Skalare Deformation geladener Schwarzer Löcher

Sven Peters

Diplomarbeit
am Institut für Theoretische Physik
der Universität Hannover

1. Dezember 1997

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit werden geladene Schwarze Löcher untersucht, an die ein Skalarfeld minimal gekoppelt ist. Ausgehend von der Wirkung werden die Bewegungsgleichungen hergeleitet, untersucht und gelöst. Dabei werden zur Vereinfachung von dem Problem Kugelsymmetrie und Stationarität gefordert.

Eine allgemeine Lösung des resultierenden Gleichungssystems ist nicht möglich. Um dennoch Lösungen zu finden, wird zum einem das Problem weiter spezialisiert, zum anderen über Ansätze für das Skalarfeld eine der Differentialgleichungen gelöst, und daraus fortschreitend das ganze Gleichungssystem. Über den ersten Weg wird eine Lösung für ein wechselwirkungsfreies Skalarfeld gefunden, die eine Erweiterung der Buchdahllösung [13] auf den Fall geladener Schwarzer Löcher darstellt. Zur Lösung des Problems für selbstwechselwirkende Skalarfelder werden zwei Ansätze aus vorhergehenden Diplomarbeiten ([1],[2]) verwendet, und zusätzlich ein weiterer Lösungsansatz präsentiert und untersucht, welcher die freie Skalarfeldlösung wiederum als Grenzfall enthält.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Obwohl die Allgemeine Relativitätstheorie seit über 80 Jahren als physikalische Theorie existiert und schon die ersten Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen Singularitäten aufwiesen, besteht immer noch großes Interesse an Schwarzen Löchern. Gerade in neuerer Zeit sind durch die Entwicklungen in der Stringtheorie die Zahl der Arbeiten gewachsen, die sich mit Schwarzen Löchern und vor allen Dingen mit den sie betreffenden No-Hair-Theoremen beschäftigen.

Schwarze Löcher sind mit ihren Ereignishorizonten, welche in ungewöhnlicher Weise ein Gebiet der Raum-Zeit auszeichnen, aber auch Gegenstand des Interesses fundamentaler Physik.

Die nähere Untersuchung dieser Objekte offenbart bemerkenswerte Eigenschaften. Eine ist das Auftreten von Raum-Zeit-Singularitäten. Diese wurden zuerst in der einfachsten Schwarzen-Loch-Lösung, der Schwarzschildlösung entdeckt. In diesem Zusammenhang wurde vermutet, daß diese Singularitäten ein Artifakt der großen Symmetrie der Lösung darstellt, und bei leichten Abweichungen von sphärischer Symmetrie verschwinden würde. Doch im Gegenteil stellte sich heraus, daß unter allgemeineren Bedingungen, die klassischen Gleichungen, welche gravitative Kollapse aus nichtsingulären Anfangsbedingungen beschreiben, unausweichlich zu Raum-Zeit-Singularitäten führen. Die genaue Natur dieser Singularitäten und die Frage ob sie den Blicken entfernter Beobachter durch Horizonte entzogen sind oder nicht, ist Gegenstand aktueller Forschung.

Eine weitere Motivation zur Untersuchung dieser Objekte folgt aus der Entdeckung [9], daß die Quantenmechanik den Masseverlust Schwarzer Löcher durch thermische Strahlung impliziert. Dies führt mit großer Wahrscheinlichkeit zur kompletten Zerstrahlung des Schwarzen Loches. Dieser Prozeß wirft einige Fragen zu dem Verschwinden von Information, welche mit der verschluckten Materie verbunden ist, auf, bzw. führt zur Frage ob die fundamentalen Gesetze der Quantenmechanik modifiziert werden müssen.

Ein weitere Betrachtungspunkt ist die Symmetrie in und die Einfachheit der klassischen Schwarzen-Loch-Lösungen. Es ist nicht überraschend, daß die Schwarzschild- und andere bekannte Lösungen diese Eigenschaften haben. Im Allgemeinen ist es so, daß eben die analytischen lösbaren gerade die symmetrischen und algebraisch einfachen Ansätze sind. Ungewöhnlich ist jedoch der allgemeine Grad, den diese Eigenschaften haben. Nehme man zum Beispiel den Fall von Elektromagnetismus gekoppelt an Gravitation, ohne weitere Materie. Alle Schwarzen-Loch-Lösungen, welche sowohl stationär als auch invariant unter Zeitumkehr sind, sind sphärisch symmetrisch. Wird die Bedingung der Invarianz unter Zeitumkehr fallengelassen, gibt es auch Lösungen mit nichtverschwindenem Drehmoment. Die Ausrichtung dieses Drehmoments zerstört die Isotropie, die axiale Symmetrie bleibt jedoch erhalten. Weiterhin sind diese Lösungen vollständig durch die mit ihnen verbundenen erhaltenen Größen bestimmt - ihrer Gesamtenergie, der elektromagnetischen Ladung und dem Drehmoment.

Man möchte meinen, daß es weitere Typen von Schwarzen Löchern gibt. So z.B. Lösungen, welche aufgrund der Massenverteilung höheren Multipolmomenten entsprechen. Bemerkenswerter Weise gibt es jedoch nach Beschränkung auf Gravitation und Elektromagnetismus keine anderen Schwarzen Löcher. Diese werden vollständig beschrieben durch Masse, Drehimpuls, Ladung. Sie sind alle axialsymmetrisch, die statischen Lösungen sphärisch symmetrisch.

Der nächste Schritt liegt in dem Versuch mehr Struktur zu erhalten, indem man andere Arten von Materie der Theorie hinzufügt. Diese Möglichkeiten werden in einer Reihe von Fällen ausgeschlossen, welche zu der Aussage führten: „Schwarze Löcher haben keine Haare“. Die ersten und einfachsten No-Hair-Theoreme betrafen masselosse Skalarfelder und das neutrale Klein-Gordon-Feld, darunter das später in dieser Arbeit angeführte Argument von Bekenstein [10]. Doch ist es so, daß es kein allgemeines No-Hair-Theorem gibt, sondern nur eine Sammlung von Theoremen, anwendbar auf die jeweiligen speziellen Fälle.

Auch wenn diese Theoreme nur für Spezialfälle erhalten wurden, besteht die Vermutung, das dahinter ein allgemeineres Prinzip steckt.

In dieser Arbeit sollen nun geladene Schwarze Löcher betrachtet werden, an denen ein selbstwechselwirkendes Skalarfeld gekoppelt ist. Es werden Lösungen mit nichttrivialen Feldern und Potentialen vorgestellt. Die Beziehung der Lösungen zu bekannten No-Hair-Theoremen für Skalarfelder kann jedoch nur kurz gestreift werden.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel möchte ich ein Überblick über die physikalischen Grundlagen dieser Arbeit geben. Die verwendeten Gleichungen und Ergebnisse werden kurz zitiert und in ihren Zusammenhängen gezeigt, so wie man sie in den Werken zur Allgemeinen Relativitätstheorie ([3],[4],[5]) findet.

2.1 Die Allgemeine Relativitätstheorie

In der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreibt man die Bewegung von Testteilchen durch die freie Bewegung in einem von Massen gekrümmmten Raum. Die freie Bewegung im Bereich eines Gravitationsfeldes verläuft auf geodätischen Linien, die durch

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

beschrieben werden. Dabei wird der mathematische Apparat der Differentialgeometrie benutzt, der das Rechnen auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten ermöglicht. Gleichungen werden kovariant als Tensorgleichungen formuliert, was ihre Unabhängigkeit vom gewählten Koordinatensystem beinhaltet. Die Komponenten der Tensoren bezeichnet man mit Indizes, die von 0 bis 3 mit $x^\mu = (t, x, y, z)$ laufen, und in dieser Arbeit mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden. Werden nur die räumlichen Komponenten eines Tensors betrachtet, werden lateinischen Buchstaben verwendet. Kovariante Komponenten eines Tensors haben obenstehende Indizes, kontravariante entsprechend tiefe Indizes. Der Zusammenhang beider Komponenten ist über den metrischen Tensor gegeben, mit dem die Indizes herauf- oder heruntergezogen werden können ($g_{\mu\nu}a^\nu = a_\mu$). Tritt in einer Gleichung ein Index doppelt auf, wird die übliche Einsteinsche Summenkonvention angewandt, d.h. über ihn summiert ($a_\mu b^\mu := \sum_\mu a_\mu b^\mu$).

Der Ausgangspunkt zur Untersuchung der vierdimensionalen Raumzeit mit den Mitteln der Differentialgeometrie ist der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$, der dem Gravitationspotential entspricht. Er ist über das Quadrat des Abstandsdifferentials definiert:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Die Metrik enthält dabei alle Information über die Raumzeit. Die pseudoeuklidische Geometrie der Raumzeit spiegelt sich in der Signatur der Metrik wieder. So wird die Gesamtheit der Vorzeichen der Elemente des metrischen Tensors in Diagonalform bezeichnet. Ihre Verwendung ist in der Literatur verschieden, in dieser Arbeit werde ich sie in der Form $(-1,1,1,1)$ verwenden. Dieser Unterschied muß beim Vergleich mit anderen Arbeiten beachtet werden, da er an einigen Stellen zu Vorzeichen führt.

Aus der Metrik lassen sich alle wichtigen Größen, wie Christoffel-Symbole $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, Riemann-Tensor $R^\lambda_{\mu\sigma\nu}$ und Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ berechnen.

Die Christoffel-Symbole $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sind definiert als

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \tag{2.1}$$

und treten in kovarianten Ableitungen auf, damit diese transformationsunabhängig bleiben. Diese kovarianten Differentiationen lauten z.B. auf Vektoren

$$\begin{aligned} D_\mu t^\nu &= \partial_\mu t^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} t^\lambda \\ D_\mu t_\nu &= \partial_\mu t_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} t_\lambda \end{aligned}$$

Der Riemannsche Krümmungstensor, oder kurz Riemann- bzw. Krümmungstensor, bestimmt sich aus

$$R^\lambda_{\mu\kappa\nu} = \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} + \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \tag{2.2}$$

Er ist aus den ersten und zweiten Ableitungen der Metrik aufgebaut und gibt die Krümmung der Raumzeit an.

Die Verjüngung des Riemanntensors führt auf den Ricci-Tensor

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \tag{2.3}$$

Die Spur des Ricci-Tensors wiederum definiert den Ricci- oder Krümmungsskalar.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Dieser Skalar ist ein Maß für die skalare Krümmung und als solcher Ausgangspunkt für den Erhalt der Feldgleichungen der Gravitation aus der Wirkungsfunktion

$$S = \int d^4x \, \sqrt{-g}\mathcal{L}_G = \int d^4x \, \sqrt{-g} R$$

Fügt man in dieser Wirkung die Lagrangedichte der beteiligten Materie hinzu, erhält man durch Variation nach dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ die Einsteinschen Feldgleichungen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Dabei ist $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor der die Krümmung verursachenden Materie.

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Hier und in anderen Gleichungen verwende ich die Abkürzung

$$g = \det(g_{\mu\nu})$$

2.2 Stationarität und Kugelsymmetrie

Ich möchte in dieser Arbeit kugelsymmetrische und stationäre Lösungen der Einsteingleichungen untersuchen. Dazu ist die Metrik mittels Koordinatentransformationen von einer allgemeinen Form auf eine dem Problem angepaßte zu bringen. Aufgrund der geforderten Symmetrie darf das Wegelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

nur von den rotationsinvarianten Größen $d\vec{x}^2$, $\vec{x}d\vec{x}$ und $\vec{x}^2$ abhängen.

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dt\vec{x}d\vec{x} + C(r)(\vec{x}d\vec{x})^2 + D(r)(d\vec{x})^2$$

Durch den Übergang zu den für dieses Problem zweckmäßigen Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x^1 &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ x^2 &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ x^3 &= r\cos(\vartheta) \end{aligned}$$

bekommt das Wegelement die Form:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -A(r)dt^2 + B(r)rdtdr + C(r)r^2dr^2 \\ &\quad +D(r)(dr^2 + r^2d\vartheta^2 + r^2\sin^2(\vartheta)d\varphi^2) \\ &= -A(r)dt^2 + B(r)rdtdr + [C(r)r^2 + D(r)]dr^2 + D(r)r^2d\Omega^2 \end{aligned}$$

Die Zahl der Funktionen kann reduziert werden, da noch die Freiheit in der Wahl eines Zeitnullpunkts bzw. einer Skalierung der Koordinate r bestehen.

Ich werde in dieser Arbeit die Metrik-Form

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + \frac{1}{G(r)}dr^2 + R(r)^2d\Omega^2 \tag{2.5}$$

verwenden. Dies ist die sogenannte GHS-Form der Metrik [6]. Man erhält sie nach Einführung der Funktionen $R(r)^2 = D(r)r^2$ und $1/G(r) = D(r) + C(r)r^2$ durch eine ortsabhängige Redefinition der Zeitkoordinate:

$$dt' = \frac{1}{2}\frac{B}{A}rdr + \sqrt{\frac{B^2}{4A^2}r^2dr^2 + \frac{G}{A}dt^2}$$

Die Funktion $R(r)$ wurde trotz der Verwechslungsgefahr mit dem Ricciskalar so bezeichnet, da sie den Krümmungsradius angibt, und aus dem Zusammenhang immer ersichtlich ist, was mit R gemeint ist.

Wie in (2.5) gekennzeichnet, sind aufgrund der geforderten Symmetrien beide Metrikfunktionen $R(r)$ und $G(r)$ nur von der Radialkoordinate r abhängig.

Andere in der Literatur oft verwendete Formen sind die Standartform

$$ds^2 = -e^{\lambda}dt^2 + e^{\nu}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

und die isotrope Form

$$ds^2 = -Hdt^2 + J(dr^2 + r^2d\Omega^2)$$

2.3 Metrikkomponenten und Christoffelsymbole

Die Metrikkomponenten lauten also bei Verwendung der GHS-Form der Metrik:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -G \\ g_{rr} &= \frac{1}{G} \\ g_{\vartheta\vartheta} &= R^2 \\ g_{\varphi\varphi} &= R^2\sin^2\vartheta \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da die Metrik symmetrisch und in der hier verwendeten Form diagonal ist, gilt:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

und falls sie invertierbar ist:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}$$

Der Ausdruck aus der Wurzel der Determinante des metrischen Tensors berechnet sich zu:

$$\sqrt{-g} = R^2 \sin\vartheta$$

Die nach Gleichung (2.1) berechneten nichtverschwindenen Christoffelsymbole lauten:

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tr} &= \Gamma^t_{rt} = \frac{G'}{2G} \\
\Gamma^r_{rr} &= -\frac{G'}{2G} \\
\Gamma^r_{tt} &= \frac{1}{2}GG' \\
\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} &= -GRR' \\
\Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -GRR'\sin^2\vartheta \\
\Gamma^\vartheta_{\vartheta r} &= \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = -\frac{R'}{R} \\
\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} &= -\sin\vartheta\cos\vartheta \\
\Gamma^\varphi_{\varphi r} &= \Gamma^\varphi_{r\varphi} = -\frac{R'}{R} \\
\Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta} &= \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Hierbei werden, wie in der gesamten Arbeit, mit den gestrichenen Größen die Ableitungen nach r bezeichnet:

$$a' = \partial_r a = \frac{d}{dr}a$$

Dementsprechend bestimmen sich die Diagonalkomponenten des Riccitensors aus Gleichung (2.2) und (2.3):

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{GG''}{2} + GG'\frac{R'}{R} \\
R_{rr} &= -\frac{G''}{2G} - \frac{G'R'}{GR} - 2\frac{R''}{R} \\
R_{\vartheta\vartheta} &= 1 - GRR'' - GR'^2 - G'RR' \\
R_{\varphi\varphi} &= \sin^2\vartheta\left(1 - GRR'' - GR'^2 - G'RR'\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Der Krümmungsskalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ als Verjüngung des Riccitensors ergibt sich zu:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -G'' - \frac{4G'R'}{R} - \frac{2GR'^2}{R^2} - \frac{4GR''}{R} + \frac{2}{R^2}$$

2.4 Die Schwarzschildlösung

Die einfachste nichttriviale kugelsymmetrische und stationäre Lösung der Einsteinschen Gleichungen wurde 1916 von Schwarzschild [7] gefunden. Sie soll im folgenden kurz hergeleitet werden.

Ich möchte die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ außerhalb einer sphärischen, statischen Massenverteilung bestimmen. Die Materie soll zur Vereinfachung als Punktmasse im Ursprung gedacht werden. Der Energie-Impuls-Tensor verschwindet somit überall außer bei der Position der Punktmasse. Deshalb wird die Metrik in der kugelsymmetrischen und zeitunabhängigen Form (2.5)

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-G(r), 1/G(r), R(r)^2, R(r)^2 sin^2(\vartheta))$$

angesetzt.

Für eine Lösung außerhalb der Massen verteilung muß gelten :

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Die Quellterme treten in dieser freien Einsteingleichung nicht explizit auf. Ihre sphärischen und statischen Eigenschaften sind aber Voraussetzung für diesen Lösungsansatz.

Für diesen metrischen Tensor sind die Komponenten $R_{\mu\nu}$ durch Gleichung (2.8) gegeben. Danach ist die quellenfreie Einsteingleichung für $\mu \neq \nu$ trivial erfüllt, und aus $R_{\vartheta\vartheta} = 0$ folgt $R_{\varphi\varphi} = 0$. Daher reduziert sich das Problem auf die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= 0 = \frac{GG''}{2} + GG'\frac{R'}{R} \\
R_{rr} &= 0 = -\frac{G''}{2G} - \frac{G'R'}{GR} - 2\frac{R''}{R} \\
R_{\vartheta\vartheta} &= 0 = 1 - GRR'' - GR'^2 - G'RR'
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$R_{rr} + \frac{R_{tt}}{G^2} = -2\frac{R''}{r} = 0$$

und somit nach Integration für R

$$R = c_1(r - c_2)$$

Die Forderung nach asymptotischer Flachheit reduziert R auf $R = r$. Zur Bestimmung von G setzt man dies in die Differentialgleichung ein, die man aus $2G \cdot R_{tt}$ erhält. Die Lösung von

$$G'' + \frac{2G'}{r} = 0$$

führt nach Anpassung an die asymptotische Randbedingung zu

$$G(r) = 1 - \frac{r_s}{r}.$$

Die darin auftauchende Integrationskonstante ist erstmal beliebig. Ihre Bedeutung $r_s = 2M$ ergibt sich bei der Untersuchung des Verhaltens in großen Abständen aus dem Newtonschen Grenzfall. Schwache Gravitationfelder stehen über die Raumzeitmetrik zum Newton'schen Gravitationspotential in Beziehung:

$$g_{tt} = -1 - 2\phi_{Newton}$$

Man sieht das M gerade die Masse ist, welcher ein entfernter Beobachter messen würde, z.B. durch Beobachtung Keplerscher Orbits.

Die Metrik hat eine Singularität bei $r = 2M$, wo $g_{tt} = 0$ und $g_{rr} = \infty$ ist. Dies kann zur Schlußfolgerung führen, daß dort eine Singularität in der Raumzeit vorliegt. Eine solche Schlußfolgerung ist jedoch unzutreffend, da schon die Determinate $g = -r^4 \sin^2 \vartheta$ keine Singularität aufweist. Es ist eher so, daß eine Koordinatensingularität gefunden wurde, welche Unzulänglichkeiten in der Definition der Koordinaten widerspiegeln. Durch geeignete Koordinatentransformationen, z.B. zu Kruskalkoordinaten, wird der tatsächlich Charakter der Metrik in diesem Gebiet deutlich. Darauf soll hier jedoch verzichtet werden.

Eine weitere Singularität tritt bei $r = 0$ auf, wo $g_{tt} = \infty$ und $g_{rr} = 0$ ist. Dies ist als Ort der Punktmasse eine echte physikalische Singularität in der Raumzeit.

2.5 Elektrische und magnetische Ladungen

Ich möchte in dieser Arbeit Schwarze Löcher mit magnetischer und elektrischer Ladung betrachten. Da das Problem weiter kugelsymmetrisch und stationär bleiben soll, fordere ich im Außenbereich radialsymmetrische Felder:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e_r} E_r \\ \vec{B} &= \vec{e_r} B_r \end{aligned}$$

Aus der Elektrostatik ist bekannt, daß ausgehend vom Viererpotential A^μ das elektrische und magnetische Feld über Rotation und Divergenz bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla A^0 \\ \vec{B} &= \nabla \times A^k \end{aligned}$$

In der kovarianten Formulierung der speziellen Relativitätstheorie lauten die von einem Beobachter mit der Vierergeschwindigkeit v_ν gemessenen elektrischen bzw. magnetischen Felder:

$$\begin{aligned} E^\mu &= F^{\mu\nu} v_\nu \\ B^\mu &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} v_\nu \end{aligned}$$

Hierin werden in dem auftretenen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ Kombinationen von Ableitungen und Viererpotential zusammengefaßt:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{2.9}$$

Diese Gleichungen bleiben im hier betrachtenten allgemeinrelativistischen Fall bestehen, wobei allerdings zu beachten ist, daß der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe $\mathcal{E}^{\mu\nu\kappa\lambda}$ in krummlinigen Koordinaten definiert werden muß durch

$$\mathcal{E}^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$$

bzw. für seine kontravarianten Komponenten

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\kappa\lambda} = \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$$

Im kugelsymmetrischen und stationären Fall lauten die nichtverschwindenen Komponenten des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ demnach:

$$\begin{aligned} E_r &= F_{rt} = -F_{tr} \\ \sqrt{-g} B_r &= F_{\vartheta\varphi} = -F_{\varphi\vartheta} \end{aligned}$$

Zusätzlich zu den Einschränkungen aus Kugelsymmetrie und Stationarität, soll das elektrische bzw. magnetische Feld von einem elektrischen und magnetischen Monopol im Ursprung erzeugt werden. Dies führt zu folgendem Viererpotential:

$$\begin{aligned} A_t &= -\frac{q_e}{4\pi r} \\ A_r &= 0 \\ A_\vartheta &= 0 \\ A_\varphi &= \frac{q_m}{4\pi}(1 - cos\vartheta) \end{aligned}$$

Nach der Definition des Feldstärkentensors $F_{\mu\nu}$ (2.9) erhält man daraus die nichtverschwindenen Komponenten:

$$\begin{aligned} F_{rt} &= \frac{q_e}{4\pi r^2} \\ F_{\vartheta\varphi} &= \frac{q_m}{4\pi} \sin\vartheta \end{aligned}$$

und das elektrische und magnetische Feld

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{q_e}{4\pi r^2} \\ B_r &= \frac{q_m}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

Die Energiedichte W dieser elektomagnetischen Felder bestimmt sich in dieser Einheitenkonventionen zu

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2}(F_{rt}F^{rt} - F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}) = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{q_e^2}{16\pi^2 r^4} + \frac{q_m^2}{16\pi^2 r^4}\right) = \frac{q_e^2 + q_m^2}{32\pi^2 r^4} =: \frac{2Q^2}{r^4} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Die zusammenfassende Abkürzung $Q^2 = \frac{q_e^2+q_m^2}{(8\pi)^2}$ wird eingeführt, um die Vergleichbarkeit mit Ergebnissen in anderen Konventionen des elektromagnetischen Maßsystem zu erleichtern.

