{21}\;z_{34}}\right) \\
& +\alpha(4,3,4)\left(-\frac{k_{12}}{z_{14}z_{21}z_{32}} - \frac{k_{24}}{z_{14}z_{24}z_{32}} + \frac{k_{13}}{z_{14}z_{23}z_{31}} + \frac{k_{34}}{z_{14}z_{23}z_{34}}\right) \\
& +\alpha(4,4,4)\left(\frac{k_{13}}{z_{14}z_{24}z_{31}} + \frac{k_{23}}{z_{14}z_{24}z_{32}} + \frac{k_{34}}{z_{14}z_{24}z_{34}}\right) \Bigg\} \prod_{1\le p<q\le 4} z_{pq}^{k_{pq}}
\end{aligned}
\tag{3.3.3}
$$

Dieser Ausdruck ist offenbar eine Summe von Ableitung von Ausdrücken der Form

$$
\prod_{1\le p\le q\le 4} z_{pq}^{k_{pq}-n_{pq}} \quad , \tag{3.3.4}
$$

wobei n_{pq} nichtnegative ganze Zahlen sind. Nur erscheinen Ableitungen nach den Variablen z_3 und z_4. Über diese Größen wird zum einen nicht integriert, zum anderen ist am Beginn der Rechnung ein Vorfaktor mit z_4–Abhängigkeit abgespalten worden, so daß es sich hier nur um partielle Ableitungen handelt. Auch die Ableitung nach z_3 muß nicht verschwinden, da die Teilsummen i.a. nicht $SL(2)$–(Möbius–) invariant sind. Jedoch kann der Ausdruck durch zwei Hilfsgleichungen vereinfacht werden. Zum einen ist

$$
\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{\partial}{\partial z_4}\right) \prod_{1\le p<q\le 4} z_{pq}^{\alpha_{pq}} = 0 \tag{3.3.5}
$$

mit irgendwelchen Exponenten α_{pq}. Das liegt daran, daß sich die entstehenden Terme paarweise wegheben, so entsteht bei der Ableitung nach z_1 z.B. ein Term $\frac{\alpha_{13}}{z_{13}} \prod(\cdots)$ und bei der Ableitung nach z_3 der Term $-\frac{\alpha_{13}}{z_{13}} \prod(\cdots)$. Damit kann die Summe geschrieben werden als Ableitungen der Form

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,l,m} \alpha(j,l,m) N(j,l,m) \\
&= \frac{1}{k_{34}} \left\{ \alpha(2,3,4) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3} \right) \frac{1}{z_{12} z_{23}} + \alpha(2,4,4) \frac{\partial}{\partial z_3} \frac{1}{z_{12} z_{24}} \right. \\
&\quad + \alpha(3,1,4) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3} \right) \frac{1}{z_{13} z_{21}} + \alpha(3,3,4) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3} \right) \frac{1}{z_{13} z_{21}} \\
&\quad + \alpha(3,4,4) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_3} \right) \frac{1}{z_{13} z_{24}} + \alpha(4,1,4) \frac{\partial}{\partial z_3} \frac{1}{z_{14} z_{21}} \\
&\quad \left. + \alpha(4,3,4) \left(\frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3} \right) \frac{1}{z_{14} z_{23}} + \alpha(4,4,4) \frac{\partial}{\partial z_3} \frac{1}{z_{14} z_{24}} \right\} \prod_{1 \le p < q \le 4} z_{pq}^{k_{pq}} \ .
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Dabei wirkt jeder Ableitungsoperator auch auf das letzte Produkt. Dieser Ausdruck enthält noch z_3–Ableitungen, die beseitigt werden, sobald die Summe in geschlossener Form ausgedrückt worden ist.

Um diesen Ausdruck verallgemeinern zu können und in kürzerer Form zu schreiben, muß die Systematik der Terme untersucht werden: Statt über einen bestimmten Bereich von Zahlen (j, l, m) zu summieren, soll die Summe über alle Indexfunktionen $i \in I$ laufen, wobei I die Menge aller Abbildungen $i : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ ist, die keinen Zyklus enthält (d.h. keine Sequenz von z.B. der Form $i(1) = 2,\ i(2) = 3,\ i(3) = 1$ oder $i(3) = 1,\ i(1) = 3$). Die Menge I enthält also 16 Elemente, mit der Abkürzung $\alpha(i) = \alpha(i(1), i(2), i(3))$ und ebenso für die Nenner $N(i)$ kann die Summe (3.1.22) also geschrieben werden als

$$\sum_{i \in I} \alpha(i) N(i) \ . \tag{3.3.7}$$

Der Ausdruck (3.3.6) beinhaltet alle $\alpha(i)$ mit $i(3) = 4$. Die auftretenden z_i–Terme können gebildet werden aus den Nennern $N(i)$ zu diesen Indexfunktionen $(i(3) = 4)$ durch das Fortlassen von $z_{3,i(3)}^{-1}$. Diese Terme seien bezeichnet mit

$$N_3(i) = \frac{1}{z_{1,i(1)} z_{2,i(2)}} \tag{3.3.8}$$

und sind offenbar unabhängig vom Funktionswert $i(3)$. Analog sind die abgeleiteten Größen N_1 und N_2 definiert. Die Ableitungsoperatoren hinter einem $\alpha(i)$ sind mit der Indexfunktion i in folgender Weise verknüpft: Es sind alle $\partial/\partial z_j$ für die j ein "Vorgänger" von 3 bzgl. der Indexfunktion i ist. Als Vorgänger einer Zahl $m \in \{1, 2, 3\}$ bzgl. der Funktion i sind alle Zahlen $j \in \{1, 2, 3\}$ definiert, für die es eine Sequenz $j,\ j_1 = i(j),\ j_2 = i(j_1), \ldots, m = i(j_n)$ gibt. Die Sequenz kann auch aus einem Element bestehen, d.h. m ist stets Vorgänger von m. Die

Menge der Vorgänger von m bzgl. $i \in I$ ist bezeichnet mit $v_i(m)$. So sind beispielsweise zu der Indexfunktion $i(1) = 2, i(2) = 3, i(3) = 4$ die Vorgängermenge $v_i(3) = \{1, 2, 3\}$, $v_i(2) = \{1, 2\}$ und $v_i(1) = \{1\}$.

Damit kann die Summe (3.1.22) und damit für die Amplitude geschrieben werden:

$$\begin{aligned} A_5 &\propto \int \sum_{j,l,m} \alpha(j,l,m) N(j,l,m) \\ &\propto \int \frac{1}{k_{34}} \sum_{\substack{i \in I \\ i(3)=4}} \sum_{j \in v_i(3)} \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\alpha(i) N_3(i) \prod_{1 \le p < q \le 4} z_{pq}^{k_{pq}} \right) \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Eine zweite Hilfsgleichung, die wie die erste eine Beziehung zwischen verschiedenen Ableitungen herstellt, ist

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{j \in v_i(k)} \partial_j N_k(i) \prod_{1 \le p \le q \le 4} z_{pq}^{k_{pq}} = 0 \ , \tag{3.3.10}$$

wobei $i \in I$ eine beliebige Indexfunktion ist. ∂_j bezeichnet die Ableitung $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$. Diese Identität soll hier nicht bewiesen werden, sondern erst bei der Berechnung der M–Punkt–Amplitude in allgemeinerer Fassung. Um in einem Beispiel expliziter zu werden, sei $i(1) = 2$, $i(2) = 4$, $i(3) = 4$ vorgegeben. Die obige Summe besteht aus den Ableitungen

$$\begin{aligned} (\dots) =& (\partial_1 N_1 + \partial_1 N_2 + \partial_2 N_2 + \partial_3 N_3) \prod z_{pq}^{k_{pq}} \\ =& \left(\partial_1 \frac{1}{z_{24} z_{34}} + \partial_1 \frac{1}{z_{12} z_{34}} + \partial_2 \frac{1}{z_{12} z_{34}} + \partial_3 \frac{1}{z_{12} z_{24}} \right) \prod z_{pq}^{k_{pq}} \ , \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