2.6 Die Reissner-Nordström-Lösung

Eine ebenfalls sphärisch symmetrische und stationäre Lösung der Einsteingleichungen, jedoch unter Einbeziehung eines elektrischen Feldes, wurde 1916/18 von Reissner und Nordström [8] gefunden.

Der Herleitung der Schwarzschild-Lösung ist der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes hinzuzufügen. Wie im vorigen Abschnitt gesehen, lauten die nichtverschwindenen Komponenten des Feldstärketensors F_{rt} und $F_{\vartheta\varphi}$. Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes lautet:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{8}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda$$

Nach Einsetzen in die Einsteingleichungen $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}$ erhält man folgende Differentialgleichungen:

$$R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R = \frac{G}{R^2} - \frac{GG'R'}{R} - \frac{G^2R'^2}{R^2} - 2\frac{G^2R''}{R}$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{!}{=} \frac{1}{8}GF_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{G}{2}F_{rt}F^{rt} \\
R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R &= \frac{G'R'}{GR} - \frac{1}{GR^2} + \frac{R'^2}{R^2} \\
&\stackrel{!}{=} -\frac{1}{8G}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2G}F_{rt}F^{rt} \\
R_{\vartheta\vartheta} - \frac{1}{2}g_{\vartheta\vartheta}R &= \frac{1}{2}G''R^2 + G'R'R + GR''R \\
&\stackrel{!}{=} -\frac{1}{8}R^2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}R^2F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi} \\
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} &= -G'' - \frac{4G'R'}{R} - \frac{2GR'^2}{R^2} - \frac{4GR''}{R} + \frac{2}{R^2} = 0
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung für den Krümmungsskalar erhält man durch Spurbildung aus der Einsteingleichung. Summiert man die aus der ersten durch Division mit G^2 erhaltene Gleichung zur zweiten, erhält eine Differentialgleichung für R, deren Lösung nach Anpassung an die asymptotischen Flachheit wieder lautet:

$$R'' = 0 \qquad \longrightarrow \qquad R = r$$

Dies in die Gleichung für den Ricci-Skalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ eingesetzt ergibt folgende Differentialgleichung für G:

$$G'' + 4\frac{G'}{r} + 2\frac{G}{r^2} - \frac{2}{r^2} = 0$$

Die Lösung dieser DGL lautet:

$$G(r) = 1 + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2}$$

Die Konstante c_1 wird wieder durch Vergleich mit dem Newtonsche Gravitationsgesetz zu $c_1 = -2M$ bestimmt. Zur Bestimmung der zweiten Konstanten setzt man die erhaltenen Ergebnisse in die noch verbleibende dritte Differentialgleichung ein

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}G''R^2 + G'R'R + GR''R &= -\frac{1}{8}R^2\left(2F_{rt}F^{rt} + 2F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}\right) + \frac{1}{2}R^2F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi} \\
\longrightarrow \qquad \frac{c_2}{r^2} &= \frac{q_e^2 + q_m^2}{(8\pi)^2 r^2} = \frac{Q^2}{r^2}
\end{aligned}
$$

Die Konstante c_2 bekommt also den Wert Q^2. Das Ergebnis für die Metrikfunktion G lautet somit:

$$G = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

Hier wird deutlich, daß die zusammenfassende Konstante Q so gewählt wurde, damit sich eine möglichst einfache Form ergibt.

Im Gegensatz zur Schwarzschildlösung, deren qualitativer Charakter sich mit dem Wert der Konstanten M nicht änderte, hängt hier die Natur der Raumzeit von dem Verhältnis M/M_{ext} der Masse zur extremalen Masse M_{ext} ab

$$M_{ext} = Q$$

Ist M größer als die extremale Masse so hat die Metrik Koordinatensingularitäten bei den Nullstellen von $G(r)$, welche bei

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - M_{ext}^2} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

liegen. Diese Singularitäten haben denselben Charakter wie die der Schwarzschildlösung.

Ist $M = M_{ext}$, so daß die beiden Nullstellen zusammenfallen, erhält man das extremale Reissner-Nordström-Loch. Es gibt immer noch einen Horizont, jedoch mit anderen Eigenschaften als im Schwarzschildfall, da er eine doppelte Nullstelle darstellt. Außerdem gibt es keine langreichweitige statische elektromagnetische Abstoßung von Ladungen gleichen Vorzeichens, da die gravitative Anziehung sich mit dieser genau aufhebt.

Die letzte Möglichkeit $M < M_{ext}$ beschreibt den Fall einer „nackten“Singularität, bei welcher der Außenbereich nicht durch einen Horizont von den Effekten der physikalischen Singularität im Ursprung abgeschirmt ist. Jedoch besteht die Annahme einer „kosmischen Zensur“, welche die Entwicklung solcher nackten Singularitäten aus allgemeinen nichtsingulären Anfangsbedingungen verbietet.

Kapitel 3

Herleitung der Bewegungsgleichungen

In diesem Kapitel sollen ausgehend von einfachen Annahmen zu den Symmetrien und zu den Lagrangedichten der beteiligten Materiefelder die Gleichungen hergeleitet werden, die dieses Problem bestimmen.

3.1 Variation der Wirkung

Ich suche nach kugelsymmetrischen und stationären Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen. Die Materiefelder, welche als Quellen der Raumzeitkrümmung auftreten, sollen einmal das elektromagnetische Feld und ein minimal an die Gravitation gekoppeltes neutrales Skalarfeld sein. Somit sind in die Wirkung, neben der Lagrangedichte der Gravitation, die Lagrangedichte des Maxwellfeldes und die des Skalarfeldes einzusetzen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{KG} &= \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 2V(\phi)\right)\\ \mathcal{L}_{EM} &= -\frac{1}{4}g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa}\end{aligned}$$

Nicht mit in die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes gehen seine Quellen ein. Diese sollen als Ladungsmonopole im Ursprung sitzen, und nur über die von ihnen erzeugten Felder die Raumzeit beeinflußen.

Die Lagrangedichte des Skalarfeldes ist die allgemeinrelativistische Verallgemeinerung der Lagrangedichte des Klein-Gordon-Feldes. Der erste Term ist der kinetische Term, der zweite der Massenterm, auch Wechselwirkungspotential genannt. Es ist ein wesentlicher Punkt dieses Ansatzes, daß dieses nicht weiter spezifiziert wird.

Die Wirkungsfunktion, welche das Problem bestimmt, lautet also:

$$\mathcal{S}\left[g^{\mu\nu},\phi,A_\mu\right] = \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V\left(\phi\right) - \frac{1}{4}g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa}\right] \quad (3.1)$$

Durch Variation nach den Veränderlichen $g^{\mu\nu}$, ϕ und A_μ erhält man die gesuchten Bewegungsgleichungen:

- Variation nach ϕ

Als erstes soll die Wirkung nach dem Skalarfeld variiert werden. Hierbei wird der nach einer partiellen Integration entstehende Randterm fallengelassen, da er im Unendlichen verschwindet:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[\delta R+\partial_\mu(\delta\phi)\,\partial^\mu\phi+\delta V(\phi)-\frac{1}{4}\delta\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\right]\\ &= \int d^4x\,\left[-\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi\right)+\sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\right]\delta\phi\\ &= \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[-D_\mu\partial^\mu\phi+\frac{\partial V}{\partial\phi}\right]\end{aligned}$$

Somit erhalte ich als Bewegungsgleichung für das Skalarfeld:

$$\begin{aligned}D_\mu\partial^\mu\phi-\partial_\phi V(\phi)&=0\\ \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r\left(\sqrt{-g}g^{rr}\partial_r\phi\right)-\frac{\partial V}{\partial\phi}&=0\end{aligned}\tag{3.2}$$

Wendet man, wie in der letzten Umformung schon getan, die Forderung nach Kugelsymmetrie und Stationarität auf das Skalarfeld an, reduziert sich die Abhängigkeit des Feldes auf die von der Radialkoordinate:

$$\phi(t,r,\vartheta,\varphi)=\phi(r)$$

- Variation nach A_μ

  Bei der Variation der Wirkung nach dem elektromagnetischen Potential A_μ muß berücksichtigt werden, daß $F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}$ gilt. Dann erhält man nach einer Summationsindexvertauschung und partiellen Integration, bei der wieder der Randterm im Unendlichen verschwindet:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int d^4x\,\sqrt{-g}\Big[\delta R+\frac{1}{2}\delta\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)+\delta V(\phi)\\ &\qquad -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa}F_{\mu\nu}\delta\left(F_{\lambda\kappa}\right)\Big]\\ &= \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}F_{\lambda\kappa}\left(\partial_\lambda\delta A_\kappa-\partial_\kappa\delta A_\lambda\right)\right]\\ &= \int d^4x\,-\sqrt{-g}F^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\left(\delta A_\kappa\right)\\ &= \int d^4x\,\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}F^{\lambda\kappa}\right)\delta A_\kappa\end{aligned}$$

  Dies ergibt, nach Indexumbenennung die kovariante Maxwellgleichung:

$$D_\mu F^{\mu\nu}=0\tag{3.3}$$

- Variation nach $g^{\mu\nu}$

  Zur Variation nach dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ werden folgende Zusammenhänge benötigt:

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\\ \delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Die Variation des Ricci-Tensors läßt sich in eine totale Ableitung umschreiben, welche keinen Beitrag zu den Bewegungsgleichungen liefert.

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right)\right)$$

Somit ergibt sich bei der Variation:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S} &= \int d^4x\,\delta\left(\sqrt{-g}\right)[\mathcal{L}] + \sqrt{-g}\left[\delta R + \frac{1}{2}\left(\delta g^{\mu\nu}\right)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right. \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) + \delta V(\phi) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\delta\left(g^{\nu\kappa}\right)F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa}F_{\mu\nu}\delta\left(F_{\lambda\kappa}\right)\right] \\
&= \int d^4x\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}(\mathcal{L})\right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda\right)\right]\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Damit lautet die gekoppelten Einstein-Klein-Gordon-Maxwell-Gleichungen :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda \tag{3.4}$$

Aus dieser Gleichung ist der Energie-Impuls-Tensor der Einsteingleichung (2.4) abzulesen. Er lautet :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda \tag{3.5}$$

Zur Vereinfachung von (3.4) bilden wir deren Spur und erhalten für den Krümmungsskalar R :

$$\begin{aligned}
-R &= -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + 2\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + V\right) + \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda - F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + 2V = T
\end{aligned}$$

Wie erwartet ist der elektromagnetische Anteil des Energie-Impuls-Tensors spurfrei. In (3.4) eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi + 2V\right) &= -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi + V\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)
\end{aligned}$$

bzw. nach Kürzen und Umformen :

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\left(g_{\nu\nu}F_{\mu\lambda}F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) = 0 \tag{3.6}$$

3.2 Vereinfachen der Bewegungsgleichungen

Nach dem die Tensorgleichungen aus der Variation der Wirkung bestimmt wurden, sollen aus ihnen die Differentialgleichungen extrahiert werden, die die einzelnen Komponenten bestimmen.

3.2.1 Die kovariante Maxwellgleichung

Die erhaltene Maxwellgleichung (3.3) lautet:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Wie im Abschnitt 2.5 gesehen, bleiben unter der Forderung nach Kugelsymmetrie und Stationarität als nichtverschwindene Komponenten des Feldstärketensors $F^{rt} = -F^{tr}$ und $F^{\vartheta\varphi} = -F^{\varphi\vartheta}$. Damit folgt für die Maxwellgleichung nach Einsetzen der Definition für die kovariante Ableitung und der Christoffelsymbole, wie sie in Gleichung (2.7) bestimmt wurden:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}$$

Für die t -Komponente lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned} D_\mu F^{\mu t} &= \partial_\mu F^{\mu t} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\lambda t} + \Gamma^t_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \\ &= \partial_r F^{rt} + \left(\Gamma^r_{rr} + \Gamma^t_{tr} + \Gamma^\vartheta_{\vartheta r} + \Gamma^\varphi_{\varphi r}\right) F^{rt} \\ &= \partial_r F^{rt} + 2\frac{R'}{R} F^{rt} = 0 \end{aligned}$$

Für die φ-Komponente lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned} D_\mu F^{\mu\varphi} &= \partial_\mu F^{\mu\varphi} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} F^{\lambda\varphi} + \Gamma^\varphi_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \\ &= \partial_\vartheta F^{\vartheta\varphi} + \left(\Gamma^t_{t\vartheta} + \Gamma^r_{r\vartheta} + \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} + \Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta}\right) F^{\vartheta\varphi} \\ &= \partial_\vartheta F^{\vartheta\varphi} + \cot\vartheta F^{\vartheta\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Somit lauten die Differentialgleichungen, die die Komponenten des Feldstärketensors bestimmen:

$$\begin{aligned} \partial_t F^{tr} &= 0 \\ \partial_\varphi F^{\varphi\vartheta} &= 0 \\ \partial_r F^{rt} &= -2\frac{R'}{R} F^{rt} && (3.7) \\ \partial_\vartheta F^{\vartheta\varphi} &= -\cot(\vartheta) F^{\vartheta\varphi} && (3.8) \end{aligned}$$

3.2.2 Die gekoppelte Einsteingleichung

Die gekoppelte Einsteingleichung (3.6) lautet in Komponenten aufgelöst :

$$\begin{aligned} \mu = \nu = t \quad : \quad & R_{tt} + \frac{1}{2} g_{tt} \left(V - F_{rt} F^{rt} + \frac{1}{4}(2F_{rt}F^{rt} + 2F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}) \right) = 0 \\ & \frac{GG''}{2} + \frac{GG'R'}{R} - \frac{G}{2} \left(V - \frac{1}{2} F_{rt} F^{rt} + \frac{1}{2} F_{\vartheta\varphi} F^{\vartheta\varphi} \right) = 0 \\ & \frac{GG''}{2} + \frac{GG'R'}{R} - \frac{GV}{2} - \frac{GW}{2} = 0 && (3.9) \\ \mu = \nu = r \quad : \quad & R_{rr} + \frac{1}{2}(\partial_r \phi)^2 + \frac{1}{2} g_{rr} \left(V - \frac{1}{2} F_{rt} F^{rt} + \frac{1}{2} F_{\vartheta\varphi} F^{\vartheta\varphi} \right) = 0 \\ & -\frac{G''}{2G} - \frac{G'R'}{GR} - \frac{2R''}{R} + \frac{(\partial_r \phi)^2}{2} + \frac{V}{2G} + \frac{W}{2G} = 0 && (3.10) \\ \mu = \nu = \vartheta \quad : \quad & R_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{2} g_{\vartheta\vartheta} \left(V - F_{\vartheta\varphi} F^{\vartheta\varphi} + \frac{1}{4}(2F_{rt}F^{rt} + 2F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$1 - GRR'' - GR'^2 - G'RR' + \frac{R^2V}{2} - \frac{R^2W}{2} = 0 \qquad (3.11)$$

$$\mu = \nu = \varphi \quad : \quad R_{\varphi\varphi} + \frac{1}{2}g_{\varphi\varphi}\left(V - F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi} + \frac{1}{4}(2F_{rt}F^{rt} + 2F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi})\right) = 0$$

$$\sin^2\vartheta\left(1 - GRR'' - GR'^2 - G'RR' + \frac{R^2V}{2} - \frac{R^2W}{2}\right) = 0$$

$$\sin^2 \cdot (3.11) \qquad (3.12)$$

Hierin wurden die Komponenten des metrischen Tensors und des Ricci-Tensors aus (2.6) bzw. (2.8) eingesetzt. Außerdem wurden die Terme mit den Komponenten des Feldstärketensors durch die Energiedichte W des elektromagnetischen Feldes nach Gleichung (2.10) ersetzt.

Die Gleichungen (3.11) und (3.12) der „Winkel"-Komponenten sind offensichtlich linear abhängig. Die Gleichungen (3.9-3.11) sind jedoch voneinander unabhängig. Um dies deutlich zu machen, werde ich aus diesen Gleichungen möglichst einfache Differentialgleichungen formen:

- $(3.9)/G^2 + (3.10)$ ergibt :

$$\frac{1}{2}(\partial_r\phi)^2 - 2\frac{R''}{R} = 0 \qquad (3.13)$$

- $(3.13)G - 2(3.9)/G - 2(3.11)/R^2$ ergibt :

$$-G'' + \frac{1}{2}G(\partial_r\phi)^2 + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2} + 2W = 0 \qquad (3.14)$$

- $(3.14) - 2(3.9)/G$ ergibt:

$$-V + \frac{1}{2}G(\partial_r\phi)^2 + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2} + 2\frac{G'R'}{R} + W = 0 \qquad (3.15)$$

In den Gleichungen (3.13-3.15) treten die Größen G'', R'' und V nur jeweils einmal auf, d.h. diese Gleichungen sind voneinander unabhängig.

3.2.3 Die Skalarfeldgleichung

Bisher noch nicht verwendet wurde die verallgemeinerte Klein-Gordon-Gleichung (3.3). Nach Ausschreiben der kovarianten Ableitung und Einsetzen der Christoffelsymbole aus Gleichung (2.7) lautet sie:

$$\begin{aligned} 0 &= D_\mu\partial^\mu\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} \\ &= \partial_r(g^{rr}\partial_r\phi) + \Gamma^\lambda_{\lambda r}(g^{rr}\partial_r\phi) - \frac{\partial V}{\partial\phi} \\ &= G\phi'' + \left(G' + 2\frac{GR'}{R}\right)\phi' - \frac{\partial V}{\partial\phi} \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, daß wie erwähnt das Skalarfeld nur von der Radialkoordinate r abhängen soll.

Wirft man einen Blick auf diese Gleichung, sieht man keine Größe, die nicht schon durch eine der vorigen Differentialgleichungen bestimmt werden würde. In der Tat kann man die Gleichungen (3.13-3.15) in folgender Weise zusammenfassen:

$$\left(\frac{2GR'}{R} + G'\right) \cdot (3.13) + 2\frac{R'}{R} \cdot (3.14) + (3.15)'$$

und erhält:

$$G\phi'\phi'' + \left(G' + 2\frac{GR'}{R}\right)\phi'^2 - \frac{\partial V}{\partial\phi}\phi' = -W' - 4\frac{R'}{R}W$$

Somit stellt sich an die Energiedichte folgende Bedingung:

$$W' = -4\frac{R'}{R}W \tag{3.16}$$

Ich werde an Stelle der, dann linear abhängigen Bewegungsgleichung des Skalarfeldes diese einfache Differentialgleichung beibehalten.

3.2.4 Die Bewegungsgleichungen

Das Gesamtsystem der Differentialgleichungen, welche das Problem bestimmen, lautet dann :

$$\begin{aligned}
R'' &= \frac{1}{4}R\left(\partial_r\phi\right)^2 && (3.17)\\
G'' &= \frac{1}{2}G\left(\partial_r\phi\right)^2 + 2\frac{GR'^2-1}{R^2} + 2W && (3.18)\\
V &= \frac{1}{2}G\left(\partial_r\phi\right)^2 + 2\frac{GR'^2-1}{R^2} + 2\frac{G'R'}{R} + W && (3.19)\\
W' &= -4\frac{R'}{R}W && (3.20)\\
\partial_r F^{rt} &= -2\frac{R'}{R}F^{rt} && (3.21)\\
\partial_\vartheta F^{\vartheta\varphi} &= -\cot\left(\vartheta\right)F^{\vartheta\varphi} && (3.22)
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Untersuchen der Bewegungsgleichungen

Bevor ich an die Lösung des Gleichungssytems gehe, soll in diesem Kapitel die Gleichungen untersucht werden. Ich möchte aus den Bewegungsgleichungen und pausiblen physikalischen Forderungen allgemeine Eigenschaften für die durch die Differentialgleichungen bestimmten Größen formulieren.

4.1 Forderungen an die Lösung

4.1.1 $\phi \to -\phi$ -Symmetrie

Oftmals fordert man in der Physik beim Arbeiten mit Skalarfelder die Invarianz der Wirkung unter der Vertauschung:

$$\phi \quad \longrightarrow \quad -\phi$$

Nur die Größe $|\phi|$ soll physikalisch eine Bedeutung haben. Die in dieser Arbeit angesetzte Wirkung ist unter dieser Vertauschung invariant, wenn man an des Selbstwechselwirkungspotential $V(\phi)$ die zusätzliche Forderung

$$V(\phi) = V(-\phi)$$

stellt.

4.1.2 Kosmische Zensur

In der Theorie der Schwarzen Löcher besteht die Annahme einer „kosmischen Zensur“. Sie besagt, daß Raumzeitsingularitäten von dem asymptotischen Randbereich durch mindesten einen Ereignishorizont getrennt werden, so daß sie externen Beobachtern verborgen bleiben. Man nimmt an, daß aus allgemeinen nichtsingulären Anfangsbedingungen die Entwicklung einer Raumzeitsingularität, welche nicht von einem Horizont verhüllt wird, ausgeschlossen ist.

Bei der Untersuchung der Metrikfunktion G sind Lösungen, welche keine Nullstelle aufweisen, als Lösungen für „nackte“Singularitäten aufgrund der „kosmischen Zensur“auszusortieren.

4.1.3 Asymptotische Flachheit

Im asymptotischen Randbereich soll die Metrik gegen die Vakuumlösung gehen, das Linienelement also folgende Form annehmen :

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Daraus folgt für die Metrikfunktionen:

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} & 1 \\ R & \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} & r \end{array}$$

Zur Untersuchung des asymptotischen Verhalten der Energiedichte W wird die Gleichung (3.20) integriert

$$\begin{array}{rcl} (\ln(W))' & = & -4(\ln(R))' \\ W & = & c_W R^{-4} \end{array}$$

Im Limes ergibt sich also für die elektromagnetische Energiedichte

$$W \quad \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

Vergleicht man die Energiedichte mit dem asymptotischen Grenzfall (2.10) so läßt sich die Konstante c_W festlegen. Sie bekommt den Wert $c_W = 2Q^2 = (q_e^2 + q_m^2)/32\pi^2$.

Aus der Bewegungsgleichung (3.17) folgt für das Skalarfeld:

$$\phi \quad \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad \phi_0$$

wobei ϕ_0 eine reelle Konstante ist. Das asymptotische Verhalten des Potentials ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (3.19):

$$V(\phi) \quad \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad V(\phi_0) = 0$$

4.1.4 Newtonscher Grenzfall

Als weitergehende Forderung soll sich die Metrik der Schwarzschildmetrik nähern, damit sich im Limes Newtonsche Gravitationsgesetze ergeben. Das Linienelement der Schwarzschildmetrik lautet

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Mit dieser Forderung lassen sich im Limes $r \to \infty$ die nächsten Ordnungen von ϕ und R näher bestimmen. Ich mache dazu folgende Ansätze :

$$\begin{array}{ccc} \phi & \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} & \phi_0 + c_\phi r^a \\ R & \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} & r + c_R r^b \end{array}$$

, mit der Einschränkung $a < 0$ und $b < 1$.

In die Differentialgleichung

$$R'' = \frac{1}{4}\phi'^2 R$$

eingesetzt, ergibt sich im Limes

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & c_1 r^{b-2} = c_2 r^{2a-1} \\ \Rightarrow & b = 2a + 1 \end{array}$$

Für das spätere Einsetzen in die Differentialgleichungen, die die anderen Funktionen bestimmen, werden die Ausdrücke in den Ableitungen und Quadraten benötigt. Diese ergeben sich zu:

$$
\begin{aligned}
\phi'_\infty &= \frac{b-1}{2} c_\phi r^{\frac{b-3}{2}} \\
(\phi'_\infty)^2 &= c_\phi r^{b-3} \\
R'_\infty &= 1 + b c_R r^{b-1} \\
(R'_\infty)^2 &= \left(1 + c_R r^{b-1}\right)^2 \approx 1 + c_R r^{b-1} \\
R^2_\infty &= \left(r + c_R r^b\right)^2 \approx r^2 + c_R r^{b+1} \\
R^4_\infty &= \left(r^2 + c_R r^{b+1}\right)^2 \approx r^4 + c_R r^{b+3}
\end{aligned}
$$

Hierbei wurden in den Entwicklungstermen der Quadrate die Vorfaktoren gleich umdefiniert, um sie einfach zu halten.

Zum Vergleich mit der Schwarzschildmetrik muß das Fernverhalten von G bestimmt werden. Mit der Differentialgleichung (3.18) wird G bestimmt:

$$
G'' = \frac{1}{2} G \left(\partial_r \phi\right)^2 + 2 \frac{G R'^2 - 1}{R^2} + 2W
$$

Hierin sind zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens die oben erhaltenen Ableitungs- und Quadratterme einzusetzen. Der W-Term wird durch das Ergebnis aus dem vorhergehenden Abschnitt $W = c_W R^4$ ersetzt.

$$
\begin{aligned}
G'' &= \frac{1}{2} G c_\phi r^{b-3} + 2G \frac{c_R r^{b-1}}{r^2 + c_R r^{b+1}} + \frac{2 c_W}{r^4 + c_R r^{b+3}} \\
G'' &= G c'_\phi r^{b-3} + G c'_R \left(r^{-b+3} + c_R r^2\right)^{-1} + c'_W \left(r^4 + c_R r^{b+3}\right)^{-1} \\
G'' &= G c'_\phi r^{b-3} + G c'_R r^{b-3} \left(1 - c_R r^{b-1}\right) + c'_W r^{-4} \left(1 - c_R r^{b-1}\right) \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Im Newtonschen Grenzfall soll die Funktion $G(r)$ die Form wie in der Schwarzschildmetrik annehmen. Die Größen G und G'' lauten in dieser:

$$
\begin{aligned}
G_\infty &= 1 - \frac{2M}{r} \\
G''_\infty &= -\frac{4M}{r^3}
\end{aligned}
$$

Dies wird nun in (4.1) eingesetzt, und dann ausmultipliziert.

$$
\begin{aligned}
-\frac{4M}{r^3} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c'_\phi r^{b-3} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c'_R \left(r^{b-3} - c_R r^{b-4}\right) \\
&\quad + c'_W \left(r^{-4} - c_R r^{b-5}\right) \\
-\frac{4M}{r^3} &= c'_\phi \left(r^{b-3} - 2M r^{b-4}\right) \\
&\quad + c'_R \left(r^{b-3} - c_R r^{b-4} - 2M(r^{b-4} - c_R r^{b-5})\right) \\
&\quad + c'_W \left(r^{-4} - c_R r^{b-5}\right)
\end{aligned}
$$

Die führenden Terme der rechten Seite sind die r^{b-3}-Terme. Es ergibt sich also folgendes Ergebnis:

$$
-\frac{4M}{r^3} = c'_\phi r^{b-3} + c'_R r^{b-3} + \mathcal{O}(r^{<b-3})
$$

Um die Schwarzschildform der Funktion $G(r)$ zu erhalten, muß gelten

$$b \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad a \leq -\frac{1}{2}$$

Als Forderung an das Verhalten des Skalarfeldes folgt somit

$$|\phi(r \to \infty) - \phi_0| \leq c_\phi r^{-\frac{1}{2}}$$

4.1.5 Endliche Energie und endlicher Druck

Die Komponenten des Energie-Impuls-Tensor der Materie sollen endlich sein. Dieser nimmt im hier betrachteten statischen, kugelsymmetrischen Spezialfall folgende Form an:

$$T^\mu_\nu = \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu \left(\frac{1}{2}g^{rr}(\partial_r\phi)^2 + V - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2}\delta^\mu_r\delta^r_\nu g^{rr}(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}g^{\mu\mu}g_{\nu\nu}F_{\lambda\mu}F^{\lambda\nu}$$

Somit lauten die Diagonalkomponenten des Energie-Impuls-Tensor (unter Verwendung der Bezeichnungen: Energiedichte ρ, Radialdruck p_r, Tangentialdrücke p_ϑ und p_φ):

$$\begin{aligned}
-\rho = T^t_t &= \frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{8}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{rt}F^{rt} \\
&= \frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{8}(2F_{rt}F^{rt} + 2F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}) + \frac{1}{2}F_{rt}F^{rt} \\
&= \frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{2}W \\
p_r = T^r_r &= -\frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{8}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{tr}F^{tr} \\
&= -\frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{2}W \\
p_\vartheta = T^\vartheta_\vartheta &= \frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{8}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\varphi\vartheta}F^{\varphi\vartheta} \\
&= \frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}V(\phi) + \frac{1}{2}W \\
p_\varphi = T^\varphi_\varphi &= \frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}V(\phi) - \frac{1}{8}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi} \\
&= \frac{1}{4}G(\partial_r\phi)^2 + \frac{1}{2}V(\phi) + \frac{1}{2}W
\end{aligned}$$

Die Forderung nach endlicher Energie und endlichen Drücken lautet somit mathematisch :

$$\begin{aligned}
\infty &> \left|\int_{r_h}^{\infty} d^3x\, T^\mu_\nu\right| = 4\pi\left|\int_{r_h}^{\infty} dr\, R^2 T^\mu_\nu\right| \\
\infty &> \left|\int_{r_h}^{\infty} dr\, R^2\left(\pm\frac{1}{4}G\phi'^2 + \frac{1}{2}V(\phi) \pm \frac{1}{2}W\right)\right|
\end{aligned}$$

Hierbei wird die Integration am äußersten Horizont begonnen. Der erste Term und der der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes gehen mit beiden Vorzeichen in die Integrationen ein. Sie weisen aber auch verschiedene relative Vorzeichen auf, so daß jeder der Terme für sich endlich sein muß, da keine Aufhebung untereinander möglich ist.

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_h^\infty dr\, R^2 G\phi'^2 \\
\infty &> \int_h^\infty dr\, \frac{1}{2}R^2 W = \int_h^\infty dr\, R^2\frac{Q^2}{R^4} = \int_h^\infty dr\, \frac{Q^2}{R^2}
\end{aligned}$$

Wie man sieht, erfüllt die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes die Forderung. Damit sie auch für das erste Integral erfüllt ist, erhält man als Forderung an das Verhalten des Integranden im Unendlichen $\lim_{r\to\infty}(r^3\phi'^2) = 0$ und somit:

$$|\phi(r \to \infty) - \phi_0| < c_\phi r^{-\frac{1}{2}}$$

Es ergibt sich also an das Skalarfeld eine strengere Bedingung als für den Newtonschen Grenzfall.

4.2 No-Hair-Theorem

Bei der Untersuchung von Schwarzen Löchern hat sich herausgestellt, daß diese vollständig durch ihre Masse, Ladung und Drehimpuls bestimmt sind. Keine anderen physikalischen Größen, die sich mit in der Singularität befinden, lassen sich im Außenbereich nachweisen. Diese Feststellung wird durch eine Reihe von No-Hair-Theoremen gestützt, die für die unterschiedlichsten angekoppelten Materiefelder entwickelt wurden.

4.2.1 Ein No-Hair-Theorem

Es soll hier aus der Vielzahl der „No-Scalar-Hair"-Theoremen (siehe z.B. [11], [12]) eines herausgegriffen werden ([10]). Es geht von der Bewegungsgleichung (3.3) des Skalarfeldes aus:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}\sqrt{-g}}\partial_r\left(\sqrt{-g}g^{rr}\partial_r\phi\right) - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

Multipliziert man diese mit $\sqrt{-g}\phi$ und integriert vom äußersten Horizont bis nach Unendlich erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{r_h}^{\infty} dr\,\phi\partial_r\left(\sqrt{-g}g^{rr}\partial_r\phi\right) &= \int_{r_h}^{\infty} dr\,\phi\frac{\partial V}{\partial\phi} \\ \left(\phi g^{rr}\sqrt{-g}\partial_r\phi\right)\Big|_{r_h}^{\infty} - \int_{r_h}^{\infty} dr\,\sqrt{-g}g^{rr}(\partial_r\phi)^2 &= \int_{r_h}^{\infty} dr\,\sqrt{-g}\phi\frac{\partial V}{\partial\phi} \end{aligned}$$

Der äußerste Horizont ist die größte Nullstelle von g^{rr}, so daß im Integrationsbereich $g^{rr} \geq 0$ ist. Den durch die partielle Integration entstandenen Randterm kann man unter bestimmten Bedingungen fallen lassen. Ist ϕ am Horizont regulär, so verschwindet durch die Nullstelle von g^{rr} an dieser Stelle der Randterm an dieser unteren Grenze. Damit er auch an der oberen Grenze verschwindet, muß vom asymptotischen Verhalten des Skalarfeldes gefordert werden:

$$|\phi(r \to \infty) - \phi_0| < c_\phi r^{-\frac{1}{2}}$$

Eine Forderung, die uns aus dem vorhergehendenen Abschnitt schon bekannt ist. Sind alle Bedingungen erfüllt, kann man den Randterm fallen lassen.

Der übrigbleibende Integrand auf der linken Seite ist wegen $g^{rr} > 0$ für alle $r > r_h$ positiv. Unter der Voraussetzung, daß das Potential nur ein Minimum hat, ist aber auch das Integral auf der rechten Seite positiv. Da die Integranden der rechten und linken Seite jedoch mit einem relativen Vorzeichen auftreten, müssen beide identisch Null sein. Dies ist aber nur der Fall für:

$$\partial_r\phi = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \phi = const.$$

Damit folgt auch für das Potential $V = 0$, da keine Hintergrundkrümmung vorliegen soll.

Die in den späteren Abschnitten vorgestellten Lösungen umgehen dieses No-Hair-Theorem, indem sie die an das Potential gestellte Forderung verletzen. Für sie treffen jedoch andere hier nicht angegebene Theoreme zu ([11],[12]).

Oftmals werden diese No-Hair-Theoreme aus allgemeinen und pausiblen Forderungen an den Energie-Impuls-Tensor abgeleitet. Es haben sich drei Energiebedingungen etabliert, die im Folgenden auf das vorliegende Problem angewandt werden sollen.

4.2.2 Schwache-Energie-Bedingung

Die Schwache-Energie-Bedingung fordert, daß in keinem Bezugssystem die Energiedichte der Materie negativ wird. Für die Messung eines Beobachters mit der Vierergeschwindigkeit u^μ

$$u_\mu u^\mu = -1$$

soll also gelten:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu &\geq 0 \\ \rho = -T_\mu^\nu &\geq 0 \end{aligned}$$

Für ein Bezugssystem in dem der Energie-Impuls-Tensor diagonal ist, bedeutet dies:

$$\begin{array}{rcll} T_0^0 & \leq & 0 & \\ & \text{und} & & \\ T_0^0 - T_a^a & \leq & 0 & \quad a = 1,2,3 \end{array}$$

wobei in der letzten Gleichung der Index a immer nur eine Komponente bezeichnet, d.h. die Summenkonvention nicht befolgt wird. Werden beide Bedingungen erfüllt, so kann in keinem Bezugssystem die Energiedichte negativ werden. Für den Energie-Impuls-Tensor im hier betrachteten Fall folgt aus der ersten Bedingung:

$$V(\phi) \leq W - \frac{1}{2} G \phi'^2$$

Aus der zweiten Bedingung folgen jeweils:

$$\begin{array}{rcl} a = r & : & \frac{1}{2} G \phi'^2 \leq 0 \\ a = \vartheta & : & W \geq 0 \\ a = \varphi & : & W \geq 0 \end{array}$$

4.2.3 Starke-Energie-Bedingung

Eine strengere Bedingung an den Energie-Impuls-Tensor fordert, daß für einen beliebigen Beobachter mit Vierergeschwindigkeit u^μ gelten muß

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu &\geq \frac{1}{2} u^\mu u_\mu T = -\frac{1}{2} T \\ -T_\mu^\nu &\geq -\frac{1}{2} T \end{aligned}$$

Dies ist die sogenannte Starke-Energie-Bedingung. In eine Bezugsystem in dem der Energie-Impuls-Tensor diagonal ist, bedeutet das für dessen Komponenten

$$\begin{array}{rcll} T_0^0 & \leq & \frac{1}{2} T & \\ T_0^0 - T_a^a & \leq & 0 & \quad a = 1,2,3 \end{array}$$

Die zweite Forderung, in der wieder die Summenkonvention aufgehoben wird, stellt keine neue Bedingung dar, aber aus der ersten folgt in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}G\phi'^2 + \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}W &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}G\phi'^2 + 2V\right) \\ V &\geq -W \end{aligned}$$

Zusammen mit der Ergebnis aus der Schwachen-Energie-Bedingung muß also vom Wechselwirkungspotential gefordert werden:

$$-W \leq V \leq W - \frac{1}{2}G\phi'^2$$

4.2.4 Dominante-Energie-Bedingung

Eine weitere Bedingung an den Energie-Impuls-Tensor erhält man aus der Forderung, daß die Materie sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen und die Kausalität verletzen darf. Dies bedeutet, die $(0,0)$-Komponente des Tensors muß die anderen Diagonalkomponenten betragsmäßig übertreffen.

$$|T_0^0| \geq |T_a^a| \qquad a = 1, 2, 3$$

Für den speziellen Fall hier heißt das:

$$\begin{aligned} a = r \quad &: \qquad |\frac{1}{4}G\phi'^2 + \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}W| \geq |-\frac{1}{4}G\phi'^2 + \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}W| \\ a = \vartheta = \varphi \quad &: \qquad |\frac{1}{4}G\phi'^2 + \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}W| \geq |\frac{1}{4}G\phi'^2 + \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}W| \end{aligned}$$

Aus der Schwachen-Energie-Bedingung folgte:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}G\phi'^2 &\geq 0 \\ W &\geq 0 \end{aligned}$$

Beides in die obigen Betragsungleichungen eingesetzt, läßt für das Potential nur ein Vorzeichen zu:

$$V(\phi) \leq 0$$

Der zulässige Bereich für das Wechselwirkungspotential, um allen Bedingungen zu genügen, lautet also:

$$-W \leq V(\phi) \leq 0$$

Kapitel 5

Lösen der Bewegungsgleichungen

Nach der Untersuchung des Gleichungssystems soll es in diesem Kapitel gelöst werden. Dies wird auf verschiedenen Wegen geschehen, bei denen das Problem teilweise vereinfacht wird.

Dabei wurden für Teile der Rechnungen und für die graphische Ausgabe das Computeralgebraprogramm Maple [14] verwendet.

Die gezeichneten Funktionsverläufe werden jeweils am Ende einer Lösung präsentiert.

5.1 Integration der Gleichungen

Ich möchte das volle Gleichungssystem (3.17-3.22) integrieren. Als erstes werden die Bewegungsgleichung gelöst, die das elektromagnetische Feld bestimmen. Aus Gleichung (3.21) folgt:

$$\frac{(F^{rt})'}{F^{rt}} = -2\frac{R'}{R} \qquad \longrightarrow \qquad \left(\ln F^{rt}\right)' = -2\left(\ln R\right)'$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$F^{rt} = C_{rt}R^{-2}$$

Durch Vergleich mit dem asymptotischen Grenzfall bestimmt man die Konstante C_{rt}.

$$F^{rt} = \frac{q_e}{4\pi R^2} \tag{5.1}$$

Genauso folgt aus (3.22):

$$\frac{\left(\partial_\vartheta F^{\vartheta\varphi}\right)}{F^{\vartheta\varphi}} = -\cot\vartheta \longrightarrow \partial_\vartheta\left(\ln F^{rt}\right) = -\cot\vartheta$$

Die Lösung hiervon lautet:

$$F^{\vartheta\varphi} = -\frac{f(r)}{\sin\vartheta}$$

Zur Bestimmung der unbekannten Funktion $f(r)$ wird Gleichung (3.20) verwendet:

$$W' \quad = \quad -4\frac{R'}{R}W$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left(F_{rt}F^{rt}-F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}\right)' &= 2\frac{R'}{R}\left(F_{rt}F^{rt}-F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}\right) \\
-F_{rt}\left(F^{rt}\right)'+\frac{1}{2}F_{\vartheta\varphi}\left(F^{\vartheta\varphi}\right)'+\frac{1}{2}\left(F^{\vartheta\varphi}\right)\left(F_{\vartheta\varphi}\right)' &= 2\frac{R'}{R}\left(F_{rt}F^{rt}-F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung der Gleichung (3.21), nach Indexverschiebungen und Einsetzen der Metrikkomponenten aus (2.6) vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}F_{\vartheta\varphi}\left(F^{\vartheta\varphi}\right)'+\frac{1}{2}\left(g^{\vartheta\vartheta}g^{\varphi\varphi}F_{\vartheta\varphi}\right)\left(g_{\vartheta\vartheta}g_{\varphi\varphi}F^{\vartheta\varphi}\right)' &= -2\frac{R'}{R}F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi} \\
\frac{1}{2}F_{\vartheta\varphi}\left(F^{\vartheta\varphi}\right)'+\frac{1}{2}\left(\frac{F_{\vartheta\varphi}}{R^4\sin^2\vartheta}\right)\left(R^4\sin^2\vartheta F^{\vartheta\varphi}\right)' &= -2\frac{R'}{R}F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi} \\
F_{\vartheta\varphi}\left(F^{\vartheta\varphi}\right)'+2\frac{R'}{R}F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi} &= -2\frac{R'}{R}F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich als weitere bestimmende Differentialgleichung für $F^{\vartheta\varphi}$:

$$
\frac{\left(F^{\vartheta\varphi}\right)'}{F^{\vartheta\varphi}} = -4\frac{R'}{R} \quad \longrightarrow \quad \left(\ln F^{\vartheta\varphi}\right)' = -4\left(\ln R\right)'
$$

Die Lösung hierfür lautet:

$$
F^{\vartheta\varphi} = f\left(\vartheta\right)R^{-4}
$$

Beide Ergebnisse bestimmen $F^{\vartheta\varphi}$ bis auf eine Konstante vollständig:

$$
F^{\vartheta\varphi} = C_{\vartheta\varphi}R^{-4}\sin^{-1}\vartheta
$$

Die Konstante ist wieder durch den Vergleich mit dem asymptotischen Grenzfall abzulesen.

$$
F^{\vartheta\varphi} = \frac{q_m}{4\pi R^4\sin\vartheta} \tag{5.2}
$$

Für die Energiedichte W ergibt sich folgender bekannter Ausdruck

$$
\begin{aligned}
W &= -\frac{1}{2}(F_{rt}F^{rt}-F_{\vartheta\varphi}F^{\vartheta\varphi}) = \frac{1}{2}\left(\frac{q_e^2}{16\pi^2R^4}+\frac{q_m^2}{16\pi^2R^4}\right) \\
&= 2\frac{Q^2}{R^4}
\end{aligned}
$$

, worin wieder die Konstante $Q^2 = (q_e^2+q_m^2)/(8\pi)^2$ verwendet wird.

Nun sollen die Bewegungsgleichungen integriert werden, welche das Skalarfeld und die Metrikfunktionen bestimmen. Die Differentialgleichung (3.17), die das Skalarfeld bestimmt, lautet:

$$
\left(\partial_r\phi\right)^2 = 4\frac{R''}{R}
$$

Sie ergibt als allgemeine Lösung:

$$
\phi = 2\int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\sqrt{\frac{R''(\tilde{r})}{R(\tilde{r})}} \tag{5.3}
$$

Hierbei ist r_0 eine beliebige Integrationsgrenze, die durch Anpassung an die Randbedingungen festgelegt wird.