die Ableitungen wirken auch hier wieder auf das letzte Produkt. Es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} (\dots) = & \left(\frac{k_{12}}{z_{12} z_{24} z_{34}} + \frac{k_{13}}{z_{13} z_{24} z_{34}} + \frac{k_{14}}{z_{14} z_{24} z_{34}} + \frac{k_{12} - 1}{z_{12} z_{12} z_{34}} + \frac{k_{13}}{z_{12} z_{13} z_{34}} + \frac{k_{14}}{z_{12} z_{14} z_{34}} \right. \\ & \left. \frac{k_{21} - 1}{z_{12} z_{21} z_{34}} + \frac{k_{23}}{z_{12} z_{23} z_{34}} + \frac{k_{24}}{z_{12} z_{24} z_{34}} + \frac{k_{31}}{z_{12} z_{24} z_{31}} + \frac{k_{32}}{z_{12} z_{24} z_{32}} + \frac{k_{34}}{z_{12} z_{24} z_{34}} \right) \prod z_{pq}^{k_{pq}} \\ = & \left[\frac{k_{12}}{z_{12} z_{24} z_{34}} + k_{13} \left(\frac{1}{z_{13} z_{24} z_{34}} + \frac{1}{z_{12} z_{13} z_{34}} + \frac{1}{z_{12} z_{24} z_{31}} \right) + k_{14} \left(\frac{1}{z_{14} z_{24} z_{34}} + \frac{1}{z_{12} z_{14} z_{34}} \right) \right. \\ & \left. + k_{23} \left(\frac{1}{z_{12} z_{23} z_{34}} + \frac{1}{z_{12} z_{24} z_{32}} \right) + \frac{k_{24}}{z_{12} z_{24} z_{34}} + \frac{k_{34}}{z_{12} z_{24} z_{34}} \right] \prod z_{pq}^{k_{pq}} \\ = & \left(\sum_{j<l} k_{jl} \right) \frac{1}{z_{12} z_{24} z_{34}} \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Die letzte Gleichung entsteht aus $k_5 \cdot k_5 = 0$ wenn für beide Faktoren $-\sum_1^4 k_i$ eingesetzt wird, hier geht also erstmalig die Impulserhaltung ein.

In dieser Hilfsgleichung kann der k–Summationsbereich aufgespalten werden in

$$\sum_{j\in v_i(3)} \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\alpha(i)N_3(i)\prod_{1\le p<q\le 4} z_{pq}^{k_{pq}}\right) = -\sum_{k=1}^{2}\sum_{j\in v_i(k)} \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\alpha(i)N_k(i)\prod_{1\le p<q\le 4} z_{pq}^{k_{pq}}\right) \quad , \qquad (3.3.13)$$

wobei der linke Teil der Gleichung der Summe in Gl.(3.3.9) entspricht. Also kann schließlich für die 5–Punkt–Amplitude geschrieben werden:

$$A_5 \propto \frac{1}{k_{34}} \sum_{\substack{i\in I\\ i(3)=4}} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j\in v_i(k)} \int \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\alpha(i)N_k(i)\prod_{1\le p<q\le 4} z_{pq}^{k_{pq}}\right) \qquad (3.3.14)$$

Es ist leicht zu sehen, daß j in der Summe stets 1 oder 2 ist: Der Wert 4 ist nie in der Vorgängermenge. Der Wert 3 ist wegen $i(3) = 4$ Vorgänger von 4 und kann damit nicht in der Menge $v_i(k)$ für $k = 1, 2$ sei.

III.4 Verschwinden der Integrale über eine Ableitung

Die Auswertung der Korrelationsfunktion führt zu Integralen der Form

$$I(\{\alpha_{ij}\}, k) = \int dz_1 \cdots dz_{m-3} \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\prod_{1\le p<q\le m-1} (z_p - z_q)^{\alpha_{pq}}\right) \quad , \qquad (3.4.1)$$

wobei die Ableitung stets nach einer Variablen berechnet wird, über die auch integriert wird, $1 \le k \le M-3$. Der Integrationsbereich ist gegeben (evtl. nach Wahl $z_{M-2} = 1$, $z_{M-1} = \infty$ und $z_M = 0$ und dem zyklischen Tauschen in die Reihenfolge $z_M, z_1, \ldots, z_{M-1}$) durch

$$0 \le z_1 \le \cdots \le z_{M-3} \le 1 \ . \qquad (3.4.2)$$

Nach der Integration über z_k verschwindet das Integral für $\alpha_{k-1,k} > 0$ und $\alpha_{k,k+1} > 0$.

Diese Ableitung entsteht durch das Umordnen von Termen die aus der vollständigen Kontraktion der Korrelationsfunktionen entstehen zu Teilsummen der Form

$$\int \sum_{\substack{j\\ j\neq k}} \frac{\alpha'_{kj}}{z_k - z_j} \prod_{p<q} (z_p - z_q)^{\alpha'_{pq}} \ . \qquad (3.4.3)$$

Das Integral über diesen Ausdruck existiert nur für ganz bestimmte Exponenten α'_{pq}, also nur für sehr spezielle Impulse der externen Linien. Es kann jedoch gezeigt werden, daß sich das $\int dz_k$–Integral in (3.4.3) beliebig weit analytisch in den Exponenten fortsetzen läßt. Die Gleichung $I(\{\alpha_{ij}\}, k) = 0$ bleibt bei der analystischen Fortsetzung natürlich erhalten.

Bei der 5–Punkt–Funktion entstehen Terme der Form

$$\int dz z^{\beta_1}(1-z)^{\beta_2}(z-w)^{\beta_3} \ , \tag{3.4.4}$$

wobei die Integration über $0 \leq z \leq w$ oder $w \leq z \leq 1$ läuft. Allgemein kann die analytische Fortsetzung solcher Ausdrücke wie folgt konstruiert werden (vgl.[7]);

Betrachtet wird die Riemannfläche zu der Funktion

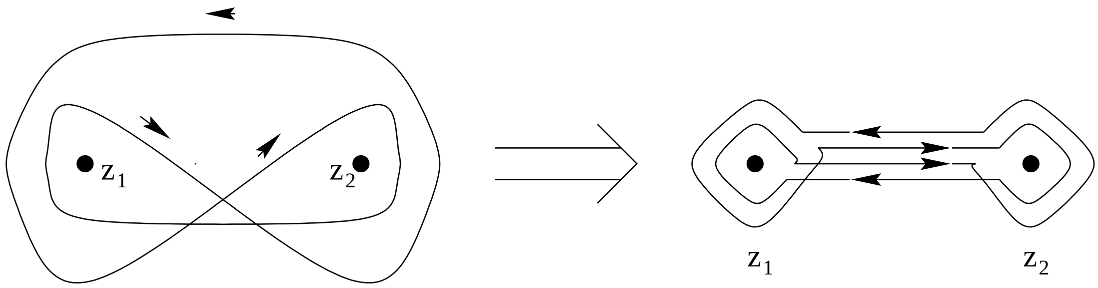
$$g(t) = (t-z_1)^{\alpha_1}(t-z_2)^{\alpha_2}(t-z_3)^{\alpha_3} \ , \tag{3.4.5}$$

wobei die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nicht rational sind und auch $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ nicht Null wird für jede Kombination aus ganzen Zahlen k_1, k_2, k_3. Auf dieser Riemannfläche wird die Funktion

$$f(z) = (z-z_1)^{\beta_1}(z-z_2)^{\beta_2}(z-z_3)^{\beta_3} \tag{3.4.6}$$

betrachtet, jetzt jedoch mit beliebigen komplexen Exponenten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (Diese Funktion ist bestimmt, falls in einem gewöhnlichen Punkt der Zweig der Funktion bestimmt ist).

Diese Funktion wird über eine Doppelschleife auf der Riemannfläche um die Punkte z_1 und z_2 integriert. Diese geschlossene Schleife kann wieder deformiert werden in 4 Geraden und 4 Kreisen mit Radius δ (die nicht geschlossen sind).



Deformation des Integrationswegs

Im Grenzübergang $\delta \to 0$ verschwinden für *bestimmte* Exponenten die Beiträge der Kreise zum Schleifenintegral. Es bleibt das Integral der Funktion über die vier Verbindungslinie der Punkte z_1 und z_2, die je nach Zweig der Funktion sich um einen Phasenfaktor $e^{2\pi i\beta_j}$ unterscheiden:

$$\int_C f(z)dz = (1-e^{2\pi i\beta_1})(1-e^{2\pi i\beta_2}) \int_{C_{01}} f(z)dz \ . \tag{3.4.7}$$

Liegen die Punkte z_1 und z_2 auf der reellen Achse und zudem $z_1 < z_2$ (offener String), so folgt aus dem Ausdruck direkt

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \frac{\int_C f(z)dz}{(1-e^{2\pi i\beta_1})(1-e^{2\pi i\beta_2})} \tag{3.4.8}$$

somit ist (da das Schleifenintegral für alle Exponenten existiert) das Integral der linken Seite analytisch fortsetzbar für alle Werte $(\beta_1, \beta_2\beta_3) \in \mathbb{C}^3$ mit Ausnahme von evtl. ganzzahligen Indizes. Dort entstehen evtl. Polstellen durch den Nenner von (3.4.8).

Die Verallgemeinerung auf Audrücke mit beliebig vielen Exponenten ist direkt durchführbar.

Kapitel VI

M–Punkt–Amplitude auf der Sphäre

A. M–Punkt–Amplitude

Für die Berechnung der M–Punkt–Amplitude (holomorpher Anteil, NS–Sektor) seien die Vertexoperatoren in folgenden Bildern gewählt:

$$\left\langle V^{\int}_{(0,0)}(z_1)\cdots V^{\int}_{(0,0)}(z_{M-3})V^{c}_{(0,0)}(z_{M-2})V^{c}_{(-1,-1)}(z_{M-1})V^{c\tilde{c}}_{(-1,-1)}(z_M)\right\rangle \tag{4.1}$$

Die hier auftretenden Vertexoperatoren sind (bis auf den Faktor e^{ikZ})

$$\begin{aligned} V^{c(\tilde{c})}_{(-1,-1)} &= (\tilde{c})ce^{\varphi^-+\varphi^+} \ , \\ V^{\int}_{(0,0)} &= \int\Big(C(k,\partial Z) - \frac{i}{4}(k,\Psi)^+(k,\Psi)^-\Big) \ , \\ V^{c}_{(0,0)} &= c\Big\{C(k,\partial Z) - \frac{i}{4}(k,\Psi)^+(k,\Psi)^-\Big\} - \frac{1}{2}(\gamma^+(k,\Psi)^+ - \gamma^-(k,\Psi)^-) \ . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die beiden Vertexoperatoren $V^{c(\tilde{c})}_{(-1,-1)}$ liefern wieder nur einen $(z_1,\ldots z_{M-2})$–unabhängigen Vorfaktor vor den Integralen, der zweite Ausdruck im Vertexoperator $V^{c}_{(0,0)}$ erzeugt keinen Beitrag zur Korrelationsfunktion.

Um den Umfang der entstehenden Terme zu reduzieren, sei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} C[\partial Z_j] &= C(k_j,\partial Z)(z_j) \\ S[\partial Z_j] &= S(k_j,\partial Z) = 2k_j\partial Z(z_j) \\ [\Psi_j] &= -\frac{i}{4}(k_j,\Psi)^-(z_j)(k_j,\Psi)^-(z_j) \\ [Z_j] &= ik_jZ(z_j) \end{aligned} \tag{4.3}$$

gesetzt. Damit ist die Amplitude im wesentlichen das $((M-3)$ – fache) Integral über die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} &\int\left\langle \prod_{j=1}^{M-2}(C[\partial Z_j]+[\Psi_j])\prod_{j=1}^{M}e^{[Z_j]}\right\rangle \\ &= \int\left\langle \frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{M-2}(C[\partial Z_j]+S[\partial Z_j]+[\Psi_j]) + \prod_{j=1}^{M-2}(C[\partial Z_j]-S[\partial Z_j]+[\Psi_j])\right)\prod_{j=1}^{M}e^{[Z_j]}\right\rangle \ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Beim Ausmultiplizieren der ersten beiden Produkte der zweiten Zeile fallen alle Ausdrücke mit einer ungeraden Anzahl von $S[\partial Z]$–Termen wegen der unterschiedlichen Vorzeichen weg. Die zweite Zeile in (4.4) unterscheidet sich also von der ersten durch Ausdrücke der Art

$$\begin{aligned} &\left\langle S[\partial Z_{j_1}]\; S[\partial Z_{j_2}] \cdots C[\partial Z_{j3}] \cdots [\Psi_{j_4}] \cdots \prod e^{[Z_j]} \right\rangle \\ &= 4 \partial_{j_1} \partial_{j_2} \left\langle \cdots C[\partial Z_{j3}] \cdots [\Psi_{j_4}] \cdots \prod e^{[Z_j]} \right\rangle \end{aligned} \tag{4.5}$$

Diese Ableitungen fallen nach der Integration über $z_1, \ldots, z_{M-3}$ weg. Wie bei der Berechnung zur 5–Punkt–Amplitude werden hiermit die Polstellen 2. Ordnung beseitigt, die sich nach der vollständigen Kontraktion des Korrelator schwer systematisch fassen lassen.

Zur Abkürzung sei weiter gesetzt:

$$[\partial Z_j]^{\pm} = (k_j, \partial Z)^{\pm}(z_j) = 2 k_j^{\pm} \partial Z^{\mp}(j) \tag{4.6}$$

Es sind also im wesentlichen die Korrelationsfunktionen

$$\left\langle \prod_{j=1}^{M-2} \left(\pm [\partial Z_j]^{\pm} + [\Psi_j] \right) \prod_{j=1}^{M} e^{[Z_j]} \right\rangle \tag{4.7}$$

zu berechnen, wobei zuerst der Ausdruck für "+" ausgewertet wird.

B. Kontraktion der bosonischen Operatoren

Die Kontraktion von je zwei $[\partial Z]^{\pm}$ verschwindet, so daß als Kontraktion von bosonischen Operatoren nur die beiden Fälle

$$\left\langle [\partial Z_i]^{\pm} [Z_j] \right\rangle = -2i \frac{k_{ij}^{+}}{z_{ij}} \tag{4.8}$$

erscheinen. Mittels der Gl.(3.1.12) kann die vollständige Kontraktion einer Auswahl bosonischer Operatoren aus den Produkten in (4.4) hingeschrieben werden.

C. Kontraktion der fermionischen Operatoren

Die Korrelation einer Auswahl fermionischen Operatoren

$$\langle [\Psi_{j_1}] \cdots [\Psi_{j_m}] \rangle = \left(-\frac{i}{4} \right)^m \left\langle (k_{j_1}, \Psi)^{+} (k_{j_1}, \Psi)^{-} \cdots (k_{j_m}, \Psi)^{+} (k_{j_m}, \Psi)^{-} \right\rangle \tag{4.9}$$

liefert Kontraktionen der Form

$$\left\langle (k_{j_1}, \Psi)^{+} (k_{\sigma(j_1)}, \Psi)^{-} \right\rangle \cdots \left\langle (k_{j_m}, \Psi)^{+} (k_{\sigma(j_m)}, \Psi)^{-} \right\rangle \;, \tag{4.10}$$

für jede fixpunktfreie Permutation $\sigma \in P(\{j_1, \ldots, j_m\})$, $(\sigma(j) \neq j,\ \forall j)$.

Das Vorzeichen der Kontraktion kann folgendermaßen angegeben werden: Ist σ ein Zyklus, so ist das Vorzeichen $(-1)^{m-1}$. Dieses liegt daran, daß sich beim Vertauschen zweier Operatoren $[\Psi_i]$, $[\Psi_j]$ in der Korrelation nicht das Vorzeichen ändert. Die Operatoren können also stets so angeordnet werden, das die Reihenfolge der Kontraktionen (ausgedrückt durch die *Plätze* der Operatoren) die Form $\langle 12\rangle\langle 23\rangle\cdots\langle m1\rangle$ hat.

Ist σ kein Zyklus, so besitzt σ aber eine Zerlegung in Zyklen, Das Vorzeichen ist dann also $(-1)^{m-\zeta(\sigma)}$, wobei $\zeta(\sigma)$ die Anzahl der Zyklen in der Permutation σ ist.

Insgesamt ist also für diese Auswahl fermionischer Operatoren

$$\langle [\Psi_{j_1}]\cdots[\Psi_{j_m}]\rangle = (-2i)^m \sum_{\substack{\sigma\in P\\ \sigma(k)\neq k}} (-1)^{\zeta(\sigma)} \frac{k^+_{j_1,\sigma(j_1)}\cdots k^+_{j_m,\sigma(j_m)}}{z_{j_1,\sigma(j_1)}\cdots z_{j_m,\sigma(j_m)}}\,. \tag{4.11}$$

D. Vollständige Kontraktion von (4.4)

Zusammengenommen ist damit der erste Teil der Korrelationsfunktion in (4.4), ausmultipliziert und vollständig kontrahiert:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \prod_{j=1}^{M-2}\left([\partial Z_j]^+ + [\Psi_j]\right)\prod_{j=1}^{M} e^{[Z_j]}\right\rangle \\
&= \sum_{Q\subset\{1,\ldots,M-2\}} \left\langle \prod_{j\in Q}[\partial Z_j]^+ \prod_{j\in Q^c}[\Psi_j]\prod_{j=1}^{M} e^{[Z_j]}\right\rangle \\
&= \sum_{\substack{Q\subset\{1,\ldots,M-2\}\\ |Q|\neq M-1}} \Bigg[\sum_{\substack{i(j_1),\ldots,i(j_k)=1,\ldots,M\\ i(j_l)\neq j_l\\ (Q=:\{j_1,\ldots,j_k\})}} (-2i)^k \frac{k_{j_1,i(j_1)}\cdots k_{j_k,i(j_k)}}{z_{j_i,i(j_1)}\cdots z_{j_k,i(j_k)}} \\
&\qquad \cdot \sum_{\substack{\sigma\in P(Q^c)\\ \sigma(k)\neq k\\ (Q^c=:\{j'_1,\ldots,j'_m\})}} (-2i)^m(-1)^{\zeta(\sigma)} \frac{k_{j'_1,\sigma(j'_i)}\cdots k_{j'_m,\sigma(j'_m)}}{z_{j'_1,\sigma(j'_1)}\cdots z_{j'_m,\sigma(j'_m)}}\Bigg] \prod_{p<q} z_{pq}^{\;k_{pq}}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Hier bezeichnet $|Q|$ die Anzahl der Elemente der Menge Q und Q^c das Komplement von Q bzgl. $\{1,\ldots,M-2\}$, $Q^c = \{1,\ldots,M-2\}\backslash Q$. Die leere Summe sei als $\sum_\emptyset = 1$ gesetzt, um Fallunterscheidungen zu vermeiden (für $Q^c=\emptyset$).