Zum Erhalt einer integrierbaren Gleichung für G bilde ich aus $R^2\cdot(3.18) - GR^2\cdot(3.17)$:

$$
\begin{aligned}
R^2G''-2GRR''-2GR'^2 &= -2+2R^2W \\
\left(R^2G'-2GRR'\right)' &= -2+2R^2W
\end{aligned}
$$

Einmal integriert und nach G' aufgelöst, erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung für G.

$$\begin{aligned}
R^2G' - 2GRR' &= -2r + C_M + 2\int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\, R^2 W \\
G' &= 2G\frac{R'}{R} - \frac{2r - C_M}{R^2} + \frac{2}{R^2}\int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\, R^2 W
\end{aligned}$$

Wie üblich muß zuerst eine Lösung der homogenen DGL gefunden werden:

$$\begin{aligned}
G_h' &= 2G_h\frac{R'}{R} \\
\frac{G_h'}{G_h} &= 2\frac{R'}{R} \\
G_h &= C_h R^2
\end{aligned}$$

Die inhomogene DGL ist nun durch Variation der Konstanten integrierbar. Hierzu setze ich $G = G_i G_h$.

$$\begin{aligned}
G_i' &= -\frac{2r - C_M}{G_h R^2} + \frac{2}{G_h R^2}\int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\, R^2 W \\
&= -\frac{2r - C_M}{C_h R^4} + \frac{2}{C_h R^4}\int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\, R^2 W \\
G_i &= -\frac{1}{C_h}\int_{r_1}^{r} d\tilde{r}\,\frac{2\tilde{r} - C_M}{R^4} + \frac{2}{C_h}\int_{r_1}^{r} d\tilde{r}\,\frac{1}{R^4}\int_{r_0}^{\tilde{r}} d\tilde{\tilde{r}}\, R^2 W
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für $G = G_i G_h$ lautet somit:

$$G = -R^2\int_{r_1}^{r} d\tilde{r}\,\frac{2\tilde{r} - C_M}{R(\tilde{r})^4} + 2R^2\int_{r_1}^{r} d\tilde{r}\,\frac{1}{R(\tilde{r})^4}\int_{r_0}^{\tilde{r}} d\tilde{\tilde{r}}\, R(\tilde{\tilde{r}})^2 W(\tilde{\tilde{r}})$$

Die Lösung für G läßt sich vereinfachen, da noch die Forderung nach asymptotischer Flachheit besteht:

$$\begin{aligned}
G &\stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} -r^2\int_{r_1}^{r} d\tilde{r}\,\left(2\tilde{r}^{-3} - C_M\tilde{r}^{-4}\right) + 4Q^2r^2\int_{r_1}^{r} d\tilde{r}\,\tilde{r}^{-4}\int_{r_0}^{\tilde{r}} d\tilde{\tilde{r}}\,\tilde{\tilde{r}}^2\tilde{\tilde{r}}^{-4} \\
&= -\frac{r^2}{{r_1}^2} + \frac{C_M r^2}{3{r_1}^3} + \frac{4Q^2r^2}{3r_0{r_1}^3} - \frac{Q^2r^2}{{r_1}^4} + 1 - \frac{C_M}{3r} - \frac{4Q^2}{3rr_0} + \frac{Q^2}{r^2}
\end{aligned}$$

Daraus läßt durch Vergleich mit der Reissner-Nordström-Lösung

$$G \quad \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

die zur Anpassung notwendigen Werte der Integrationsgrenzen ablesen. Man erhält als notwendige Werte der Konstanten

$$\begin{aligned}
r_0 &= \infty \\
r_1 &= \infty \\
C_M &= 6M
\end{aligned}$$

Für G ergibt sich also als Lösung:

$$\begin{aligned}
G &= R^2\int_{r}^{\infty} d\tilde{r}\,\frac{2\tilde{r} - 6M}{R^4} + 2R^2\int_{r}^{\infty} d\tilde{r}\,\frac{1}{R^4}\int_{\tilde{r}}^{\infty} d\tilde{\tilde{r}}\, R^2 W \qquad (5.4) \\
&= R^2\int_{r}^{\infty} d\tilde{r}\,\frac{2\tilde{r} - 6M}{R^4} + 4Q^2R^2\int_{r}^{\infty} d\tilde{r}\,\frac{1}{R^4}\int_{\tilde{r}}^{\infty} d\tilde{\tilde{r}}\, R^{-2}
\end{aligned}$$

Die verbleibende Differentialgleichung (3.19) lautet nach Einsetzen der erhaltenen Lösungen :

$$\begin{aligned}
V &= \frac{G}{2}\left(\partial_r\phi\right)^2 + 2G\frac{R'^2}{R^2} - \frac{2}{R^2} + 2G'\frac{R'}{R} + W \\
&= 2\left(\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2}\right)G - \frac{2}{R^2} + W \\
&\quad +2\frac{R'}{R}\left(2RR'\frac{G}{R^2} + R^2\left(-\frac{2r - C_M}{R^4} - \frac{2}{R^4}\int_r^\infty d\tilde{r}\, R^2 W\right)\right) \\
&= \left(6\frac{R'^2}{R^2} + 2\frac{R''}{R}\right)G - \frac{2}{R^2} + W - 2\frac{R'}{R^3}\left(2r - C_M + 2\int_r^\infty d\tilde{r}\, R^2 W\right) \\
V &= \frac{1}{2}G\frac{\left(R^4\right)''}{R^4} - \frac{2}{R^2} + W + \left(\frac{1}{R^2}\right)'\left(2r - C_M + 2\int_r^\infty d\tilde{r}\, R^2 W\right) \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Wie man sieht, ist eine allgemeine Lösung des Gleichungssystems nur unter Verwendung von Integralgleichungen möglich.

5.2 Lösung ohne Skalarfeld

Um Lösungen der Bewegungsgleichungen in geschlossener, analytischer Form zu erhalten, ist es nötig weitere spezielle Annahmen zu machen.

Begonnen werden soll diese Untersuchung von Spezialfällen mit einer Lösung ohne Skalarfeld. Hierzu lauten die einschränkenden Annahmen $V = 0$ und $\phi = const$. Die vereinfachten Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned}
R'' &= 0 &(5.6)\\
G'' &= 2G\frac{R'^2}{R^2} - \frac{2}{R^2} + 2W &(5.7)\\
0 &= 2G\frac{R'^2}{R^2} - \frac{2}{R^2} + 2\frac{G'R'}{R} + W &(5.8)\\
W' &= -4\frac{R'}{R}W &(5.9)\\
\left(F^{rt}\right)' &= -2\frac{R'}{R}F^{rt} &(5.10)\\
\partial_\vartheta\left(F^{\vartheta\varphi}\right) &= -\cot(\vartheta)\, F^{\vartheta\varphi} &(5.11)
\end{aligned}$$

Gleichung (5.6) kann sofort integriert werden. Die Lösung lautet :

$$R = C_{R1}\left(r - C_{R2}\right)$$

Die physikalischen Randbedingungen, wie das asymptotische Einmünden in den flachen Raum, fordern für die beiden Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned}
R(r\to\infty) &\overset{!}{=} r \qquad \longrightarrow \qquad C_{R1} = 1\\
R(r=0) &\overset{!}{=} 0 \qquad \longrightarrow \qquad C_{R2} = 0\\
\Longrightarrow \quad R &= r
\end{aligned}$$

Damit bestimmen sich (5.9 – 5.11) zu :

$$\begin{aligned}
F^{rt} &= \frac{q_e}{4\pi r^2} &(5.12)\\
F^{\vartheta\varphi} &= \frac{q_m}{4\pi r^4 \sin\vartheta} &(5.13)\\
W &= \frac{2Q^2}{r^4} &(5.14)
\end{aligned}$$

Eine Differentialgleichung zur Bestimmung von G erhält man aus (5.7) $-\,2\cdot$ (5.8) nach Einsetzen des Ergebnisses $R = r$.

$$G'' + 4\frac{G'}{r} + 2\frac{G}{r^2} - \frac{2}{r^2} = 0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet :

$$G = 1 + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} \tag{5.15}$$

Die Konstante C_2 wird durch Einsetzen von (5.15) in (5.8) bestimmt, und erhält den Wert $C_2 = Q^2$. Durch Vergleich mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz bekommt die Konstante C_1 als Massenterm den Wert $C_1 = -2M$.

Damit lauten die angepassten Lösungen :

$$\begin{aligned} R &= r && (5.16)\\ G &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} && (5.17)\\ W &= \frac{2Q^2}{r^4} = \frac{q_e^2 + q_m^2}{32\pi^2 r^4} && (5.18) \end{aligned}$$

Dies ist genau die im Abschnitt 2.6 vorgestellte Reissner-Nordström-Lösung.

5.3 Lösung mit freiem Skalarfeld

In diesem Abschnitt möchte ich die Vereinfachung etwas zurücknehmen, und ein nichttriviales, jedoch masseloses Skalarfeld, d.h. mit verschwindenem Selbstwechselwirkungspotential, betrachten.

Das System der Bewegungsgleichungen lautet unter diesen Annahmen :

$$\begin{aligned} (\phi')^2 &= 4\frac{R''}{R} && (5.19)\\ G'' &= \frac{1}{2}G\phi'^2 + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2} + 2W && (5.20)\\ 0 &= \frac{1}{2}G\phi'^2 + 2\frac{GR'^2 - 1}{R^2} + 2G\frac{R'}{R} + W && (5.21)\\ W &= C_W R^{-4} && (5.22)\\ \left(F^{rt}\right)' &= -2\frac{R'}{R}F^{rt} && (5.23)\\ \partial_\vartheta\left(F^{\vartheta\varphi}\right) &= -\cot(\vartheta)\,F^{\vartheta\varphi} && (5.24) \end{aligned}$$

Ich ziehen (5.21) von (5.20) ab und erhalten nach Multiplikation mit R^2 :

$$G''R^2 + 2GRR' = \left(G'R^2\right)' = WR^2 \tag{5.25}$$

Diese Gleichung ergibt nach einmaliger Integration

$$G'R^2 = C_M + 2Q^2\int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\,R^{-2} \tag{5.26}$$

Eine weitere Gleichung erhält man durch Ersetzung von ϕ' in (5.21) mittels (5.19) und anschließender Multiplikation mit R^2.

$$\begin{aligned} 0 &= 2GRR'' + 2GR'^2 - 2 + 2G'RR' + WR^2 \\ 2\left(GRR'\right)' &= 2 - WR^2 && (5.27) \end{aligned}$$

Aus der Addition der so erhaltenen Gleichungen (5.25) und (5.27) folgt die integrierbare Gleichung:

$$2\left(GRR'\right)' + \left(G'R^2\right)' = \left(GR^2\right)'' = 2 \tag{5.28}$$

Die Lösung ist ein quadratisches Polynom, welches ich in folgender Form ansetze:

$$GR^2 = (r - r_1)(r - r_2) \tag{5.29}$$

Nun kann man R aus den Gleichungen eliminieren. Dies geschieht durch Division von (5.26) mit (5.29), und ergibt als Gleichung nur noch für G:

$$\frac{G'}{G} = \frac{C_M}{(r-r_1)(r-r_2)} + \frac{2Q^2}{(r-r_1)(r-r_2)} \int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\, \frac{G(\tilde{r})}{(\tilde{r}-r_1)(\tilde{r}-r_2)}$$

Einmal integriert erhält man nach Multiplikation mit G:

$$G + C_G = Q^2 \left(\int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\, \frac{G(\tilde{r})}{(\tilde{r}-r_1)(\tilde{r}-r_2)} \right)^2 + C_M \int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\, \frac{G(\tilde{r})}{(\tilde{r}-r_1)(\tilde{r}-r_2)}$$

Die Lösung dieser im Integral quadratischen Gleichung lautet:

$$\int_{r_0}^{r} d\tilde{r}\, \frac{G(\tilde{r})}{(\tilde{r}-r_1)(\tilde{r}-r_2)} = -\frac{C_M}{2Q^2} \pm \sqrt{\frac{C_M^2}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2}(G(r) + C_G)}$$

Nach Differentiation erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\frac{G(r)}{(r-r_1)(r-r_2)} = \pm \frac{G'(r)}{\sqrt{C_M^2 + 4Q^2(G(r) + C_G)}}$$

Diese Gleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\frac{dr}{(r-r_1)(r-r_2)} = \pm \frac{dG}{G\sqrt{C_M^2 + 4Q^2(G + C_G)}}$$

Nach Integration lautet die Lösung:

$$\frac{\sqrt{C_M^2 + 4Q^2C_G}}{r_1 - r_2} \ln\left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right) = \ln\left(\frac{\pm\sqrt{1 + \frac{4Q^2G(r)}{C_M^2 + 4Q^2C_G}} - 1}{\pm\sqrt{1 + \frac{4Q^2G(r)}{C_M^2 + 4Q^2C_G}} + 1} \right) - \ln(const)$$

Auflösen nach $G(r)$ ergibt:

$$G(r) = \frac{K}{4Q^2} \left(\frac{\left(1 + const\left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right)^{\frac{\sqrt{K}}{r_1-r_2}}\right)^2}{\left(1 - const\left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right)^{\frac{\sqrt{K}}{r_1-r_2}}\right)^2} - 1 \right) \tag{5.30}$$

Worin die vorübergehende Abkürzung $K = {C_M}^2 + 4Q^2C_G$ eingeführt wurde.

Die Integrationskonstante *const* wird durch die Forderung nach asymptotischen Erreichen der flachen Metrik bestimmt:

$$G(r \to \infty) \quad \longrightarrow \quad \frac{K}{4Q^2}\left(\frac{(1 + const)^2}{(1 - const)^2} - 1 \right) \stackrel{!}{=} 1$$

Nach der Integrationskonstanten aufgelöst ergibt sich:

$$const \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{1+\frac{4Q^2}{K}}-1}{\sqrt{1+\frac{4Q^2}{K}}+1}$$

Eingesetzt in (5.30) lautet die Lösung für $G(r)$ nun:

$$G(r) = \frac{K}{4Q^2}\left(\frac{\left(1+\frac{\sqrt{1+\frac{4Q^2}{K}}-1}{\sqrt{1+\frac{4Q^2}{K}}+1}\left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right)^{\frac{\sqrt{K}}{r_1-r_2}}\right)^2}{\left(1-\frac{\sqrt{1+\frac{4Q^2}{K}}-1}{\sqrt{1+\frac{4Q^2}{K}}+1}\left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right)^{\frac{\sqrt{K}}{r_1-r_2}}\right)^2}-1\right)$$

bzw. nach vereinfachendenen Umformungen in eine übersichtlichere Form:

$$\begin{aligned} G(r) &= 4\left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right)^{\frac{\sqrt{K}}{r_1-r_2}} \\ &\left(\sqrt{1+\frac{4Q^2}{K}}+1-\left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right)^{\frac{\sqrt{K}}{r_1-r_2}}\left(\sqrt{1+\frac{4Q^2}{K}}-1\right)\right)^{-2} \end{aligned}$$

Zur weiteren Konstantenbestimmung wird der Vergleich mit der Schwarzschildlösung herangezogen. Hierzu wird durch Reihenentwicklung von $G(r)$ die physikalische Masse bestimmt, die ein entfernter Beobachter messen würde. Der interessierende Term der Reihenentwicklung lautet

$$-\frac{\sqrt{4Q^2+K}}{r} = -\frac{\sqrt{4Q^2+C_M^2+4Q^2C_G}}{r} \stackrel{!}{=} -\frac{2M}{r}$$

Die Konstante C_M muß also ersetzt werden durch:

$$\begin{aligned} C_M^2 &= 4M^2-4Q^2C_G-4Q^2 \\ \rightarrow \quad K &= 4M^2-4Q^2 \end{aligned}$$

Die Konstante Q^2 wird ja allein aus den Ladungen bestimmt. Nach Ersetzung der Konstanten C_M fällt auch die restliche Konstante C_G weg, und das Ergebnis für $G(r)$ lautet:

$$\begin{aligned} G(r) &= 4\left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right)^{2\frac{\sqrt{M^2-Q^2}}{r_1-r_2}} \\ &\left(\frac{M}{\sqrt{M^2-Q^2}}+1-\left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right)^{2\frac{\sqrt{M^2-Q^2}}{r_1-r_2}}\left(\frac{M}{\sqrt{M^2-Q^2}}-1\right)\right)^{-2} \end{aligned} \tag{5.31}$$

Dies ist eine in r_1 und r_2 zweiparametrige Lösung für die Metrikfunktion $G(r)$. Sie ist die Verallgemeinerung der Buchdahllösung auf den Fall eines geladenen Schwarzen Loches, an dem ein freies Skalarfeld gekoppelt ist. Der Übergang in die Buchdahllösung ist in (5.31) für $Q=0$ zu erkennen:

$$G(r, Q=0) = \left(\frac{r-r_1}{r-r_2}\right)^{\frac{2M}{r_1-r_2}}$$

Nach der Koordinatenverschiebung $r \to r + r_2$ und Zusammenfassen der Parameter zu $\rho = r_1 - r_2$ erhält man die Buchdahllösung:

$$G_{Bu}(r) = \left(\frac{r-\rho}{r}\right)^{\frac{2M}{\rho}} \tag{5.32}$$

Die Freiheit der beim Übergang in die Buchdahllösung durchgeführten Nullpunktsverschiebung besteht noch in der allgemeinen Form (5.31), und wird dort so durchgeführt, daß die physikalische Singularität im Koordinatenursprung liegt. Der Ort der Singularität, d.h. der Punkt an dem $g_{tt} = G(r) = \infty$ und $g_{rr} = 1/G(r) = 0$ werden, bestimmt sich in Gleichung (5.31) zu:

$$r_0 = \frac{r_1}{1 - \left(\frac{M+\sqrt{M^2-Q^2}}{M-\sqrt{M^2-Q^2}}\right)^{\frac{r_1-r_2}{2\sqrt{M^2-Q^2}}}} + \frac{r_2}{1 - \left(\frac{M-\sqrt{M^2-Q^2}}{M+\sqrt{M^2-Q^2}}\right)^{\frac{r_1-r_2}{2\sqrt{M^2-Q^2}}}}$$

Am wünschenswertesten ist es, die Singularität in den Ursprung zu legen, indem man $r_0 = 0$ setzt und daraus eine Beziehung zwischen r_1 und r_2 erhält. Leider ist diese Abhängigkeit nicht explizit zu bestimmen. Ich werde deswegen r_0 als Korrekturparameter beibehalten, und die Überbestimmtheit des Problems ausnutzen, um einen der Parameter r_1 bzw. r_2 fest zu wählen. Ich tue dies, indem ich $r_2 = 0$ setze. Daraus ergibt sich für r_0

$$r_0 = \frac{r_1\left(M - \sqrt{M^2-Q^2}\right)^{\frac{r_1}{2\sqrt{M^2-Q^2}}}}{\left(M - \sqrt{M^2-Q^2}\right)^{\frac{r_1}{2\sqrt{M^2-Q^2}}} - \left(M + \sqrt{M^2-Q^2}\right)^{\frac{r_1}{2\sqrt{M^2-Q^2}}}} \tag{5.33}$$

Weiterhin erhält man dann für $G(r)$

$$\begin{aligned} G(r) \quad = \quad & 4\left(\left(\frac{M}{\sqrt{M^2-Q^2}} + 1\right)\left(\frac{r+r_0}{r+r_0-r_1}\right)^{\frac{\sqrt{M^2-Q^2}}{r_1}}\right. \\ & \left. - \left(\frac{M}{\sqrt{M^2-Q^2}} - 1\right)\left(\frac{r+r_0-r_1}{r+r_0}\right)^{\frac{\sqrt{M^2-Q^2}}{r_1}}\right)^{-2} \end{aligned} \tag{5.34}$$

Hierin sind nur M, Q und r_1 echte Parameter. Die Nullstellen von $G(r)$ und damit die Horizonte des Schwarzen Loches liegen bei $r_1 - r_0$ und $-r_0$. Der Parameter r_1 gibt somit den Abstand an, den die beiden Horizonte des Schwarzen Loches haben. Er kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen, was nur die Rollen der beiden Nullstellen als innerer oder äußerer Horizont vertauscht, aber die Funktion G nicht ändert.

Wird r_1 zum Wert der Nullstellendifferenz der Reissner-Nordström-Lösung gewählt, sollte sich diese ergeben. Aus dem Abschnitt 2.6 ist bekannt, daß die Nullstellen der Reissner-Nordström-Lösung bei

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - M_{ext}^2} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

liegen. Nimmt man für den Parameter r_1 den Abstand der Horizonte

$$r_1 \stackrel{!}{=} r_+ - r_- = 2\sqrt{M^2 - Q^2} \tag{5.35}$$

so erhält man für r_0

$$r_0 = -(M - \sqrt{M^2 - Q^2}) \tag{5.36}$$

wie erwartet den Wert der inneren Nullstelle der Reissner-Nordström-Lösung. Um den Übergang nach Einsetzen dieser Werte für r_0 und r_1 besser zu sehen, wird (5.34) noch einmal umgeformt:

$$\begin{aligned} G(r) &= 4((r+r_0-r_1)(r+r_0))^{\frac{2\sqrt{M^2-Q^2}}{r_1}} \left(\left(\frac{M}{\sqrt{M^2-Q^2}} + 1 \right) (r+r_0)^{\frac{2\sqrt{M^2-Q^2}}{r_1}} \right. \\ & \left. - \left(\frac{M}{\sqrt{M^2-Q^2}} - 1 \right) (r+r_0-r_1)^{2\frac{\sqrt{M^2-Q^2}}{r_1}} \right)^{-2} \end{aligned}$$

Setzt man hier jetzt (5.35) und (5.36) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} G(r) &= 4((r+r_0-r_1)(r+r_0)) \cdot \\ & \left(\left(\frac{M}{\sqrt{\cdots}} + 1 \right) (r+r_0) - \left(\frac{M}{\sqrt{\cdots}} - 1 \right) (r+r_0-r_1) \right)^{-2} \\ &= 4((r+r_0-r_1)(r+r_0)) \left(2r + 2r_0 + \frac{M}{\sqrt{\cdots}} r_1 - r_1 \right)^{-2} \\ &= 4((r+r_0-r_1)(r+r_0)) \left(2r + 2(-M+\sqrt{\cdots}) + \frac{M}{\sqrt{\cdots}} 2\sqrt{\cdots} - 2\sqrt{\cdots} \right)^{-2} \\ &= \frac{(r+r_0-r_1)(r+r_0)}{r^2} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \end{aligned}$$

Im folgenden sollen zur weiteren Untersuchung der Lösung einige Graphen angeführt werden, welche $G(r)$ zu verschiedenen Werten der Parameter Q und r_1 zeigen. Der Wert der Masse wird $M = 1$ gesetzt, da es für den qualitativen Verlauf nur auf das Verhältnis $M/M_{ext} = M/Q$ ankommt.