E. **Vereinfachung von (4.12)**

Die beiden Summen mit den bosonischen und fermionischen Kontraktionen haben einige Gemeinsamkeiten: Die Indexfunktionen der Summen sind fixpunktfreie Abbildungen aus einer disjunkten Zerlegung der Menge $\{1, \ldots, M-2\}$ in zwei Komponenten. Für jeden Summanden der Doppelsumme können die Indexfunktionen zusammengefaßt werden zu einer Funktion

$$\tilde{i} : \begin{cases} \{1, \ldots, M-2\} \to \{1, \ldots, M\} \\ j \mapsto \tilde{i}(j) \neq j \end{cases} . \tag{4.13}$$

Umgekehrt gehören zu jeder solchen Funktion $\tilde{i}$ mehrere Summanden, die alle betragsmäßig gleich sind, sich jedoch durch das Vorzeichen unterscheiden können. Die Anzahl der Summanden ist anhängig von der Anzahl Zyklen in der Indexfunktion $\tilde{i}$: Sei p die (maximale) Anzahl Zyklen in $\tilde{i}$. Jeder Zyklus kann in der Kontraktion der $[\partial Z]^{\pm}, [Z]$–Operatoren oder in der Kontraktion der $[\Psi_j]$ auftreten. Die Anzahl von Zyklen in den Indizes der bosonischen Kontraktionen sei p_1, die Anzahl in den fermionischen Kontraktionen p_2 $(p_1 + p_2 = p)$. Es lassen sich $\binom{p}{p_1}$ Möglichkeiten finden, die Zyklen auf die beiden Anteile der Gesamtkontraktion zu verteilen. Die Summanden zu einer Indexfunktion $\tilde{i}$ sind also

$$(-2i)^{M-2} \prod_{j=1}^{M-2} \frac{k_{j,\tilde{i}(j)}}{z_{j,\tilde{i}(j)}} \tag{4.14}$$

mit der Vielfachheit und den Vorzeichen

$$\sum_{p_2=0}^{p} (-1)^{p_2} \binom{p}{p_2} = (1-1)^p = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{4.15}$$

Die Korrelationsfunktion hat somit (bis auf Faktor) die finale Gestalt

$$\sum_{i \in I} (-2i)^{M-2} \prod_{j=1}^{M-2} \frac{k_{j,i(j)}}{z_{j,i(j)}} \prod_{p<q} z_{pq}^{\;k_{pq}} , \tag{4.16}$$

wobei die Menge der Indexfunktionen $i \in I$ gegeben ist durch

$$i \in I \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} i : \{1, \ldots, M-2\} \to \{1, \ldots, M\} \\ i(j) \neq j \qquad \forall j \\ i|_Q \neq \sigma \qquad \forall Q \subset \{1, \ldots, M-2\},\ \forall \sigma \in P(Q) \end{cases} \tag{4.17}$$

Die zweite Korrelationsfunktion in der Amplitude mit den Operatoren $[\partial Z_j]^-$ liefert analoge Ausdrücke: Im Zähler der bosonischen Kontraktion sind die k_{ij}^{+}'s (komplex) konjugiert, der zusätzliche Faktor $(-1)^m$ reicht aus, um im Nenner alle Faktoren z_{ij} zu vertauschen. Wird in der fermionischen Kontraktion statt über alle Permutaionen σ über alle inversen Permutationen σ^{-1} summiert, so bewirkt dieses ebenfalls eine komplexe Konjugation des Zählers und ein Vertauschen in den Faktoren des Nenner. Der Wert der fermionischen Summe ändert sich wegen der umkehrbar eindeutigen Korrespondenz $\sigma \leftrightarrow \sigma^{-1}$ für fixpunktfreie Permutationen nicht.

Zurücktauschen der Faktoren des Nenners liefert schließlich den ursprünglichen Zustand und einen Faktor $(-1)^{M-2}$, so ist die M–Punkt Amplitude (bis auf einen Vorfaktor) das Integral über

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left\{ \prod \left([\partial Z_j^+] + [\Psi_j]\right) + \prod \left([\partial Z_j^-] + [\Psi_j]\right) \right\} \prod e^{[Z_i]} \right\rangle \\
&= (-2i)^{M-2} \sum_{i \in I} \left\{ \prod_{j=1}^{M-2} \frac{k^+_{j,i(j)}}{z_{j,i(j)}} + (-1)^{M-2} \prod_{j=1}^{M-2} \frac{k^-_{j,i(j)}}{z_{j,i(j)}} \right\} \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \\
&\propto \sum_{i \in I} \frac{1}{z_{1,i(1)} \cdots z_{M-2,i(M-2)}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}\left(k_{1,i(1)} \cdots k_{M-2,i(M-2)}\right) \ (M \text{ gerade}) \\ \\ \mathrm{Im}\left(k_{1,i(1)} \cdots k_{M-2,i(M-2)}\right) \ (M \text{ ungerade}) \end{array} \right\} \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Zur Abkürzung (und um im folgenden nicht zwischen "M gerade" und "M ungerade" unterscheiden zu müssen) sei definiert:

$$\begin{aligned}
\alpha(i) &= \alpha\big(i(1), \ldots, i(M-1)\big) = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Re} \\ \\ \mathrm{Im} \end{array} \right\} k_{1,i(1)} \cdots k_{M-2,i(M-2)} \\
N(i) &= N\big(i(1), \ldots, i(M-2)\big) = \Big(z_{1,i(1)} \cdots z_{M-2,i(M-2)}\Big)^{-1} .
\end{aligned} \tag{4.19}$$

F. **Einfache $\mathbf{k}_{ij}$–Relationen**

Masselosigkeit impliziert für die Zahlen k^+_{ij} die Identitäten $k^+_{ij} = (k^+_{ji})^*$, $k_{ii} = 0$. Zudem führt die Impulserhaltung auf

$$\sum_{j=1}^{M} k^\pm_{qj} = 0 \qquad \forall q \ . \tag{4.20}$$

Diese Beziehung kann dazu benutzt werden, um alle Größen k_{iM} und k_{Mi} zu ersetzen.

Wegen der SL_2–Invarianz der Amplitude, speziell durch den Grenzübergang $z_M \to \infty$, können alle Summanden in (4.18) zum Verschwinden gebracht werden, für die $i(j) = M$ ist (für ein j). Damit verschwinden auch alle k_{jM}, so daß eine explizite Ersetzung nicht nötig ist.

Aus den Gleichungen für die Zahlen k_{ij} bleibt nur noch die Beziehung

$$0 = k_{M,M} = \sum_{i,j=1}^{M-1} k_{ij} = 2 \sum_{1 \le i < j \le M-1} k_{ij} \ , \tag{4.21}$$

über die später die Impulserhaltung in die Rechnung eingehen wird.

G. Weitere Gleichungen für $\mathbf{k}_{ij}$'s

Bei der Berechnung der M–Punkt–Amplitude ist zudem eine Verallgemeinerung der Gleichungen (3.2.2) und (3.2.8) hilfreich. Ebenso wie bei der 5–Punkt–Amplitude folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\,(k^+_{j_1,j_2}k^+_{j_2,j_3}\cdots k^+_{j_m,j_1}) = 0 \qquad \text{falls } m \text{ gerade} \\ &\mathrm{Re}\,(k^+_{j_1,j_2}k^+_{j_2,j_3}\cdots k^+_{j_m,j_1}) = 0 \qquad \text{falls } m \text{ ungerade} \end{aligned} \quad . \tag{4.22}$$

aus der Zerlegung der Bispinoren $k_i^{\alpha\dot\alpha}$ in ein Produkt von Spinoren mit einem gepunkteten und ungepunkteten Index und Umsortieren der Anteile mit ungekunkteten Spinorindizes in rein imaginäre Faktoren.

H. Hilfsgleichung 1

Der Imaginär– bzw. Realteil eines solchen Produkts kann als Summe über Teilprodukte geschrieben werden. Für beliebige komplexe Zahlen $a_i = x_i + iy_i$, $i \in Q = \{1,\ldots,m\}$, gilt nämlich

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^m (-1)^j x_j a_1^* a_2^* \cdots a_{j-1}^* a_{j+1}\cdots a_m \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^j \sum_{\substack{N\subset Q\\ j\notin N}} \left\{ \left(\prod_{i\in N^c} x_i\right) \left(\prod_{i\in N} iy_i\right) \; (-1)^{|N\cap\{1,\ldots,j\}|} \right\} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dabei bezeichnet $|N\cap\{1,\ldots,j\}|$ die Anzahl der Elemente in dieser Schnittmenge.

Die Summe über alle j und die Summe über alle Teilmengen der Indexmenge Q lassen sich vertauschen durch

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\substack{N\subset Q\\ j\notin N}} = \sum_{N\subset Q} \sum_{\substack{j=1\\ j\notin N}}^m \tag{4.24}$$

Damit wird aus den anfänglichen Summe

$$(\ldots) = \sum_{N\subset Q} \left(\prod_{i\in N^c} x_i \prod_{i\in N} iy_i \sum_{\substack{j=1\\ j\notin N}}^m (-1)^j (-1)^{|N\cap\{1,\ldots,j\}|} \right) \tag{4.25}$$

Die letzte Summe ist eine Summe über ± 1. Die Summanden habe dabei alternierendes Vorzeichen: Sei $j_0 \notin N$. Der Summand dazu ist

$$(-1)^{j_0}(-1)^{|N\cap\{1,\ldots,j_0\}|} = c_0 \tag{4.26}$$

Ist $j_1 \notin N$ der direkt folgende Summand, d.h.

$$j_1 = j_0 + d\ , \quad j_0+1,\ldots,j_0+d-1 \in N \tag{4.27}$$

für ein $d > 0$, so ist der zugehörige Summand

$$c_1 = c(-1)^d(-1)^{d-1} = -c_0 \ . \tag{4.28}$$

Der erste Summand in der Summe ist dabei stets (-1): Denn ist $j_0 \notin N$ dieser erste Summand, so ist $1, \dots, j_0 - 1 \in N$. Dann ist $|N \cap \{1, \dots j_0\}| = j_0 - 1$ und $c_0 = (-1)^{j_0}(-1)^{j_0-1} = -1$.

Die Summe ist also Null, falls die Anzahl der Elemente von $Q \backslash N$ gerade ist, sonst (-1). Damit ist

$$(\dots) = - \sum_{\substack{N \subset Q \\ |N^c| \text{ ungerade}}} \left(\prod_{i \in N^c} x_i \prod_{i \in N} iy_i \right) = \begin{cases} -\operatorname{Re}(a_1, \dots, a_m) & \text{falls } m \text{ ungerade} \\ -i\operatorname{Im}(a_1, \dots, a_m) & \text{falls } m \text{ gerade} \end{cases} \tag{4.29}$$

I. Anwendung auf Produkte von Zahlen $\mathbf{k}_{ij}^+$

Für jede Auswahl von Indizes, $q_1, \dots, q_n \in \{1, \dots, M-2\}$, der Einfachheit halber sei $q_j = j$ angenommen, kann mit der Zuordnung

$$a_i = k_{i,i+1}^+, \quad a_i^* = k_{i+1,i}^+, \quad a_n = k_{n,1}^+ \tag{4.30}$$

folgende Identität für Produkte von Zahlen k_{ij}^+ hingeschrieben werden (und damit auch eine Identität für die Real– und Imaginärteil, also für die korrespondierenden Zahlen $\alpha(i)$):

$$\begin{aligned} &-k_{12} \left(k_{23}^+ k_{34}^+ k_{45}^+ \cdots k_{n-1,n}^+ k_{n1}^+ \right) \\ &+k_{23} \left(k_{21}^+ k_{34}^+ k_{45}^+ \cdots k_{n-1,n}^+ k_{n1}^+ \right) \\ &-k_{34} \left(k_{21}^+ k_{32}^+ k_{45}^+ \cdots k_{n-1,n}^+ k_{n1}^+ \right) \\ &\quad \cdots \cdots \quad \cdots \\ &\pm k_{n1} \left(k_{21}^+ k_{32}^+ k_{43}^+ \cdots k_{n-1,n-2}^+ k_{n,n-1}^+ \right) \quad = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Weitere Faktoren k_{ij}^+ mit $i \neq q_j, \forall j$ können hinzugefügt werden. Sind nun $i_1, \dots, i_n \in I$ Indexfunktionen, die auf einer Teilmenge von $\{1, \dots, M-2\}$ der oben aufgeführten Systematik folgen (möglicherweise auch aus anderen als den ersten m Elementen) und sonst überall übereinstimmen. Dann gilt

$$-k_{12}\alpha(i_1) + k_{23}\alpha(i_2) - k_{34}\alpha(i_3) + \cdots \pm k_{n1}\alpha(i_n) = 0 \ . \tag{4.32}$$

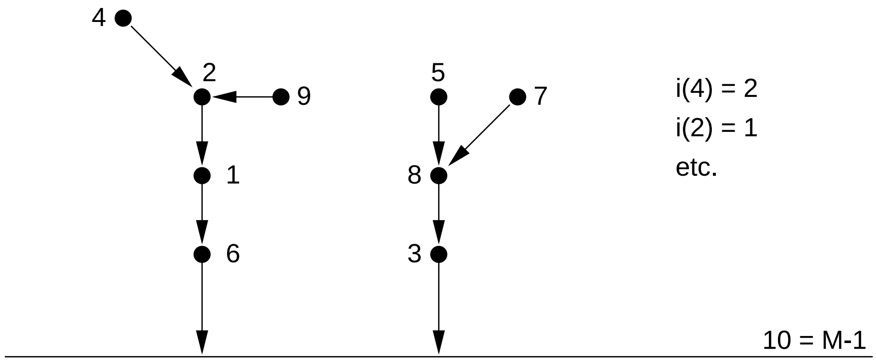
Die Nenner $N(i)$ zu diesen Indexfunktionen sind übrigends durch eine ähnliche Beziehung verknüpft:

$$-N(i_1) + N(i_2) - N(i_3) + \cdots \pm N(i_n) \propto -z_{12} - z_{23} - z_{34} - \cdots - z_{n,1} = 0 \ . \tag{4.33}$$

J. Graphische Darstellung einer Funktion $i \in I$

Jede Indexfunktion $i \in I$ kann dargestellt werden durch einen gerichteten Graphen: Alle Punkte $j \in \{1, \ldots, M-2\}$ bekommen einen Pfeil zum Punkt $i(j)$. Der Funktionswert $M-1$ der Indexfunktion wird durch einen Pfeil auf die "Basislinie" markiert.

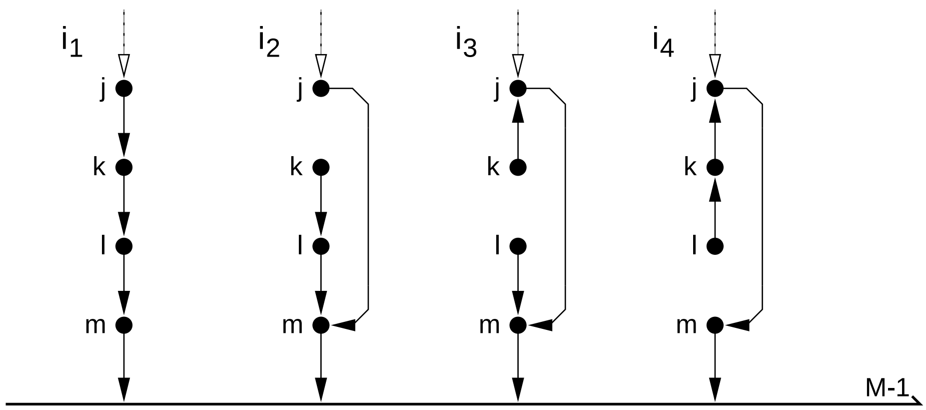
Da i keine Permutation enthält, führt von jedem Punkt j ein eindeutiger Weg auf die Basislinie. Zudem zerfällt jeder Graph in $|\{j : i(j) = M-1\}|$ Zusammenhangskomponenten:



Graph einer Indexfunktion

Jeder Graph dieser Form mit $M-2$ Punkten gehört eindeutig zu einer Indexfunktion $i \in I$.