In Abbildung 5.1 ist der Grenzfall der Buchdahllösung graphisch dargestellt. Aus $Q = 0$ folgt für alle Werte von r_1 für den Parameter $r_0 = 0$. Es existiert also nur eine Nullstelle, deren Ort von r_1 angegeben wird.

Gibt man r_1 den Wert der Nullstelle der Schwarzschildlösung, nämlich $r_1 = 2$, wird diese wiederum als Grenzfall produziert.

Ist der Wert von r_1 kleiner, liegt der Fall eines Schwarzen Loches vor, welches nur eine doppelte Nullstelle bei r_1 besitzt. Es ist damit einem extremalen Schwarzen Loch der Reissner-Nordström-Lösung ähnlich.

Ist der Wert des Parameters r_1 größer als im Grenzfall, liegt ein Schwarzschild-ähnliches Schwarzes Loch vor, mit einem Horizont bei r_1. Wirft man noch einmal einen Blick auf die Buchdahllösung (5.32), sieht man, daß für diese Fälle die Funktionswerte für $r < r_1$ komplex werden. Die Kurve ist deswegen nur für $r > r_1$ darstellbar.

Die Funktion $G(r)$ im Fall eines geladenen Schwarzen Loches ist in Abbildung 5.2 aufgetragen. Wie schon erklärt, wird durch r_1 der Abstand der beiden Nullstellen vorgegeben. Der Grenzfall der Reissner-Nordström-Lösung ohne Skalarfeld wird erreicht, wenn r_1 passend zu den Parametern M und Q gewählt wird. In Abbildung 5.2 ist das für $r_1 = \sqrt{2}$ der Fall. Für die anderen Werte sind die Abstände der Nullstellen entsprechend kleiner bzw. größer. Wieder werden, wie im Buchdahlfall, außer für die Grenzfälle ohne Skalarfeld, die Funktionswerte im Bereich zwischen den Nullstellen imaginär. Ebenfalls wie bei der Buchdahllösung erhält man, wie im Graphen (a) dargestellt, im Limes für $r_1 = 0$ ein extremales Schwarzes Loch mit einer doppelten Nullstelle. Diese liegt bei r_0, und wird nach Gleichung (5.33) bestimmt zu:

$$r_0(r_1 \to 0) = 2\frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{\ln\left(\frac{M+\sqrt{M^2-Q^2}}{M-\sqrt{M^2-Q^2}}\right)}$$

In dem hier gezeigten Fall erhält man $r_0 = \sqrt{2}/\ln((2+\sqrt{2})/(2-\sqrt{2})) \approx 0,8022$.

Für den Fall eines in der Reissner-Nordström-Lösung extremalen Schwarzen Loches wird durch die Ankopplung des Skalarfeldes die doppelte Nullstelle in zwei einfache aufgelöst. In Abbildung 5.3 sind diese Fälle gezeigt. Hierin ist für $r_1 = 0$ die extremale Reissner-Nordström-Lösung enthalten.

Auch in dem nicht in Graphen dargestellten Fall einer ohne Skalarfeld nackten Singularität, werden durch die Ankopplung des Skalarfeldes zwei Ereignishorizonte erzeugt, deren Abstand durch r_1 gegeben ist.

Als Nächstes soll nun die zweite Metrikfunktion $R(r)$ bestimmt werden. Dazu verwende ich Gleichung (5.29). Nach dem Nullsetzen von r_2 verbunden mit der Einführung des Parameters r_0 lautet die Funktion:

$$\begin{aligned} R(r) \quad = \quad & \frac{\sqrt{(r+r_0-r_1)(r+r_0)}}{2}\left(\left(\frac{M}{\sqrt{M^2-Q^2}}+1\right)\left(\frac{r+r_0}{r+r_0-r_1}\right)^{\frac{\sqrt{M^2-Q^2}}{r_1}}\right. \\ & \left. -\left(\frac{M}{\sqrt{M^2-Q^2}}-1\right)\left(\frac{r+r_0-r_1}{r+r_0}\right)^{\frac{\sqrt{M^2-Q^2}}{r_1}}\right) \end{aligned} \tag{5.37}$$

Diese geht für den Grenzfall der Reissner-Nordström-Lösung bzw. Schwarzschild-Lösung in $R = r$ über, wie in Abbildung 5.4 für $r_1 = 2$, in Abb. 5.5 für $r_1 = \sqrt{2}$ und in Abb. 5.6 für $r_1 = 0$ zu sehen ist. Für r_1-Werte kleiner als die des jeweiligen Grenzfalles, kommt $R(r)$ für kleine r aus dem positiv Unendlichen und geht nach einem Minimum asymptotisch an die $R = r$-Gerade.

Liegen die Parameterwerte über dem skalarfeldfreien Spezialfall, biegt R in Richtung der r-Gerade ab, und wird nach Erreichen eines singulären Punktes, der mit der äußersten Nullstelle der zugehörigen G-Funktion zusammenfällt, ebenso wie diese imaginär.

Aus der Gleichung (5.3) der allgemeinen Lösung bestimmt sich nun die Funktion des Skalarfeldes:

$$\phi = 2\int_{r_c}^{r} d\tilde{r}\sqrt{\frac{R''(\tilde{r})}{R(\tilde{r})}} \tag{5.38}$$

Ich wähle die untere Integrationsgrenze so, daß das Ergebnis möglichst einfach wird.

$$\phi = -2\int_{r}^{\infty} d\tilde{r}\sqrt{\frac{R''(\tilde{r})}{R(\tilde{r})}}$$

Nach dieser Formel berechnet man für das masselose Skalarfeld:

$$\phi = \pm\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{M^2-Q^2}}{(r_1)}+1\right)\left(\frac{2\sqrt{M^2-Q^2}}{(r_1)}-1\right)}\cdot\ln\left(\frac{r+r_0-r_1}{r+r_0}\right) \tag{5.39}$$

Die beiden Vorzeichen sollen deutlich machen, das beide Zweige der Wurzel zugelassen sind, da die Lösung wie erwartet invariant unter $\phi \to -\phi$ -Vertauschung ist.

Für den Grenzfälle der Reissner-Nordström- bzw. Schwarzschild-Lösung wird der Term

$$\frac{2\sqrt{M^2 - Q^2}}{r_1} = 0$$

was somit ein triviales, überall verschwindenes Skalarfeld zur Folge hat.

In der Abbildung 5.7 sind die Skalarfeldfunktionen aufgetragen, deren Funktionswerte für die Parameter, die in den Graphen für G und R gewählt wurden, reell sind. Dies ist der Fall falls r_1 kleiner als $2\sqrt{M^2 - Q^2}$ bleibt.

In seinem Verhalten variiert das Skalarfeld nicht wesentlich. Es kommt monoton aus dem Unendlichen und nähert sich asymptotisch der r-Achse an.

Mit Bestimmung der Metrikfunktion $R(r)$ kennt man auch die elektromagnetischen Feldstärken. Sie werden über die Gleichungen (5.1) und (5.2) berechnet. Um sich eine Vorstellung von den Verlauf des elektrischen bzw. magnetischen Feldes machen zu können, sind in den Abbildungen 5.8 und 5.9 die Kurven von $1/R^2$ aufgetragen. Man sieht, daß auch hier die Funktionswerte nur außerhalb des Horizontes definiert sind, und an diesen singulär werden.

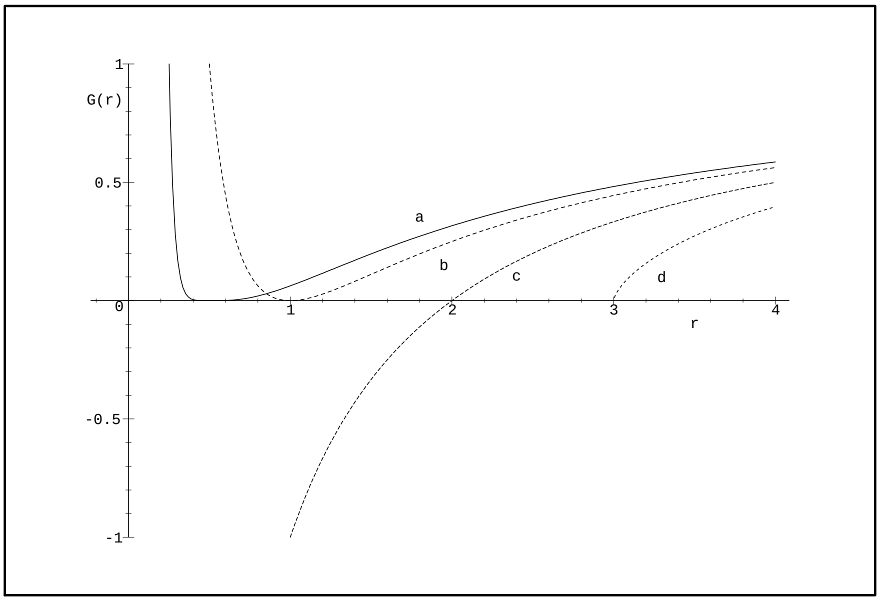

Abbildung 5.1: Die Funktion $G(r)$ für den Fall des freien Skalarfeldes für $M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1: (a) $r_1 = 0,5$, (b) $r_1 = 1$, (c) $r_1 = 2$, (d) $r_1 = 3$

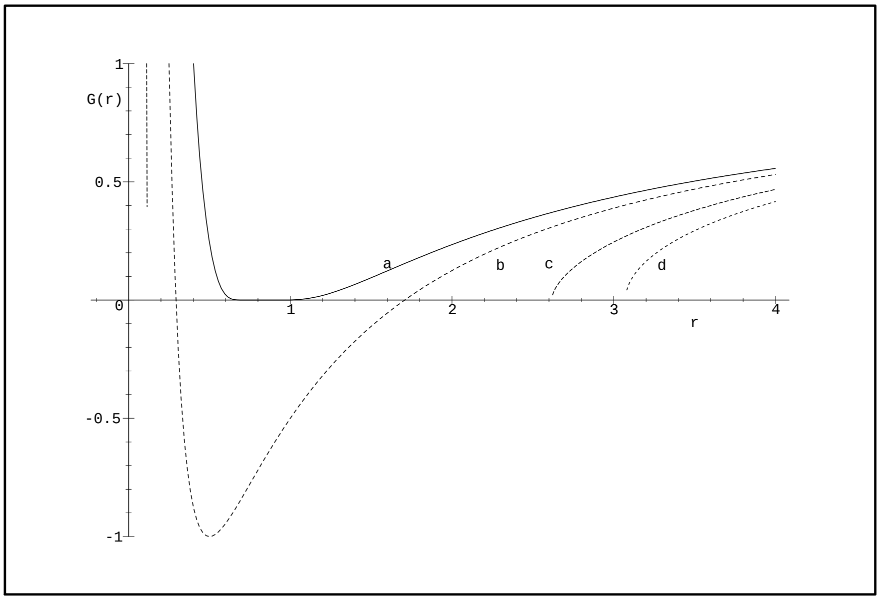

Abbildung 5.2: Die Funktion $G(r)$ für den Fall des freien Skalarfeldes für $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = 0$, (b) $r_1 = \sqrt{2}$, (c) $r_1 = 2,5$, (d) $r_1 = 3$

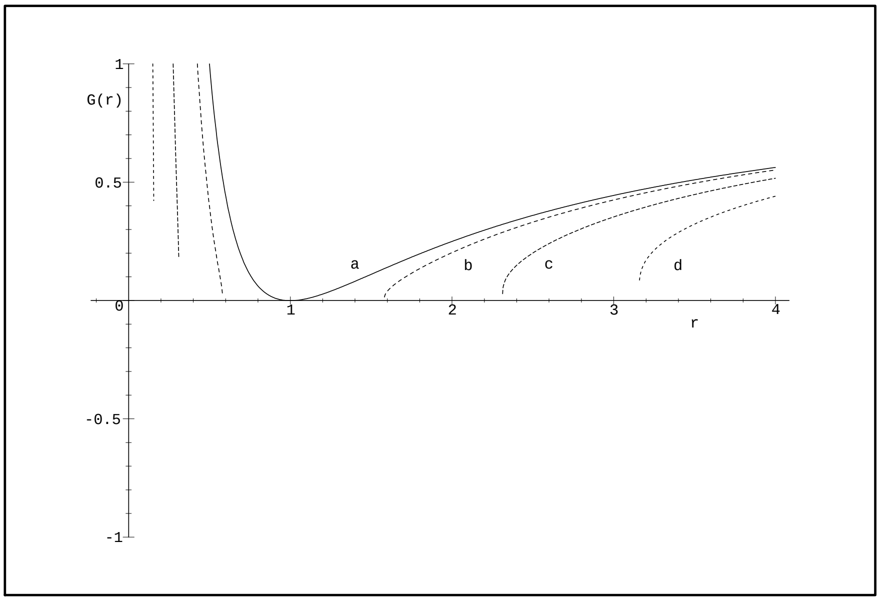

Abbildung 5.3: Die Funktion $G(r)$ für den Fall des freien Skalarfeldes für $M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1: (a) $r_1 = 0$, (b) $r_1 = 1$, (c) $r_1 = 2$, (d) $r_1 = 3$

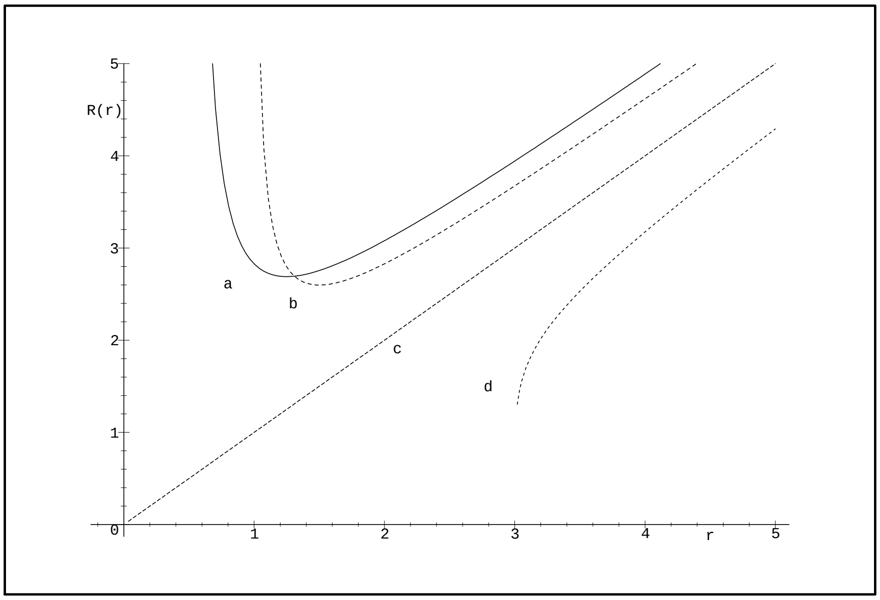

Abbildung 5.4: Die Funktion $R(r)$ für den Fall des freien Skalarfeldes für $M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1: (a) $r_1 = 0,5$, (b) $r_1 = 1$, (c) $r_1 = 2$, (d) $r_1 = 3$

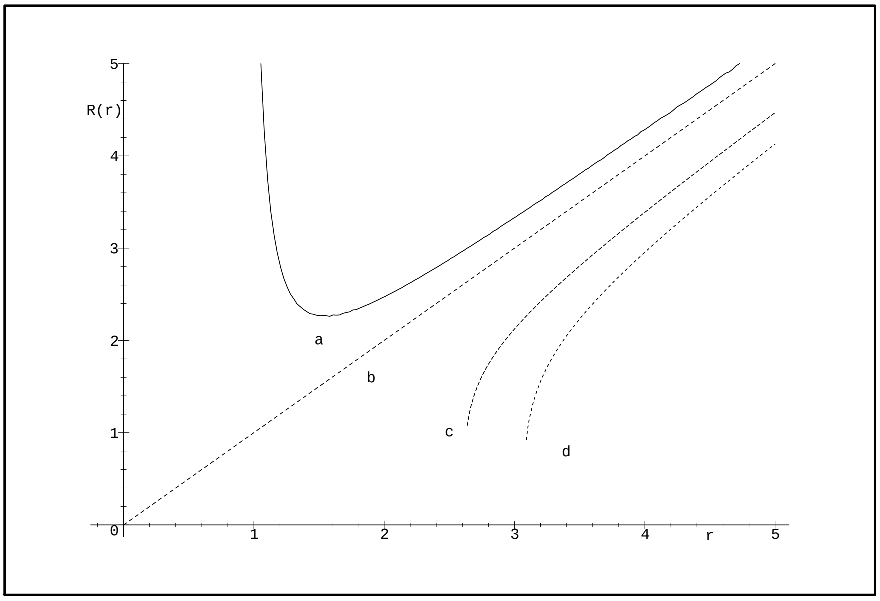

Abbildung 5.5: Die Funktion $R(r)$ für den Fall des freien Skalarfeldes für $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1: (a) $r_1 = 0$, (b) $r_1 = \sqrt{2}$, (c) $r_1 = 2,5$, (d) $r_1 = 3$

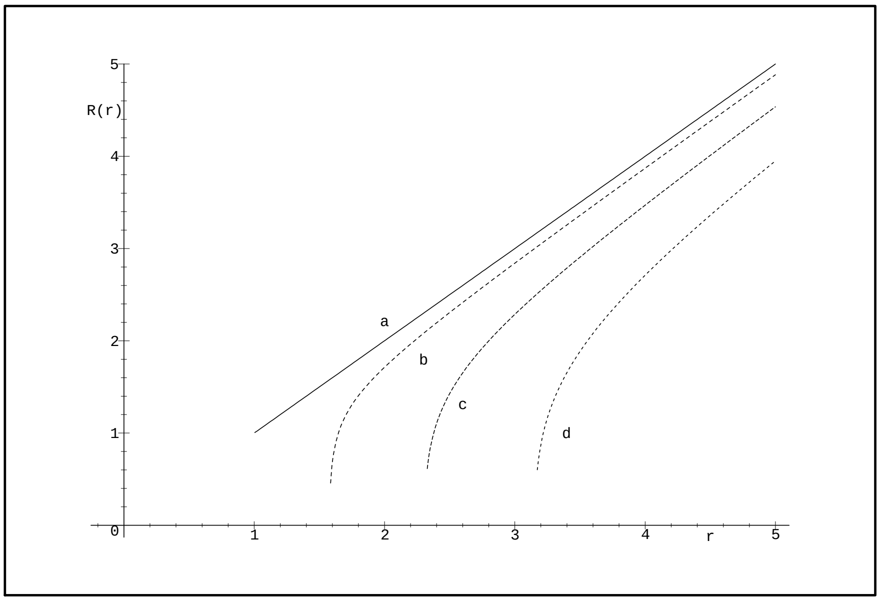

Abbildung 5.6: Die Funktion $R(r)$ für den Fall des freien Skalarfeldes für $M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1: (a) $r_1 = 0$, (b) $r_1 = 1$, (c) $r_1 = 2$, (d) $r_1 = 3$

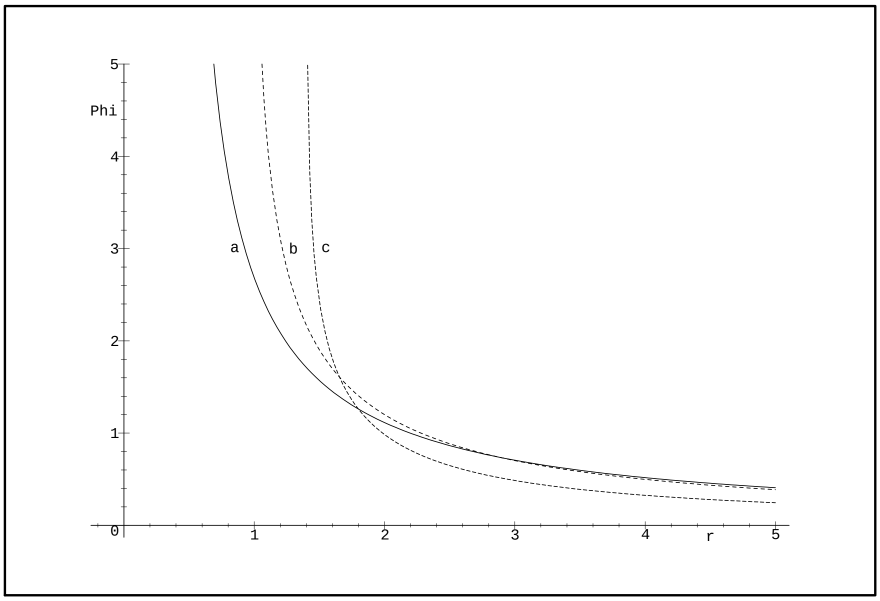

Abbildung 5.7: Die Funktion des freien Skalarfeldes für $M = 1$ und: (a) $Q = 0, r_1 = 0,5$, (b) $Q = 0, r_1 = 1$, (c) $Q = 1/\sqrt{2}, r_1 = 1$