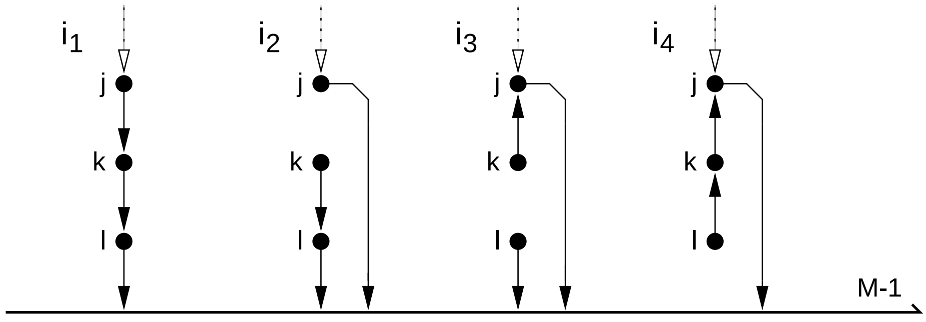
Die Relationen für die Zahlen $\alpha(i)$ für verschiedene Indexfunktionen i kann an diesen Graphen veranschaulicht werden: Sind beispielsweise vier Punkte (Indizes) j, k, l, m gegeben, so lassen sich vier Indexkombinationen angeben, so daß sich die zugehörigen $\alpha(i)$'s (mit entsprechenden k_{ij}–Vorfaktoren) zu Null addieren:



$$- k_{jm}\alpha(i_1) + k_{jk}\alpha(i_2) - k_{kl}\alpha(i_3) + k_{lm}\alpha(i_4) = 0$$

Gleichung verschiedener α's mit $j, k, l, m \in \{1, \ldots, M-2\}$

Diese Relation kann auch erweitert werden auf den Fall, daß eine gewählter Zahlen (z.B. m) gleich $M-1$ ist, also kein Punkt des Graphens (und damit kein Index), sondern symbolisiert wird durch die Basislinie.



$$- k_{jm}\alpha(i_1) + k_{jk}\alpha(i_2) - k_{kl}\alpha(i_3) + k_{lm}\alpha(i_4) = 0$$

Relation für $m = M-1$

K. **Bezeichnungen**

Zu jedem Punkt j des Graphens zu einer Indexfunktion i läßt sich eindeutig die Menge aller "Vorgänger"– und "Nachfolger"–Punkte definieren durch

$$\begin{aligned} v_i(j) = \{j' \in \{1,\ldots,M-2\} :& \exists n \geq 1,\ \exists j_1,\ldots,j_n :\ j_1 = j,\ j_n = j', \\ & i(j_k) = j_{k+1}\ \forall k = 1,\ldots,n-1\} \\ n_i(j) = \{j' \in \{1,\ldots,M-2\} :& \exists n \geq 1,\ \exists j_1,\ldots,j_n :\ j_1 = j',\ j_n = j, \\ & i(j_k) = j_{k+1}\ \forall k = 1,\ldots,n-1\} \end{aligned} \tag{4.34}$$

Der Punkt j soll dabei stets zu seiner Nachfolger– und Vorgängermenge gehören: $j \in v_i(j)$ und $j \in n_i(j)$.

Zudem sei noch zu jedem Nenner $N(i)$ ein Anzahl modifizierter Nenner definiert durch

$$N_k(i) = z_{k,i(k)} N(i) \qquad k = 1,\ldots,M-2\ . \tag{4.35}$$

$N_k(i)$ hängt offenbar nicht mehr von $i(k)$ ab.

L. **Hilfsgleichung 2**

Eine weitere Hilfsidentität ist noch nötig. Dieses ist eine Verallgemeinerung der Gleichung (3.3.10) für den Fall der M–Punkt–Funktion. Gleichzeitig wird hier der Beweis dieser Gleichung nachgeholt. Die explizite Rechnung im letzten Kapitel folgt im wesentlichen den Rechenschritten hier, so daß dieses Beispiel als Veranschaulichung des Beweises dienen kann.

Ist $i \in I$ eine Indexfunktion, so ist zuerst

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{M-2} \sum_{j \in v_i(k)} \partial_j N_k(i) \prod_{p<q} z_{pq}^{\ k_{pq}} \\ &= \sum_{k=1}^{M-2} \sum_{j \in v_i(k)} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{M-1} \frac{k_{jm} - \Delta(i,k,j,m)}{z_{jm}} N_k(i) \prod_{p<q} z_{pq}^{\ k_{pq}} \end{aligned} \tag{4.36}$$

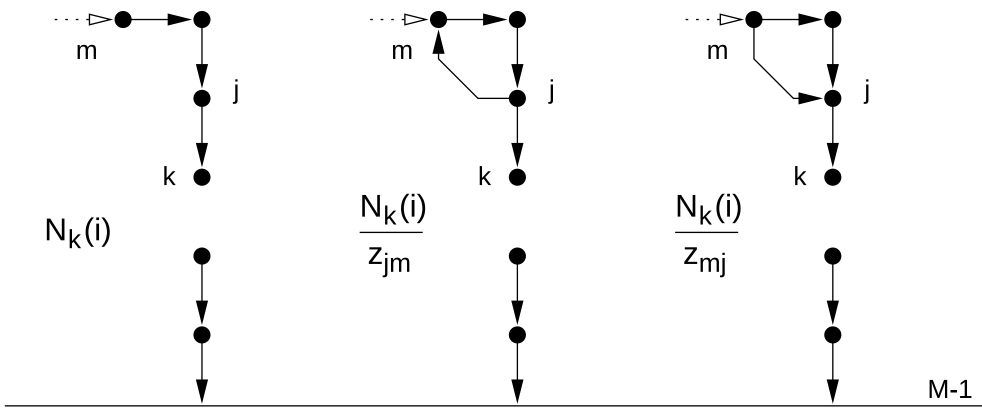
mit

$$\Delta(i,k,j,m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \Big((j \neq k) \wedge (i(j) = m)\Big) \vee \Big((m \neq k) \wedge (i(m) = j)\Big) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{4.37}$$

Δ ist also gleich 1, falls die Punkte j und m im Graphen von $N_k(i)$ verbunden sind, d.h. $N_k(i)$ enthält einen Term z_{jm} oder z_{mj}. Da j ein Vorgängerpunkt von k ist, ist dieses nur möglich, falls auch m ein Vorgängerpunkt ist, $m \in v_i(k)$. Ist dann jedoch $\Delta = 1$ für Werte $j = j_0$, $m = m_0$ (und festem k), so ist auch $\Delta = 1$ auch auf für $j = m_0$ und $m = j_0$. Der Summand hat dann (für gleiches k) jedoch anderes Vorzeichen, so daß in der Summation Δ durchgehend verschwindet.

In der zweiten Zeile von Gl.(4.36) verschwinden sogar alle Summanden mit $m \in v_i(k)$, jedoch ist es für die folgende Rechnung einfacher, diese stehenzulassen.

Eine graphische Darstellung von $N_k(i)$ und $\dfrac{N_k(i)}{z_{jm}}$ sowie dem umgekehren Fall $\dfrac{N_k(i)}{z_{mj}}$ kann wie folgt sein: Für jeden Ausdruch z_{pq} in Nenner wird ein Pfeil von p nach q gezeichen, hier ist also:



Nenner–Ausdrücke

Die beiden letzten Graphen entsprechen also nicht einem $i \in I$ (das ist für die Hilfsgleichung nicht wichtig, wird aber später verwendet).

Wegen $j \in v_i(k) \Leftrightarrow k \in n_i(j)$ können zudem die ersten beiden Summen vertauscht werden:

$$\sum_{k=1}^{M-2} \sum_{j \in v_i(k)} = \sum_{j=1}^{M-2} \sum_{k \in n_i(j)} . \tag{4.38}$$

Damit kann der anfängliche Ausdruck umgeformt werden auf

$$(\dots) = \sum_{j=1}^{M-2} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{M-1} \frac{k_{jm}}{z_{jm}} \sum_{k \in n_i(j)} N_k(i) \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} . \tag{4.39}$$

Nun ist

$$\sum_{k \in n_i(j)} N_k(i) = \sum_{k \in n_i(j)} z_{k,i(k)} \; N(i) = N(i) z_{j,M-2} . \tag{4.40}$$

Die Doppelsumme über (j,m) kann aufgeteilt werden in einen Teil mit $m = M-1$, sowie die übrigen Summanden in Fälle mit $j < m$ und $m < j$, wobei der Fall $m < j$ durch Vertauschen der Summationsvariablen $j \leftrightarrow m$ auch als Summe über $j < m$ geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
(\dots) =& N(i) \left[\sum_{1 \le j \le m \le M-2} \frac{k_{jm}}{z_{jm}} z_{j,M-2} + \sum_{1 \le j \le m \le M-2} \frac{k_{mj}}{z_{mj}} z_{m,M-2} + \sum_{j=1}^{M-2} \frac{k_{j,M-1}}{z_{j,M-2}} \right] \\
=& N(i) \left[\sum_{1 \le j \le m \le M-2} \frac{k_{jm}}{z_{jm}} \Big(z_{j,M-1} - z_{m,M-1} \Big) + \sum_{j=1}^{M-2} k_{j,M-1} \right] \\
=& N(i) \sum_{1 \le j \le m \le M-1} k_{jm} = 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Hier geht die letzte Beziehung der (einfachen) Gleichungen der Zahlen k_{ij} ein.

Das Verschwinden dieses Ausdrucks führt nun auf die (Hilfs–) Gleichung

$$\sum_{k=1}^{M-3} \sum_{j \in v_i(k)} \partial_j N_k(i) \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} = - \sum_{j \in v_i(M-2)} \partial_j N_{M-2}(i) \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} . \tag{4.42}$$

Hier sind die Terme zu $k = M-2$ abgespalten. Das führt insbesondere dazu, daß für eine Indexfunktion $i \in I$ mit $i(M-2) = M-1$ die linke Seite der Gleichung nur Ableitungen nach z_m mit $1 \le m \le M-3$ enthält, über die in der Amplitude auch integriert wird.

M. **Korrelationsfunktion als Summe von Ableitungen**

Es soll zuerst folgende Summe betrachtet werden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k_{M-2,M-1}} \sum_{\substack{i \in I \\ i(M-2)=M-1}} \alpha(i) \sum_{j \in v_i(M-2)} \partial_j N_{(M-2)}(i) \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \\
=& \frac{1}{k_{M-2,M-1}} \sum_{\substack{i \in I \\ i(M-2)=M-1}} \alpha(i) \sum_{j \in v_i(M-2)} \sum_{\substack{m \notin v_i(M-2) \\ m=1,\dots,M-1}} \frac{k_{jm}}{z_{jm}} N_{M-2} \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Der erste Ausdruck kann nach der Hilfsgleichung wegen $i(N-2) = N-1$ auch als Summe über Ableitungen nach $z_1, \ldots, z_{N-3}$ geschrieben werden.

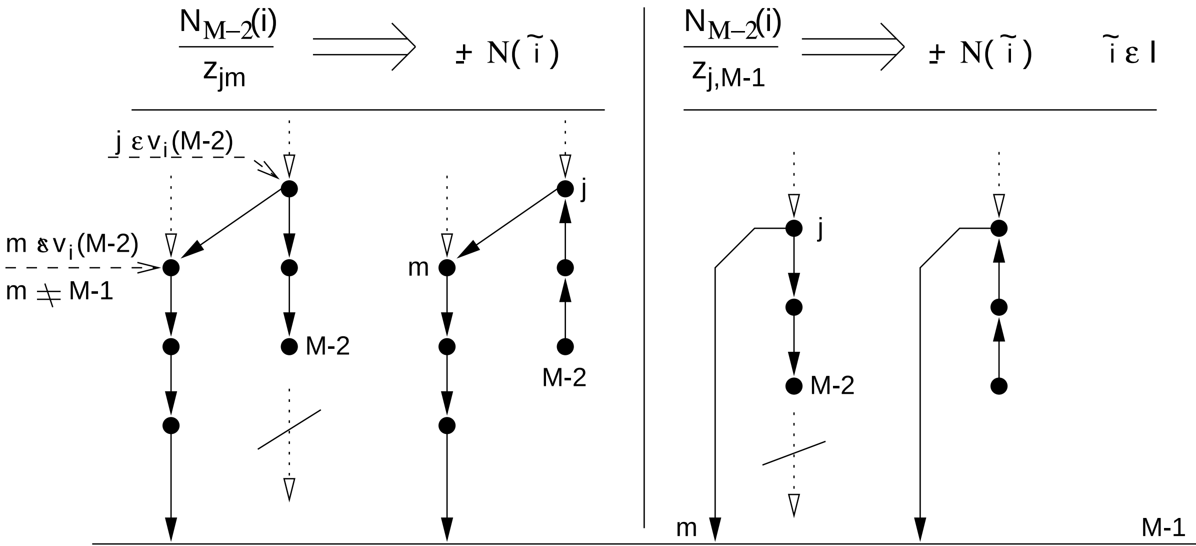
Im zweiten Ausdruck muß nur über die m summiert werden, die nicht Vorgänger von $M-2$ sind, da sich die anderen Summanden paarweise wegheben (wie schon für die $\Delta(\ldots)$ gezeigt). Da $M-2$ ein Endpunkt des Graphens der Indexfunktion ist, bedeutet dieses, daß m kein Punkt der Zusammenhangskomponente von $M-2$ annimmt.

Für $j = M-2$ und $m = M-1$ ist der Summand gleich $\alpha(i)N(i)$, so daß die Summe schon mal alle Terme $\alpha(i)N(i)$ enthält, für die $i \in I$ und $i(M-2) = M-1$ ist.

In allen anderen Fällen ist

$$\frac{N_{M-2}(i)}{z_{jm}} = N(i)\frac{z_{M-2,M-1}}{z_{jm}} \tag{4.44}$$

bis auf Vorzeichen gleich einem Nenner $N(\tilde{i})$ mit $\tilde{i} \in I$, also Nenner einer "gültige" Indexfunktion $i \in I$. Dieses kann durch Konstruktion von $\tilde{i}$ mit der Fallunterscheidung $m \neq M-1$ und $m = M-1$ graphisch veranschaulicht werden:



Umwandlung zu einer "gültigen" Indexfunktion.

Sei umgekehrt ein Index $\tilde{i} \in I$ gegeben, mit $\tilde{i}(M-2) \neq M-1$. Dann gibt es einen Weg von $M-2$ nach $M-1$, beschrieben durch

$$j_1, j_2, \ldots, j_n\ ; \quad j_1 = M-2; \quad i(j_k) = j_{k+1} \text{ für } k = 1, \ldots, n-1 \text{ und } i(j_n) = M-1\ . \tag{4.45}$$

Dieser Nenner $N(\tilde{i})$ tritt in der Summe der Ableitungen in Gl.(50) (bis auf Vorzeichen) $k-1$ mal in der Form $N_{M-2}(i)/z_{jm}$ auf, mit $i \in I$ und $i(M-2) = M-1$:

Zu $k = 1, \ldots, n$ sei

$$i_k = \begin{cases} i_k(j_m) = j_{m-1} \quad m = 2, \ldots k \\ i_k(j_1 = M-2) = M-1 \\ i_k(j) = i(j) \quad \text{sonst} \end{cases} . \tag{4.46}$$

Für diese i_k gilt also

$$N(i_k) \frac{z_{M-2,M-1}}{z_{j_k,j_{k+1}}} = (-1)^{k-1} N(\tilde{i}) \;, \tag{4.47}$$

wobei $j_{n+1} = M - 1$ gesetzt ist.

Zu den Indizes i_k gehört zudem eine $\alpha(i)$–Gleichung, nämlich

$$-k_{M-2,M-1}\alpha(i) + k_{j_1 j_2}\alpha(i_1) \pm \cdots \pm k_{j_n j_1}\alpha(i_n) = 0 \;. \tag{4.48}$$

Schließlich ist

$$\frac{1}{x_{M-2,M-1}} \sum_{k=1}^{n} \alpha(i_k) \frac{k_{j_k,j_{k+1}}}{z_{j_k,j_{k+1}}} N_{M-2} = \alpha(i) N(i) \tag{4.49}$$

Da Zuordnung jedes Summanden der Summe (4.43) zu einer Indexfunktion $\tilde{i} \in I$ gemäß Konstruktion ist also eindeutig, umgekehrt gehören zu jedem $\tilde{i} \in I$ (mit $\tilde{i}(M-2) = M-1$ oder $\tilde{i}(M-2) \neq M-1$) ein oder mehrere Summanden der Summe (4.43), entsprechend der expliziten Konstruktion in (4.46), so daß sich (4.43) in Teilsummen (4.49) aufteilen läßt. (4.43) ist also gleich der Summe (4.18), die sich aus der vollständigen Kontraktion der Korrelationsfunktion ergibt.