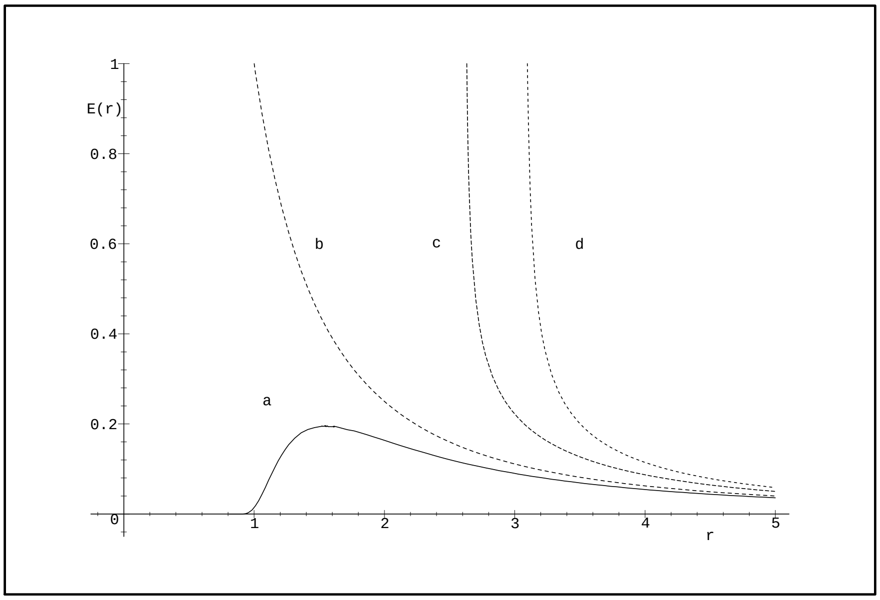

Abbildung 5.8: Die Funktion $1/R(r)^2$ für den Fall des freien Skalarfeldes für $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1: (a) $r_1 = 0$, (b) $r_1 = \sqrt{2}$, (c) $r_1 = 2,5$, (d) $r_1 = 3$

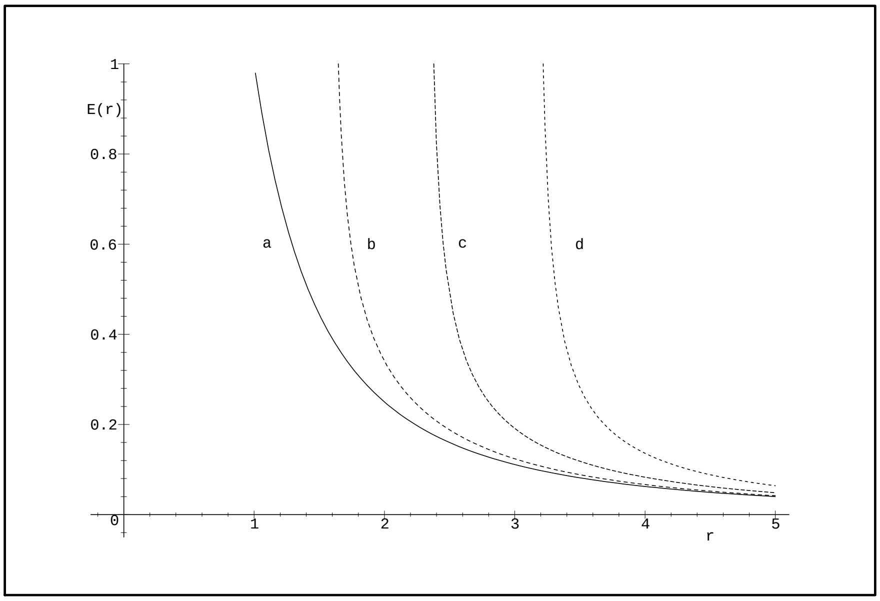

Abbildung 5.9: Die Funktion $1/R(r)^2$ für den Fall des freien Skalarfeldes für $M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1: (a) $r_1 = 0$, (b) $r_1 = 1$, (c) $r_1 = 2$, (d) $r_1 = 3$

5.4 Lösungen mit selbstwechselwirkenden Skalarfelder

Ab hier soll wieder das uneingeschränkte Gleichungssystem (3.17-3.22) betrachtet werden. Wie schon im Abschnitt 5.1 gesehen, ist dann eine allgemeine analytische Lösung nicht möglich. Ich werde deswegen die einfachste Bewegungsgleichung (3.17) für $R(r)$ durch Ansätze des Skalarfeldes ϕ lösen. Davon ausgehend werden mit den Differential- bzw. Integralgleichungen die Metrikfunktion $G(r)$ und das Potential $V(\phi)$ bestimmt.

5.4.1 Der Skalarfeldansatz $\phi = \phi_0 e^{-mr}$

Der in diesem Abschnitt verwendete Ansatz für das Skalarfeld, der zu einer Lösung der Differentialgleichung führt, wurde in einer Arbeit von O. Bechmann [1] vorgestellt.

Bei ihm setzt man das Skalarfeld in folgender Form an:

$$\phi\left(r\right) = \phi_0 e^{-mr}$$

Von dem Parameter m fordert man $m \geq 0$, damit man im asymptotischen Grenzfall die flache Metrik erhält. Der Parameter $\phi_0 = \pm|\phi_0|$ kann und soll beide Vorzeichen annehmen dürfen, da bis auf das Potential $V(\phi)$ das Problem invariant unter diesem Vorzeichenwechsel bleibt. Wie in Abschnitt 4.1.1 erklärt, wird vom Potential gefordert, dieser Invarianz ebenfalls zu folgen.

Die Differentialgleichung (3.17) lautet mit diesem Ansatz:

$$R'' = \frac{m^2}{4}\phi^2 R$$

Ich lege die Abhängigkeit der Metrikfunktion $R(r)$ von der Variablen r auf die Abhängigkeit $R(\phi/2)$ vom Skalarfeld um, welche dann implizit über $\phi(r)$ von r abhängt. Aus der Ableitung R'' ziehen wir die inneren Ableitungen per Kettenregel heraus:

$$\begin{aligned} R(r)'' = \frac{m^2}{2}\phi\partial_{\phi/2}R(\frac{\phi}{2}) + \frac{m^2}{4}\phi^2\partial^2_{\phi/2}R(\frac{\phi}{2}) &= \frac{m^2}{4}\phi^2 R(\frac{\phi}{2}) \\ \rightarrow \qquad \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \partial^2_{\phi/2}R + \left(\frac{\phi}{2}\right)\partial_{\phi/2}R - \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 R &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist die definierende Differentialgleichung für die modifizierten Besselfunktionen 1. und 2. Gattung 0-ter Ordnung. Die Lösung für R lautet:

$$R(\phi(r)) = k_1 I_0\left(\frac{\phi}{2}(r)\right) + k_2 K_0\left(\frac{\phi}{2}(r)\right) \tag{5.40}$$

Hierin sind k_1 und k_2 Integrationskonstanten. Der Parameter m im Ansatz des Skalarfeldes ist kein echter Freiheitsgrad, da er durch eine Koordinatentransformation zum Verschwinden gebracht werden kann. Die Transformation ist eine entgegengesetzte Skalierung der Radial- und Zeitkoordinate. Die Skalierung der Zeitkoordinate ist dabei durch die Forderung festgelegt, daß die durchgeführte Koordinatentransformation konform wird. Nach der Transformation:

$$\begin{aligned} t &= m \cdot t' \\ r &= \frac{1}{m} \cdot r' \end{aligned}$$

erhält ϕ folgende Form

$$\phi = \phi_0 e^{-r}$$

Die transformierten Größen werden gleich wieder wie die alten benannt, so daß sich an der Form von R nichts ändert.

Ich werde die Besselfunktionen in (5.40) nun ausschreiben. In der 0-ten Ordnung lassen sie sich als Summen ausdrücken.

$$\begin{aligned} I_0(\phi/2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\phi}{4}\right)^{2n} \\ K_0(\phi/2) &= -\left(\gamma + \ln\left|\frac{\phi}{4}\right|\right) I_0(\phi/2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\phi}{4}\right)^{2n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet $\gamma \approx 0,5772...$ die Euler-Konstante. Weiterhin wird mit der Betragsnahme unter dem Logarithmus der $\phi \to -\phi$ -Symmetrie Rechnung getragen. Würde man die Rechnung für beide Vorzeichen getrennt durchführen, käme man an dieser Stelle auf jeweils gleiche Ausdrücke.

Nach der Zusammenfassung der Summen in R ergibt sich der Ausdruck:

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(k_1 + k_2 \left(\gamma + \ln\left|\frac{\phi_0 e^{-r}}{4}\right| + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right) \right) \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\phi_0}{4} e^{-r}\right)^{2n}$$

Die Form von R läßt sich noch vereinfachen, indem man eine weitere Koordinatentransformation darauf anwendet. Diese wird durchgeführt in Form einer Translation der Radialkoordinate r:

$$r = r' + \ln|\phi_0/4| + \gamma - \frac{k_1}{k_2}$$

Hiermit ergibt sich als notwendige Redefinition des Parameters ϕ_0, damit die Form des Skalarfeldes unverändert bleibt:

$$\phi_0' = \mathrm{sgn}(\phi_0) 4 e^{k1/k2 - \gamma}$$

Nach dieser Translation haben die Größen ϕ und R folgende Form:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi_0 e^{-r} \\ R(r) &= k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(r + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right) \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\phi_0}{4} e^{-r}\right)^{2n} \end{aligned}$$

Hierin wurden die transformierten Größen ebenfalls sofort wieder umbenannt.

Die Forderung nach asymptotischer Flachheit fixiert die Integrationskonstante k_2.

$$\begin{aligned} R &\stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} k_2 r \\ &\stackrel{!}{\longrightarrow} r \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort :

$$k_2 = 1$$

Das Endergebnis für R lautet also:

$$R(r) = r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right) \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\phi_0}{4} e^{-r}\right)^{2n} \tag{5.41}$$

Oder wieder in Termen von Besselfunktionen ausgedrückt:

$$R(r) = \ln\left|\frac{1}{4}\phi_0 e^{-\gamma}\right| I_0\left(\frac{\phi_0}{2e^r}\right) + K_0\left(\frac{\phi_0}{2e^r}\right)$$

Diese Lösung für die Metrikfunktion $R(r)$ ist symmetrisch unter Vertauschung $\phi \to -\phi$, was man in der Darstellung als Summe sehr gut erkennt, da hier ϕ_0 quadratisch eingeht.

Für die Abhängigkeit der Funktion $R(r)$ von dem Parameters ϕ_0 sind folgende Fälle zu unterscheiden (Abb. 5.10):

- Für $|\phi_0| > 4e^{-\gamma} \approx 2,25$ fällt R aus dem positiv Unendlichen monoton bis zu einem Minimum, um dann anzusteigen und sich asymptotisch der Geraden $R = r$ anzunähern.
- Ist $|\phi_0| = 4e^{-\gamma}$, so kommt R für kleine r aus einer Asymptote an der r-Achse und geht für große r ebenfalls asymptotisch an die Gerade $R = r$.
- Wählt man $0 < |\phi_0| < 4e^{-\gamma}$ besitzt R eine Nullstelle. Mit einer weiteren Transformation ließe sich diese in den Koordinatenursprung legen. Jedoch ist die Rolle dieser Nullstelle noch unklar. Auch würde der nicht explizit bestimmbare Ort der Nullstelle das Problem unnötig verkomplizieren.
- Für $|\phi_0| = 0$ schließlich ist das Skalarfeld verschwunden und der flache Raum erreicht.

In Abbildung 5.11 ist $1/R^2$ aufgetragen, denn bis auf quanitative Unterschiede weisen das elektrische und magnetische Feld diesen Verlauf auf. Sie sind jetzt aus Gleichung (5.1) und (5.2) aus der Kenntnis von $R(r)$ bestimmbar.

Die Darstellung der Funktion $R(r)$ in Termen aus Besselfunktionen ist der Ausgangspunkt zur Berechnung der weiteren Metrikfunktion $G(r)$. So ist $G(r)$ nach der Gleichung (5.4) durch Integration zu erhalten:

$$G = R^2 \int_r^\infty d\tilde{r}\, \frac{2\tilde{r} - 6M}{R^4} + 4Q^2 R^2 \int_r^\infty d\tilde{r}\, \frac{1}{R^4} \int_{\tilde{r}}^\infty d\tilde{\tilde{r}}\, R^{-2}$$

Die hierin auftretenen Integrale sind nicht analytisch lösbar. Deshalb werden die Besselfunktionen entwickelt und den Ordnungen nach integriert.

Entwickelt wird nach dem Term $\phi_0/4 \cdot exp(-r)$. Nach Ausführung der Integration erhält man eine Darstellung von G der Form:

$$G(r) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(r, M) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}(r, M)\phi_0^{2m} Ei(1, 2mr)\right)\phi_0^{2n} e^{-2nr}$$

Hierbei sind a_n und b_{nm} Koeffizienten, die aus der Integration bestimmt werden. Ei ist die Integralexponentialfunktion:

$$Ei(1, 2x) = \int_x^\infty d\tilde{x}\, \frac{1}{\tilde{x}} e^{-2\tilde{x}}$$

Die Koeffizienten der ersten Terme lauten:

$$a_0 = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left(\frac{1}{6}+\frac{M}{2}+\frac{Q^2}{6}\right) r + \frac{1}{24} - \frac{M}{4} - \frac{Q^2}{12} \\
&\quad + \left(\frac{Q^2}{12} - \frac{1}{24}\right) r^{-1} + \frac{M}{8} r^{-2} - \frac{Q^2}{8} r^{-3} \\
a_2 &= \left(\frac{11}{192}+\frac{5M}{32}+\frac{Q^2}{12}\right) r + \frac{M}{128} + \frac{11}{1536} - \frac{Q^2}{192} \\
&\quad + \left(-\frac{5}{3072}+\frac{Q^2}{128}\right) r^{-1} + \left(\frac{1}{384} - \frac{5M}{1024} - \frac{C_W}{192}\right) r^{-2} \\
&\quad - \left(\frac{M}{128} - \frac{5Q^2}{1024}\right) r^{-3} + \frac{3Q^2}{256} r^{-4} \\
b_{01} &= -\frac{1}{3}\left(3M+1+Q^2\right) r^2 \\
b_{02} &= -\frac{1}{48}\left(18M+12Q^2+7\right) r^2 \\
b_{11} &= \left(-\frac{1}{24}-\frac{M}{8}-\frac{Q^2}{24}\right) r^2 + \left(-\frac{1}{24}-\frac{M}{8}-\frac{Q^2}{24}\right) r \\
b_{12} &= -\frac{1}{384}\left(18M+7+12Q^2\right) r^2 - \frac{1}{384}\left(18M+7+12Q^2\right) r \\
b_{21} &= \left(33M+11+11Q^2\right)\left(-\frac{1}{5632} r^2 - \frac{1}{3072} r - \frac{1}{8448}\right) \\
b_{22} &= -\left(18M+12Q^2+7\right)\left(\frac{r^2}{8192}+\frac{11r}{49152}+\frac{1}{12288}\right) \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Der Koeffizient a_0 ist die Reissner-Nordström-Lösung, die im skalarfeldfreien Fall erreicht wird.

Zur Erstellung der Graphen, die $G(r)$ darstellen, wurde die Entwicklung bis zur Ordnung $n = m = 6$ durchgeführt. Der schwächste Term in der Entwicklung ist also $\sim e^{-12r}$.

In Abbildung 5.12 ist die Funktion $G(r)$ für den Grenzfall des ungeladenen Schwarzen Loches dargestellt. Obwohl R bei diesen Parameterwerten ein qualitativ sehr unterschiedliches Verhalten aufweist, weicht $G(r)$ nur sehr wenig von der Schwarzschildlösung ab. Eine Vergrößerung 5.13 zeigt dennoch die Verschiebung des Horizontes.

In Abb. 5.14 ist die Funktion $G(r)$ für ein geladenes Schwarzes Loch dargestellt. Das angebundene Skalarfeld führt nur zu kleinen quantitativen Änderungen. Qualitativ ändert sich die Metrikfunktion wenig, so z.B. werden die beiden Horizonte wieder nur minimal verschoben. Hierbei ist auch zu beachten, daß für kleinere r-Werte der Fehler der Reihenentwicklung größeren Einfluß gewinnt.

Als Nächstes möchte ich nun ein extremales Schwarzes Loch betrachten, d.h. der Fall einer doppelten Nullstelle in der Metrikfunkrion $G(r)$ und somit zusammenfallenden Horizonten. Wie in 5.15 zu sehen ist, bewirkt diesmal die geringe quantitative Änderung durch Anbindung des Skalarfeldes eine entscheidene qualitative Änderung, denn das Schwarzes Loch wird nichtextremal und besitzt wieder zwei Horizonte, wie in 5.16 vergrößert dargestellt ist. Hierin ist zu sehen, daß der Abstand beider Horizonte mit zunehmenden $|\phi|$ größer wird.

Das Ankoppeln des Skalarfeldes führt also dazu, daß eine über-extremale Reissner-Nordström-Lösung einer nackten Singularität wieder physikalisch akzeptabel wird, da in der Metrikfunktion $G(r)$ wieder Nullstellen auftreten, und somit die Singularität hinter Ereignishorizonten verborgen wird. Dies ist beispielhaft in Abbildung

5.17 dargestellt.

Nun wird das Potential über seine Bewegungsgleichung (3.19) bestimmt:

$$V=\frac{1}{2}G\left(\partial_r\phi\right)^2+2\frac{GR'^2-1}{R^2}+2\frac{G'R'}{R}+\frac{2Q^2}{R^4}$$

Nach Einsetzen der obigen Ergebnisse und wiederum durchgeführter Reihenentwicklung erhält man das Selbstwechselwirkungspotentials in der Form:

$$V(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n(r,M)+\sum_{m=1}^{\infty}d_{nm}(r,M)\phi_0^{2m}Ei(1,2mr)\right)\phi_0^{2n}e^{-2nr}$$

Die ersten Koeffizienten der Entwicklung lauten:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0\\
c_1 &= \frac{1}{2}+\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r}\\
c_2 &= \left(\frac{1}{12}+\frac{M}{4}+\frac{Q^2}{12}\right)r-\frac{13}{96}-\frac{7M}{8}-\frac{7Q^2}{24}\\
&\quad+\left(\frac{1}{6}+\frac{3M}{8}+\frac{5Q^2}{12}\right)r^{-1}-\left(\frac{M}{8}+\frac{Q^2}{16}\right)r^{-2}\\
d_{01} &= -(2+6M+2Q^2)\\
d_{02} &= -\frac{1}{8}(18M+7+12Q^2)\\
d_{03} &= -\frac{1}{1024}(281+666M+666Q^2)\\
d_{11} &= -\left(\frac{1}{6}+\frac{M}{2}+\frac{Q^2}{6}\right)r^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{3M}{2}+\frac{Q^2}{2}\right)r+\frac{1}{4}+\frac{3M}{4}+\frac{Q^2}{4}\\
d_{12} &= (7+18M+12Q^2)\left(-\frac{1}{96}r^2+\frac{1}{32}r+\frac{1}{64}\right)\\
d_{21} &= -\left(\frac{5}{96}+\frac{5M}{32}+\frac{5Q^2}{96}\right)r^2-\left(\frac{7M}{64}+\frac{7}{192}+\frac{7Q^2}{192}\right)r+\frac{3}{256}+\frac{9M}{256}+\frac{3Q^2}{256}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Die Entwicklung zur Berechnung der Graphen des Potentials wurde bis zur Ordnung $\sim e^{-4r}$ durchgeführt.

In der so erhaltenen entwickelten Darstellung muß noch die r-Abhängigkeit durch die ϕ-Abhängigkeit ersetzt werden. Hierfür verwende ich den invertierten Ansatz des Skalarfeldes:

$$r=-\ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)$$

Dieser invertierte Ansatz überstreicht je nach Vorzeichen von ϕ_0 nur positive oder negative ϕ. Das damit erhaltene Ergebnis für $V(\phi)$ soll jedoch aufgrund der geforderten $\phi\to-\phi$ -Symmetrie symmetrisch fortgesetzt werden. Dazu wird die Ersetzung in der Form

$$r=-\ln\left|\frac{\phi}{\phi_0}\right|$$

durchgeführt. Jetzt ist das Potential für negative und positive ϕ-Werte symmetrisch fortgesetzt, und der Parameter ϕ_0 geht, wie bei den Metrikfunktionen nur im Betrag $|\phi_0|$ ein.

Auf diese Weise erhält man folgende Entwicklung als Endergebnis für V:

$$V(\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n(|\phi|,M)+\sum_{m=1}^{\infty}d_{nm}(|\phi|,M)\phi_0^{2m}Ei\left(1,-2m\ln\left|\frac{\phi}{\phi_0}\right|\right)\right)\phi^{2n}$$

wobei in den übernommen Parametern c_n und d_{nm} natürlich r durch den invertierten Ansatz ersetzt wird.

Das so erhaltene Potential weist einen sehr interessanten Funktionsverlauf auf. In den Abbildungen 5.18 bis 5.21 ist das Potential für die Fälle eines ungeladenen, eines geladenen und eines extremalen Schwarzen Loches gezeigt. Der qualitative Verlauf des Potentials ändert sich in all diesen Fällen nicht, nur die Abmessungen der Graphen variieren.

Das Potential weist mehrere Minima und Maxima auf. Für große Werte von ϕ geht es ins positiv Unendliche. Geht man zu kleineren Argumenten, so erreicht man das erste Minimum, was durch die Einschließung zwischen zwei Maxima einen metastabilen Bereich darstellt.

Dann sieht es so aus, als sich ob das Potential für $\phi \to 0$ den Rest des Weges monoton auf Null zubewegt. Eine Vergrößerung in Abbildung 5.19 zeigt jedoch, daß vor dem Erreichen des Ursprunges, noch eine Nullstelle auftritt, der sich ein lokales Maximum anschließt. Zusammen mit dem symmetrisch im Bereich negativer ϕ gelegenen Maximum bildet es einen weiteren metastabilen Bereich ($\phi = 0, V = 0$), wo sich nochmals ein Minimum befindet. Dieses Minimum bleibt bei der Hinzunahme von Ladung erhalten.