N. Verschwinden der Amplituden

Mit der Hilfsgleichung 2 kann also geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \alpha(i) N(i) &= \frac{1}{k_{M-2,M-1}} \sum_{\substack{i \in I \\ i(M-2)=M-1}} \alpha(i) \sum_{j \in v_i(M-2)} \partial_j N_{(M-2)}(i) \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \\ &= -\frac{1}{k_{M-2,M-1}} \sum_{\substack{i \in I \\ i(M-2)=M-1}} \alpha(i) \sum_{k=1}^{M-3} \sum_{j \in v_i(k)} \partial_j N_k(i) \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \end{aligned} \tag{4.50}$$

Damit ist die M–Punkt–Amplitude für $M > 3$ also

$$\begin{aligned} A_M &= \int d^2 z_1 \cdots d^2 z_{M-3} \left\langle \prod_{j=1}^{M-2} \left([\partial Z_j]^- + [\Psi_j] \right) \prod_{j=1}^{M} e^{[Z_j]} \right\rangle \\ &= \frac{1}{k_{M-2,M-1}} \sum_{\substack{i \in I \\ i(M-2)=M-1}} \sum_{k=1}^{M-3} \sum_{j \in v_i(k)} \int d^2 z_1 \cdots d^2 z_{M-3} \partial_j \left(\alpha(i) N_k(i) \prod_{p<q} z_{pq}^{k_{pq}} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Damit verschwindet die Tree–Level–Amplitude des N=2 String für mehr als drei externe Teilchen.

Nachwort

Die explizite Rechnung bestätigt, was schon aus Konsistenzgründen nahe liegt: Die M–Punkt–Amplitude des N=2 Strings auf der Sphäre besitzt jenseits der 3–Punkt–Amplitude Polstellen, die massiven Teilchen entsprechen würden, die jedoch im Spektrum der Strings fehlen [21]. Deshalb sollte die M–Punkt–Amplitude für $M \geq 4$ verschwinden. Dieses ist für die 4–Punkt–Funktion einfach verifizierbar, bei der 5–Punkt–Funktion ist es nötig, die Rechnung systematischer durchzuführen da der Umfang der Terme schnell wächst. Die M–Punkt–Amplitude für $M \geq 6$ ist eine direkt Verallgemeinerung der 5–Punkt–Funktion. So beinhaltet das Kapitel IV kaum neue Ideen und folgt in der Abfolge der Rechenschritte dem Kapitel III.

Auf dem nächsten Level, den Loop–Amplituden, sind wenig Berechnungen durchgeführt. Die 3–Punkt–Funktion mit einem Loop ist zwar berechnet [20], jedoch unterscheidet sich der Rechenweg wesentlich von der Rechnung auf dem Tree–Level. Eventuell bietet sich bei der Rechnung auf dem Torus eher die Untersuchung möglicher Polstellen der Amplitude an, als die direkte Rechnung (natürlich lassen sich ebenso Polstrukturen auf der Sphäre untersuchen, jedoch sind die Relationen zwischen den Nenner-Ausdrücken $N(i)$ in dieser Rechnung einfacher hinzuschreiben als entsprechende Gleichungen für Ausdrücke mit Theta–Funktionen). Für die Berechnung der Loop–Amplituden direkt verwendbar sind allerdings die Gleichungen, die die Zahlen $\alpha(i)$ verknüpfen, d.h. die Gleichungen für die auftretenden Impulsterme. Diese entstehen in gleicher Form in den Loop–Amplituden.

Eine weitere, interessante Frage ist die Berechnung von gemischten Amplituden von offenen und geschlossenen Strings. Hier sind einige Berechnungen zur 4–Punkt–Amplitude angestellt worden [23,24]. Alle diese Amplituden verschwinden indem stets der gleiche "kinematische Faktor" bei der Rechnung auftritt. Dieser kinematische Faktor erscheint in der Rechnung von Kapitel IV als Integral einer Ableitung. Ein wesentlicher Unterschied bei den gemischten Amplitude ist jedoch, daß als verbleibende global konforme Gruppe nur die reellen Möbius–Transformationen auftreten (mit drei reellen Parametern), während die Einsetzungspunkte der geschlossene Strings über die Ebene integriert werden. Wenn jedoch über mehr Punkte integriert wird und weniger $SL(2)$–fixiert, lassen sich evtl. sogar mehr verschwindende Ableitungen hinschreiben und Teile der hier durchgeführten Rechnung sind ggf. auch bei den gemischten Amplituden verwerten (aber dieses ist natürlich nur spekulativ, näheres muß eine explizite Rechnung zeigen).

Diese Arbeit ist von mir selbständig und ohne weitere Hilfsmittel angefertigt worden. Der Text ist übrigends mit AMSTeX gesetzt.

September, 1997

Literatur

[1] M.B.Green, E.Witten, J.H.Schwarz: *Superstring theory,* Vol. 1, Cambridge University Press 1987

[2] M.Kaku: *Introduction to superstrings,* Springer Verlag, New York

[3] S.V.Ketov: *Conformal field theory,* World Scientific, Singapore, 1995

[4] P.Ginsparg: *Applied conformal field theory,* Les Houches, Session XLIX, 1988, Fields, Strings and Critical Phenomena

[5] M.E.Peskin: *Introduction to string and superstring theory II,* 1986 TASI lectures, SLAC–PUB–4251 / Santa Cruz TASI proceedings

[6] J.Bishoff: *Moduli und Amplituden der N=2 Strings,* Diss. 1996, ITP Hannover

[7] H.Behnke, F.Sommer: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen (Kapitel 5 und 6),* Springer Verlag Berlin, 1976

[8] J.E.Paton, H.–M.Chan: *Generalized Veneziano model with isospin,* Nucl. Phys. B10 (1969), 516–520

[9] M.Ademollo et.al.: *Supersymmetric string and colour confinement,* Phys. Lett. 62B (1976) 1

[10] M.Ademollo et.al.: *Dual strings with U(1) colour symmetry,* Nucl. Phys. B111 (1976) 77

[11] L.Brink, J.H.Schwarz: *Local complex supersymmetry in two dimensions,* Nucl. Phys. B121 (1977) 285

[12] E.S. Fradkin, A.A.Tseytlin: *Quantization of two–dimensional supergravity and critical dimensions for string models,* Phys. Lett. 106B (1981) 63

[13] H.Kawai, D.C.Lewellen, S.–H.H.Tye: *A relation between tree amplitudes of closed and open strings,* Nucl. Phys. B269 (1986) 1

[14] D.Fridan, E.Martinec, S.Shenker: *Conformal invariance, supersymmetry and string theory,* Nucl. Phys. B271 (1986) 93

[15] W.Boucher, D.Fridan, A.Kent: *Determinant formulae and unitarity for the N=2 superconformal algebras in two dimensions or exact results on string compactification,* Phys. Lett. B172 (1986) 316

[16] A.R.Bogojevic, Z.Hlousek: *The BRST quantization of the O(2) string,* Phys. Lett. 179B (1986) 69

[17] D'Adda, Lizzi: *Space dimensions from supersymmtery for the N=2 spinning string: a four–dimensional model,* Phys. Lett. B191 (1987) 85

[18] S.D.Mathur, S.Mukhi: *BRST quantization of twisted extended fermionic string,* Phys. Rev. D36 (1987) 465

[19] S.D.Mathur, S.Mukhi: *The N=2 fermionic string: path integral, spin structures and supersymmetry on the torus,* Nucl. Phys. B302 (1988) 130

[20] M.Bonini, E.Gava, R.Iengo: *Amplitudes in the N=2 string,* Mod. Phys. Lett. A6 no.9 (1991) 795

[21] H.Ooguri, C.Vafa: *Geometry of N=2 strings,* Nucl. Phys. B361 (1991) 469

[22] A.Parkes, *On N=2 strings and classical scattering solutions of self–dual Yang–Mills in (2,2) space–time,* Nucl. Phys. B376 (1992) 279

[23] N.Marcus: *The N=2 open string,* Nucl. Phys. B387 (1992) 263

[24] N.Marcus: *A tour through N=2 string,* Tel-Aviv preprint TAUP 2002-92, Nov. 92, hep-th / 9211059

[25] W.Siegel: *N=4 string is the same as the N=2 string,* Phys. Rev. Lett. 69 no.10 (1992) 1493

[26] S.V.Ketov: *Spacetime SUSY of extended fermionic string in 2+2 dimensions,* Class. Quantum Grav. 10 (1993) 1689

[27] J.Bischoff, S.V.Ketov, O.Lechtenfeld, *The GSO projection, BRST – cohomology and picture – changing in N=2 string theory,* Nucl. Phys. B438 (1995) 373

[28] S.V.Ketov, O.Lechtenfeld: *The string measure and spectral flow of critical N=2 strings,* Phys. Lett. B353 (1995) 463

[29] S.V.Ketov, O.Lechtenfeld, A.J.Parkes: *Twisting the N=2 string* Phys. Rev. D51 (1995) 2872

[30] O.Lechtenfeld: *Integral measure and spectral flow in the critical N=2 string,* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 49 (1996) 51

[31] J.Bischoff, O.Lechtenfeld: *Restoring reality for the self–dual N=2 string* DESY 96-177 / ITP–UH–19/96

[32] O.Lechtenfeld, W.Siegel: *N=2 worldsheet instantons yield cubic self–dual* Yang–Mills, hep–th / 9704076