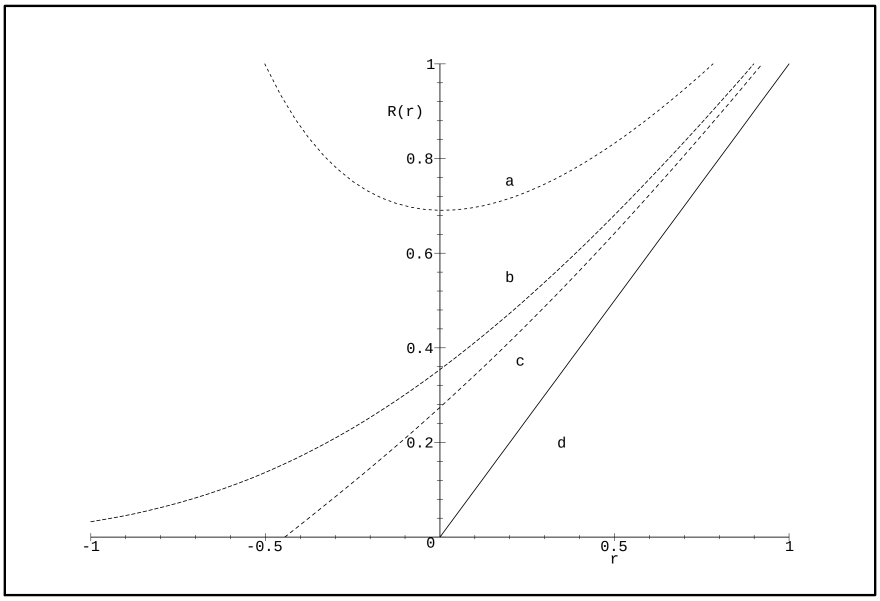

Abbildung 5.10: Die Funktion $R(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ für verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 3$, (b) $\phi_0 = 4e^{-\gamma}$, (c) $\phi_0 = 2$, (d) $\phi_0 = 0$

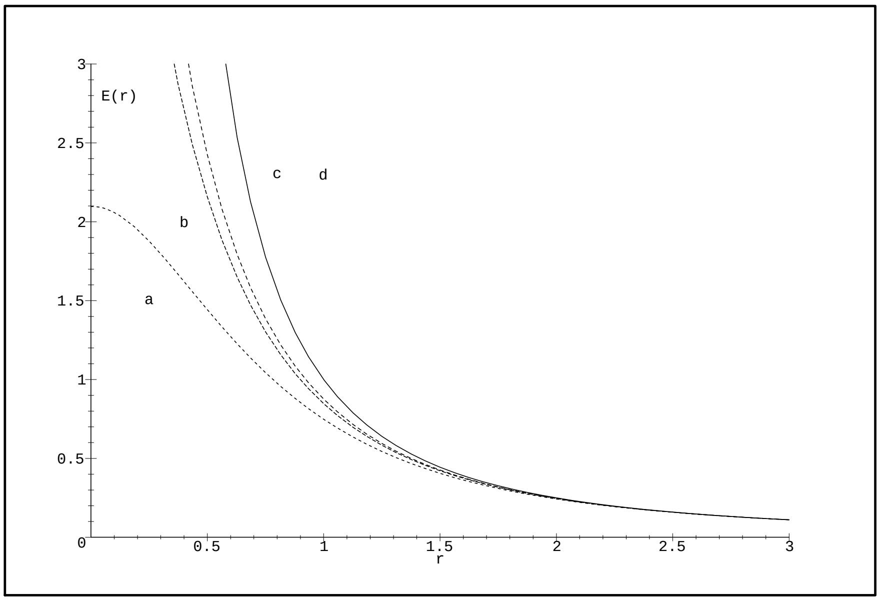

Abbildung 5.11: Die Funktion $1/R(r)^2$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ für verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 3$, (b) $\phi_0 = 4e^{-\gamma}$, (c) $\phi_0 = 2$, (d) $\phi_0 = 0$

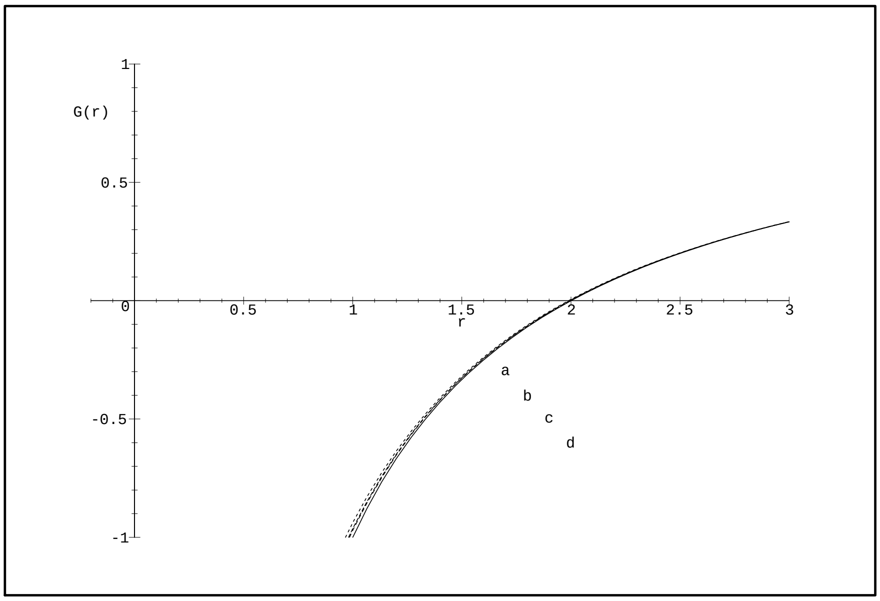

Abbildung 5.12: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ für $M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 3$, (b) $\phi_0 = 4e^{-\gamma}$, (c) $\phi_0 = 2$, (d) $\phi_0 = 0$

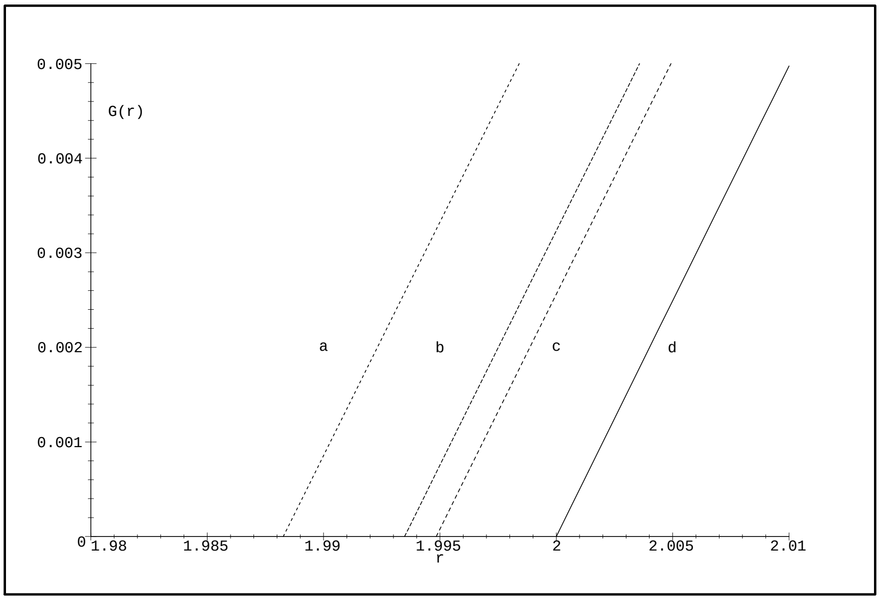

Abbildung 5.13: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ in einer Ausschnittsvergrößerung für $M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 3$, (b) $\phi_0 = 4e^{-\gamma}$, (c) $\phi_0 = 2$, (d) $\phi_0 = 0$

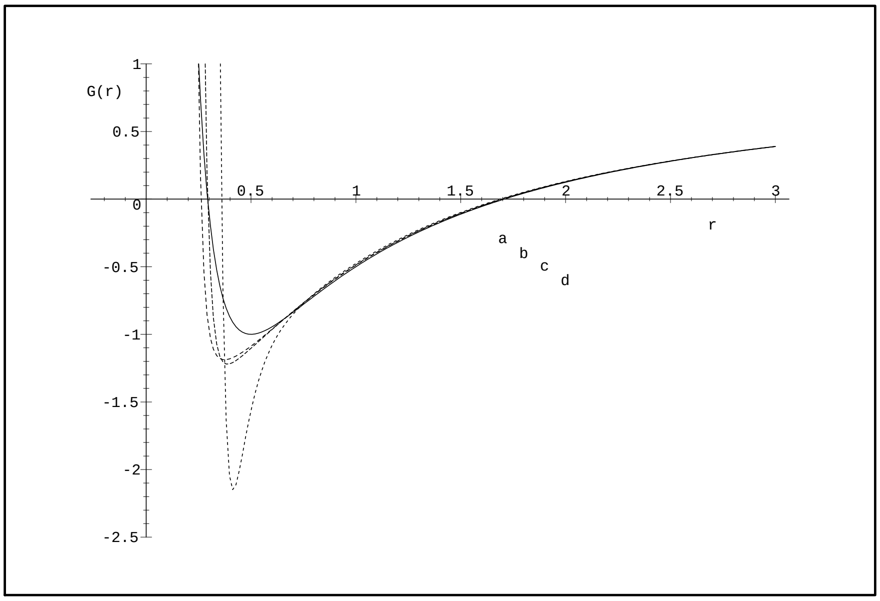

Abbildung 5.14: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ für $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 3$, (b) $\phi_0 = 4e^{-\gamma}$, (c) $\phi_0 = 2$, (d) $\phi_0 = 0$

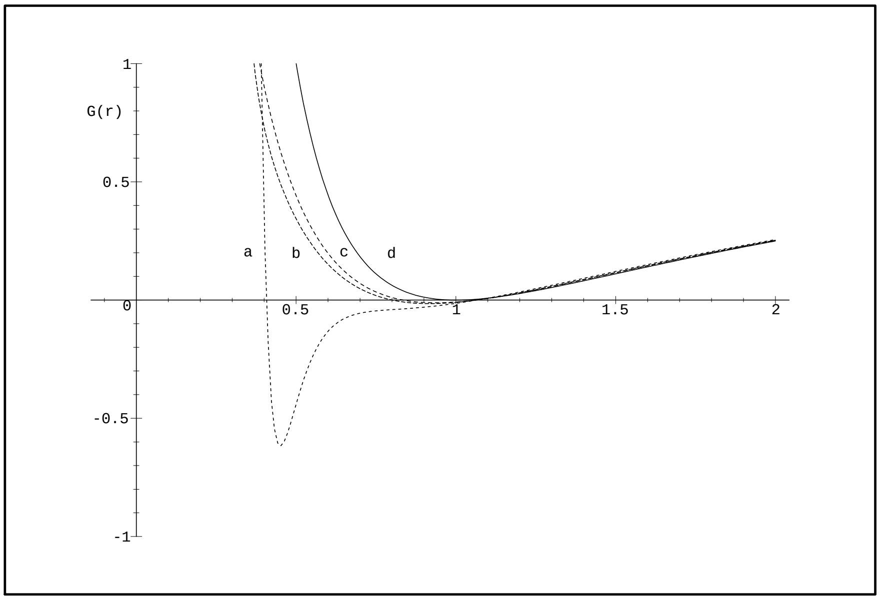

Abbildung 5.15: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ für $M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 3$, (b) $\phi_0 = 4e^{-\gamma}$, (c) $\phi_0 = 2$, (d) $\phi_0 = 0$

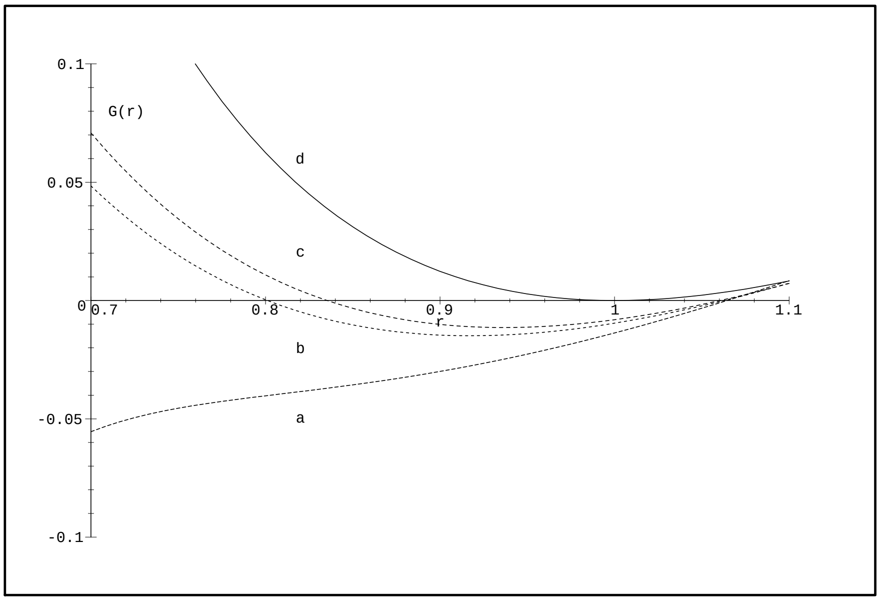

Abbildung 5.16: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ in einer Ausschnittsvergrößerung für $M = 1$ und $Q = 1$ sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 3$, (b) $\phi_0 = 4e^{-\gamma}$, (c) $\phi_0 = 2$, (d) $\phi_0 = 0$

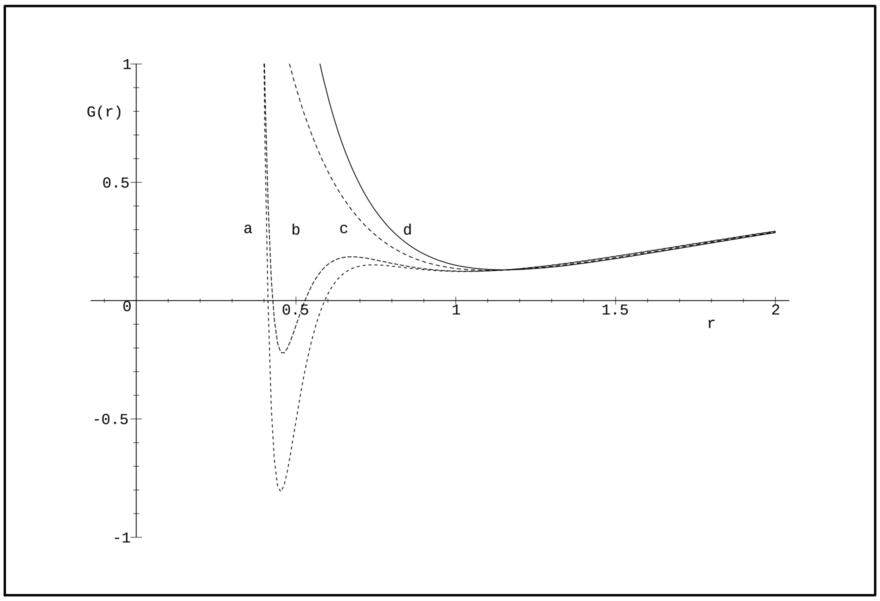

Abbildung 5.17: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ für $M = 1$ und $Q = 1,5$ sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 3,1$, (b) $\phi_0 = 3$, (c) $\phi_0 = 2$, (d) $\phi_0 = 0$

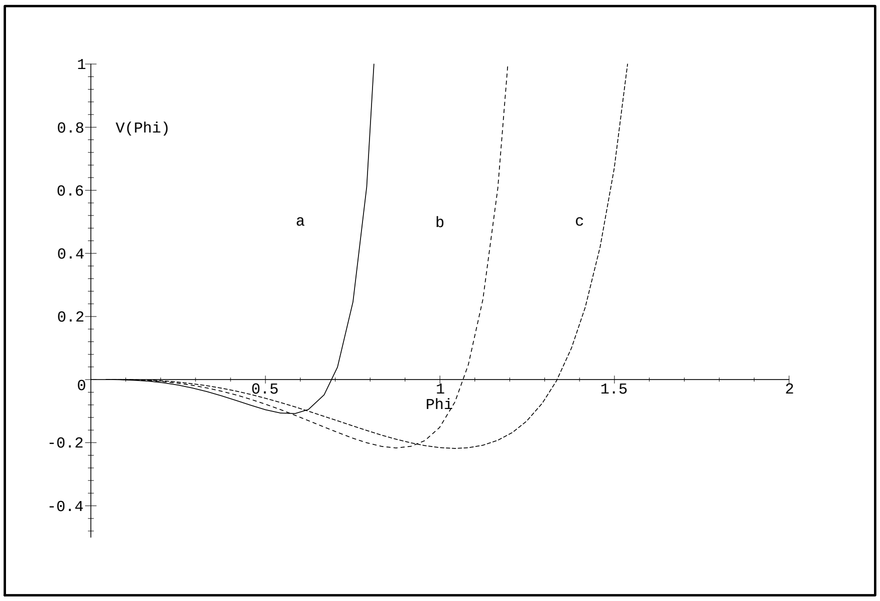

Abbildung 5.18: Das Potential $V(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ für $M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 1$, (b) $\phi_0 = 1,5$, (c) $\phi_0 = 2$

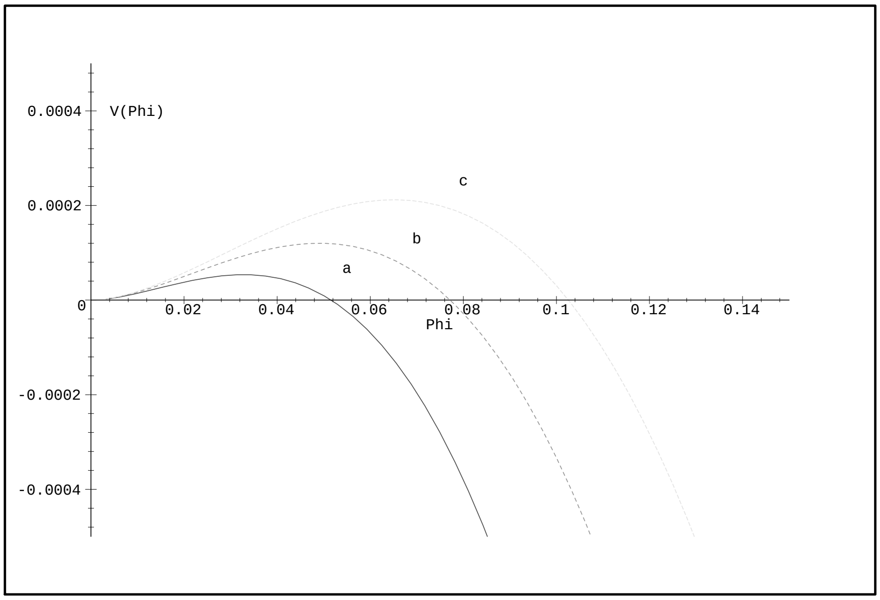

Abbildung 5.19: Das Potential $V(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ in einer Ausschnittsvergrößerung für $M = 1$ und $Q = 0$ sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 1$, (b) $\phi_0 = 1,5$, (c) $\phi_0 = 2$

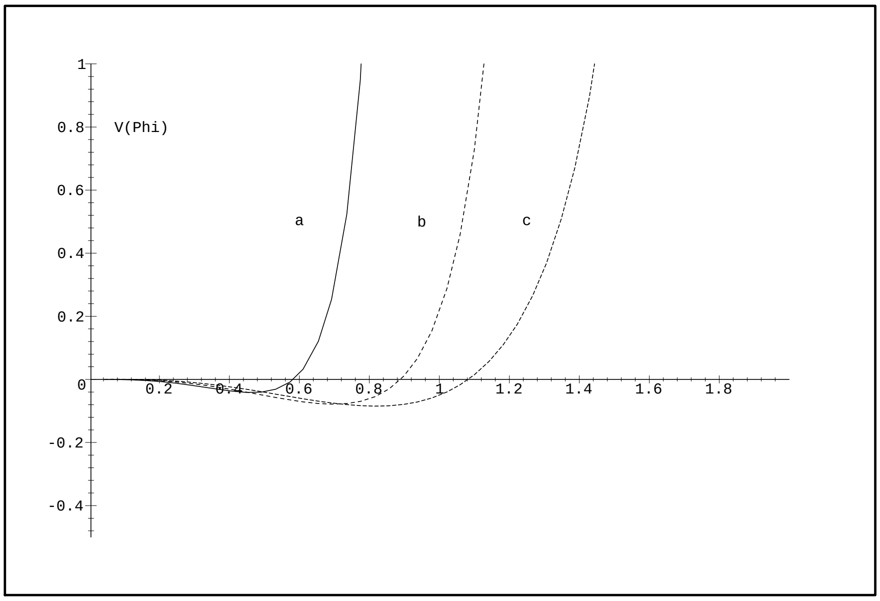

Abbildung 5.20: Das Potential $V(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ für $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 1$, (b) $\phi_0 = 1,5$, (c) $\phi_0 = 2$, (d) $\phi_0 = 0$

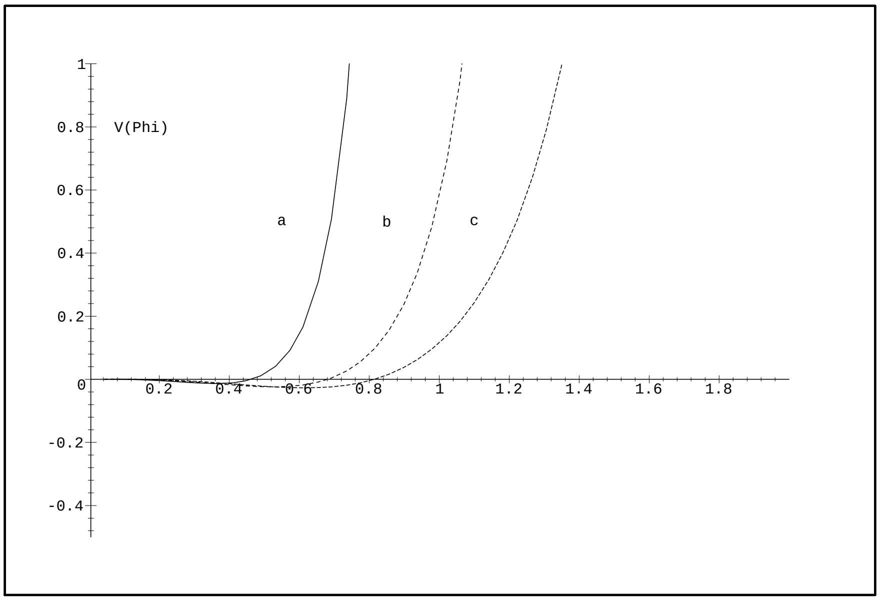

Abbildung 5.21: Das Potential $V(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0 e^{-r}$ für $M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = 1$, (b) $\phi_0 = 1,5$, (c) $\phi_0 = 2$

5.4.2 Der Skalarfeldansatz $\phi = \phi_0 r^\alpha$

Ein anderer Ansatz, der zur Lösung der Bewegungsgleichungen führt, lautet:

$$\phi(r) = \phi_0 r^\alpha \tag{5.42}$$

Er wurde erstmals in der Diplomarbeit von H. Dennhardt [2] untersucht.

Wieder überstreicht ϕ beide Vorzeichen, d.h. $\phi_0 = \pm|\phi_0|$. Die Untersuchungen der Bewegungsgleichungen ergaben eine Beschränkung des möglichen Bereich aufgrund der endlichen Gesamtenergie und des Newtonschen Grenzfalls auf:

$$\alpha < -\frac{1}{2}$$

Gleichung (3.17) lautet mit diesem Ansatz:

$$R'' = \frac{1}{4}\phi_0^2\alpha^2 r^{2\alpha-2}R \tag{5.43}$$

Diese Differentialkgleichung läßt sich wieder mit Hilfe von Besselfunktionen lösen:

$$R(r) = \sqrt{r}\left[c_1 I_{1/2\alpha}\left(\pm\frac{\phi_0}{2}r^\alpha\right) + c_2 K_{1/2\alpha}\left(\pm\frac{\phi_0}{2}r^\alpha\right)\right]$$

Das frei wählbare Vorzeichen entspringt der $\phi \to -\phi$ -Symmetrie der Differentialgleichung.

Die Besselfunktionen sind als Lösungen der bestimmenden Differentialgleichung oder über analytisch nicht lösbare Integrale definiert. Nur zu wenigen Ordnungen lassen sie sich mit Hilfe von Summen schreiben. In der hier erhaltenen Lösung der Differentialgleichung liegen diese Ordnungen ($n \in \mathbf{N}$) bei den Werten:

$$\alpha = \pm\frac{1}{2n+1}$$

Davon ist nur ein Fall mit der Forderung nach endlicher Gesamtenergie der Materie vereinbar. In diesem bestimmt sich mit $\alpha = -1$ das Skalarfeld zu:

$$\phi = \frac{\phi_0}{r}$$

Ich erhalte damit für die in Termen von Besselfunktionen der Ordnung $\pm 1/2$ ausgedrückte Metrikfunktion R:

$$\begin{aligned} R(r) &= \sqrt{r}\left(c_1 I_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_0}{2r}\right) + c_2 K_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_0}{2r}\right)\right) \\ &= \sqrt{r}\left(c_1\sqrt{\frac{r}{\pi\phi_0}}\left(e^{\frac{\phi_0}{2r}} + e^{-\frac{\phi_0}{2r}}\right) + c_2\sqrt{\frac{\pi r}{\phi_0}}e^{-\frac{\phi_0}{2r}}\right) \\ &= c_3 r\left(e^{\frac{\phi_0}{2r}} + e^{-\frac{\phi_0}{2r}}\right) + c_4 r e^{-\frac{\phi_0}{2r}} \end{aligned}$$

In der letzten Umformung wurden die beiden neuen Konstanten c_3 und c_4 eingeführt.

Eine der beiden Integrationskonstanten läßt sich durch eine Koordinatentransformation auf einen beliebigen Wert gleichen Vorzeichens bringen und stellt somit (bis auf das Vorzeichen) einen reinen Eichfreiheitsgrad dar. Diese Transformation ist eine kombinierte Skalierung der Zeit- und Radialkoordinate mit einer positiven Konstanten, d.h. eine konforme Koordinatentransformation. Möchte ich zum Beispiel c_4 (bis auf sein Vorzeichen) zum Verschwinden bringen, lautet die Transformation:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r'}{|c_4|} \\ t &= |c_4|t' \end{aligned}$$

Dabei müssen die Auswirkungen in die übrigen Parameter absorbiert werden.

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{\phi_0'}{|c_4|} \\ c_3 &= c_3'|c_4| \end{aligned}$$

Es bleibt:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{\phi_0}{r} \\ R(r) &= c_3 r \left(e^{\frac{\phi_0}{2r}} + e^{-\frac{\phi_0}{2r}}\right) \pm r e^{-\frac{\phi_0}{2r}} \end{aligned}$$

Dabei wurden die transformierten Größen sofort wieder umbenannt. Der Parameter c_4 ist verschwunden, nur die beliebige Wahl seines Vorzeichens ist geblieben. Die Forderung nach asymptotischer Flachheit fixiert die übriggebliebene Integrationskonstante c_3:

$$\begin{aligned} R \quad &\overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad c_3 2r \pm r \\ &\overset{!}{\longrightarrow} \quad r \end{aligned}$$

Dies ist nur der Fall, für:

$$\begin{aligned} c_3 &= 0 \\ c_3 &= 1 \end{aligned}$$

je nach Vorzeichenwahl.

Setze ich dies in die Formel ein, bleibt nur noch:

$$R(r) = re^{-\frac{\phi_0}{2r}}$$

Das entstandene frei wählbare Vorzeichen wurde in den Parameter ϕ_0 absorbiert, der ja schon ein freies Vorzeichen besaß, welches aus der $\phi \to -\phi$ -Invarianz stammt.

Zu dieser Symmetrie sind noch einige Worte zu sagen. Egal mit welchem Vorzeichen für das Skalarfeld man startet, für R kann immer diese Form gewählt werden.

In diesem Licht ist auch das Verhalten von R unter Variation des Parameters ϕ_0 zu sehen. Denn es lassen sich für die verschiedenen Parameterwerte von ϕ_0 qualitative Unterschiede im Verhalten der Funktion $R(r)$ feststellen. In Abbildung 5.22 sind diese dargestellt.

Es lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- Ist ϕ_0 positiv, so steigt R monoton vom Ursprung bis nach Unendlich, wo sich die Funktion asymptotisch $R = r$ nähert.

- Für $\phi_0 = 0$ verschwindet das Skalarfeld. Die Metrikfunktion nimmt den Verlauf $R = r$ der Schwarzschild- bzw. Reissner-Nordström-Lösung an.

- Im Fall negativer ϕ_0 beginnt R für $r = 0$ im Unendlichen, fällt bis zu einem Minimum, um sich dann wieder asymptotisch $R = r$ zu nähern.

Dieses qualitativ verschiedene Verhalten wirkt sich auch auf den Verlauf der elektromagnetischen Feldstärken aus. Das elektromagnetische Feld wird aus den Komponenten des Feldstärketensors bestimmt, die nach Gleichung (5.1) bzw. (5.2) aus der Kenntnis von $R(r)$ folgen. In Abb. 5.23 ist die Funktion $1/R^2$ graphisch dargestellt. Diesem Verlauf folgen die elektromagnetischen Feldstärken.

Nun wird nach Gleichung (5.4) die Metrikfunktion G bestimmt:

$$G = R^2 \int_r^\infty d\tilde{r}\, \frac{2\tilde{r} - C_M}{R^4} + 4Q^2R^2 \int_r^\infty d\tilde{r}\, \frac{1}{R^4} \int_{\tilde{r}}^\infty d\tilde{\tilde{r}}\, R^{-2}$$

Die Lösung der Integrale lautet:

$$\begin{aligned}
G \;\; = \;\; & e^{2\frac{\phi_0}{r}} \left(\frac{4}{3}\frac{Q^2}{\phi_0^2} - \frac{8}{9}\frac{Q^2 r}{\phi_0^3} + \frac{8}{27}\frac{Q^2 r^2}{\phi_0^4} \right) \\
& + e^{\frac{\phi_0}{r}} \left(-\frac{1}{2}\frac{C_M}{\phi_0} - 2\frac{Q^2}{\phi_0^2} + \frac{1}{2}\frac{C_M r}{\phi_0^2} + \frac{r}{\phi_0} + 2\frac{Q^2 r}{\phi_0^3} \right. \\
& \qquad \left. - \frac{1}{4}\frac{C_M r^2}{\phi_0^3} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{\phi_0^2} - \frac{Q^2 r^2}{\phi_0^4} \right) \\
& + e^{-\frac{\phi_0}{r}} \left(\frac{1}{4}\frac{C_M r^2}{\phi_0^3} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{\phi_0^2} + \frac{38}{54}\frac{Q^2 r^2}{\phi_0^4} \right)
\end{aligned}$$

Anhand der asymptotischen Entwicklung wird die Konstante C_M durch Vergleich mit der Schwarzschildlösung festgelegt. Die Entwicklung von G lautet:

$$G \quad \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad 1 - \frac{C_M}{3r} + \frac{\phi_0}{3r} + O(\frac{1}{r^2})$$

Um also die Schwarzschildlösung zu erhalten, muß die Konstante C_M den Wert $C_M = 6M + \phi_0$ bekommen. Damit lautet die Lösung für G:

$$\begin{aligned}
G \;\; = \;\; & e^{2\frac{\phi_0}{r}} \left(\frac{4}{3}\frac{Q^2}{\phi_0^2} - \frac{8}{9}\frac{Q^2 r}{\phi_0^3} + \frac{8}{27}\frac{Q^2 r^2}{\phi_0^4} \right) \\
& + e^{\frac{\phi_0}{r}} \left(-\frac{1}{2} - 3\frac{M}{\phi_0} - 2\frac{Q^2}{\phi_0^2} + 3\frac{Mr}{\phi_0^2} + \frac{3}{2}\frac{r}{\phi_0} + 2\frac{Q^2 r}{\phi_0^3} \right. \\
& \qquad \left. - \frac{3}{2}\frac{Mr^2}{\phi_0^3} - \frac{3}{4}\frac{r^2}{\phi_0^2} - \frac{Q^2 r^2}{\phi_0^4} \right) \\
& + e^{-\frac{\phi_0}{r}} \left(\frac{3}{2}\frac{Mr^2}{\phi_0^3} + \frac{3}{4}\frac{r^2}{\phi_0^2} + \frac{38}{54}\frac{Q^2 r^2}{\phi_0^4} \right)
\end{aligned}$$

Wie in Abbildung 5.24 zu erkennen ist, ist das Verhalten von $G(r)$ für verschiedene Parameterbereiche sehr unterschiedlich.

- Für $\phi_0 = 0$ erhalte ich die Schwarzschildlösung.
- Im Fall $\phi_0 > 0$ ergibt sich ein Schwarzes Loch, dessen Ausmaße durch die Ankopplung des Skalarfeldes vergrößert wurde.
- Im Bereich $-2 \geq \phi_0 < 0$ verschiebt sich der Ereignishorizont zu kleinen r, bis eine nackte Singularität vorliegt, die nicht mehr hinter einem Horizont verborgen ist.

- Für $\phi_0 \leq -2$ erhält man nur noch Lösungen ohne Nullstelle und somit ohne Horizont.

Auch für ein nichtextremales geladenes Schwarzes Loch treten sehr unterschiedliche Effekte durch die Ankopplung des Skalarfeldes auf.

In Abbildung 5.25 sind für die hier gewählte Kombination der Parameter M und Q folgende Werte für ϕ_0 dargestellt:

- $\phi_0 = 1$, wiederum mit einem, in seinen Ausmaßen vergrößerten Schwarzen Loch.

- $\phi_0 = 0$, der Grenzfall der Reissner-Nordström-Lösung ohne Skalarfeld.

- $\phi_0 = -1$, ein Schwarzes Loch, welches durch Ankopplung des Skalarfeldes Schwarzschild-ähnlich wurde, da es nur ein Horizont besitzt.

- $\phi_0 = -2$ und $\phi_0 = -3$, die Fälle nackter Singularitäten ohne Ereignishorizont.

Die qualitativ größten Änderungen in dem Verhalten der Metrikfunktion treten zwischen den Werten $0 > \phi_0 > -1$ und $-1 > \phi_0 > -2$ ein. Diese Bereiche werden deshalb nachfolgend genauer untersucht.

Wie sehr schön in Abb. 5.26 zu sehen ist, findet zwischen den Werten $\phi_0 = -1,7$ und $\phi_0 = -1,73$ der Übergang von einem Schwarzschild-ähnlichen Schwarzen Loch mit einem Ereignishorizont zu einer nackten Singularität ohne Horizont statt. Weiterhin geht die Funktion G für $r = 0$ nicht mehr ins negativ Unendliche, sondern ins positiv Unendliche.

Der andere qualitative Wechsel tritt zwischen den Werten $\phi_0 = -0,27$ und $\phi_0 = -0,275$ auf (Abb. 5.27). Hier wird aus dem Reissner-Nordström-ähnlichen Schwarzen Loch mit zwei Horizonten ein Schwarzschild-ähnliches Schwarzes Loch mit einer Nullstelle in der Metrikfunktion $G(r)$, welche für $r = 0$ dann auch ins negativ Unendliche geht.

Als Nächstes soll in Abb. 5.28 der Einfluß des Skalarfeldes auf ein extremales Schwarzes Loch gezeigt werden.

- Für Parameterwerte $\phi_0 > 0$ wird die Extremalität aufgehoben, d.h. aus der doppelten Nullstelle der Funktion G werden zwei einfache. Es existieren somit wieder zwei Horizonte, die zusammen mit der durch sie verhüllten Singularität ein in seinen Ausmaßen vergrößertes Schwarzes Loch bilden.

- Für $\phi_0 < 0$ wird anfangs ebenfalls die Extremalität aufgehoben, jedoch bildet sich ein verkleinertes Schwarzes Loch. Zwischen den Werten $\phi_0 = -0,75$ und $\phi_0 = -0,76$ wird aus der Reissner-Nordström-ähnlichen Lösung eine Schwarzschild-ähnliche Lösung, d.h. es tritt, wie in 5.29 zu sehen, nur noch eine Nullstelle auf.

- Aus dieser Schwarzschild-ähnlichen Lösung wird bei Werten von $\phi_0 < -1,25$ eine nackte Singularität, wie in Abb. 5.30 zu sehen ist.

Im Folgenden soll das Potential bestimmt werden aus der Gleichung:

$$V = \frac{1}{2} G \left(\partial_r \phi\right)^2 + 2 \frac{G R'^2 - 1}{R^2} + 2 \frac{G' R'}{R} + 2 \frac{Q^2}{R^4}$$

Die Funktionen ϕ, R und G in diese Gleichung eingesetzt ergeben:

$$\begin{aligned} V(r) \quad = \quad & \left[Q^2\left(\frac{16}{9\phi_0^4} - \frac{32}{9\phi_0^3 r} + \frac{88}{27\phi_0^2 r^2} - \frac{16}{9\phi_0 r^3} + \frac{2}{3r^4}\right)\right] \cdot e^{2\frac{\phi_0}{r}} \\ & + \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{3M}{\phi_0} + \frac{2Q^2}{\phi_0^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\phi_0^2} + \frac{3}{r\phi_0} - \frac{1}{r^2}\right)\right] \cdot e^{\frac{\phi_0}{r}} \\ & + \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{3M}{\phi_0} + \frac{38Q^2}{27\phi_0^2}\right) \cdot \left(\frac{3}{\phi_0^2} + \frac{3}{r\phi_0} + \frac{1}{r^2}\right)\right] \cdot e^{-\frac{\phi_0}{r}} \end{aligned}$$

Der invertierte Ansatz für das Skalarfeld $r = \frac{\phi_0}{\phi}$ erlaubt es nun, V als Funktion von ϕ darzustellen:

$$\begin{aligned} V(\phi) \quad = \quad & \left[Q^2\left(\frac{16}{9\phi_0^4} - \frac{32}{9\phi_0^4}\phi + \frac{88}{27\phi_0^4}\phi^2 - \frac{16}{9\phi_0^4}\phi^3 + \frac{2}{3\phi_0^4}\phi^4\right)\right] \cdot e^{2\phi} \\ & + \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{3M}{\phi_0} + \frac{2Q^2}{\phi_0^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\phi_0^2} + \frac{3}{\phi_0^2}\phi - \frac{1}{\phi_0^2}\phi^2\right)\right] \cdot e^{\phi} \\ & + \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{3M}{\phi_0} + \frac{38Q^2}{27\phi_0^2}\right) \cdot \left(\frac{3}{\phi_0^2} + \frac{3}{\phi_0^2}\phi + \frac{1}{\phi_0^2}\phi^2\right)\right] \cdot e^{-\phi} \end{aligned}$$

Da der invertierte Ansatz $r = \frac{\phi_0}{\phi}$ je nach Vorzeichen von ϕ_0 nur positive bzw. negative Werte des Skalarfeldes ϕ überstreicht, gilt diese Formel nur für ϕ_0 eines Vorzeichens. Es ist jedoch sinnvoll, hier die $\phi \to -\phi$ -Symmetrie zu fordern. Wie schon beim Bestimmen von R, hat man die Freiheit, bei dem Übergang von $\phi \to -\phi$ das relative Vorzeichen von ϕ_0 umzukehren, so daß man im ganzen Wertebereich von ϕ_0 dieselben Lösungen erhält. Diese Freiheit wird hier verwendet, um das Potential invariant unter Vorzeichenwechsel von ϕ zu machen. Dazu wird in der Gleichung ϕ durch $|\phi|$ ersetzt. Die daraus erhaltene Funktion für das Selbstwechselwirkungspotential ist in den Abbildungen 5.31 bis 5.33 abgebildet.

An dem Graphen 5.31 ist zu erkennen, daß das Potential für den Fall eines ungeladenen Schwarzen Loches ein Maximum bei $\phi = 0$ besitzt und dann monoton ins negativ Unendliche geht, und somit überall negativ ist.

Das Maximum bei $\phi = 0$ bleibt für den Fall anwesender Ladung erhalten. Jedoch geht das Potential nach einem Abschnitt negativer Funktionswerte ins positiv Unendliche. Somit wird ein metastabiler Bereich ausgebildet.

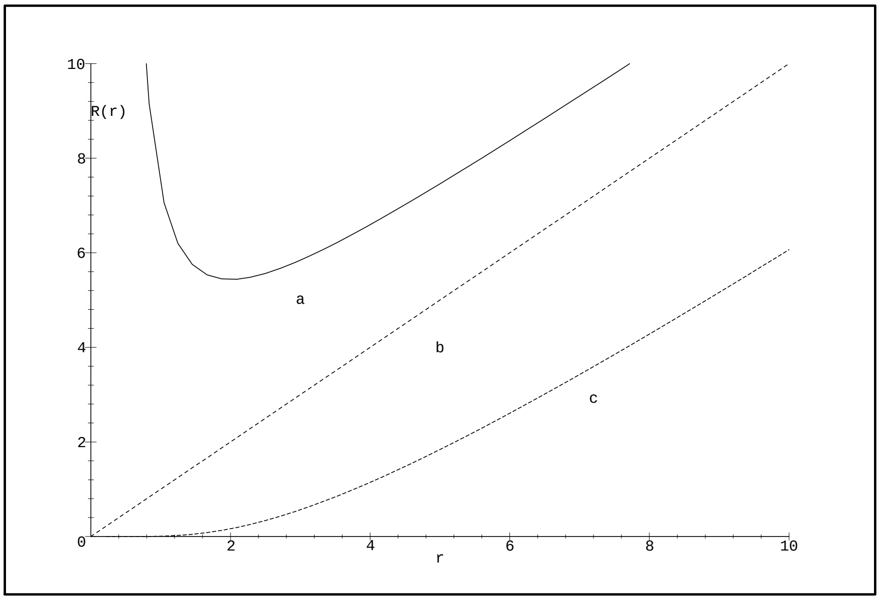

Abbildung 5.22: Die Funktion $R(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ für verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = -4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = 10$

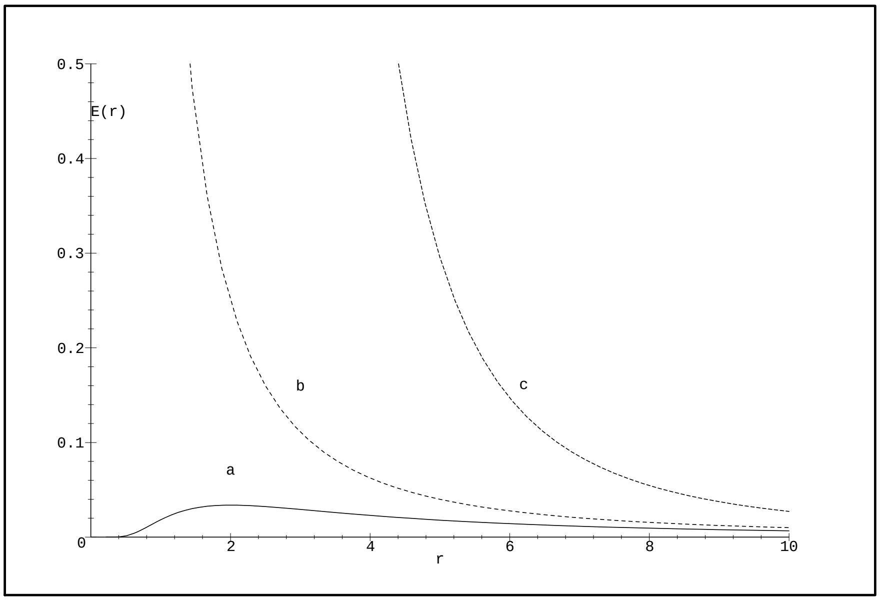

Abbildung 5.23: Die Funktion $1/R(r)^2$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ für verschiedene Werte des Parameters ϕ_0: (a) $\phi_0 = -4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = 10$

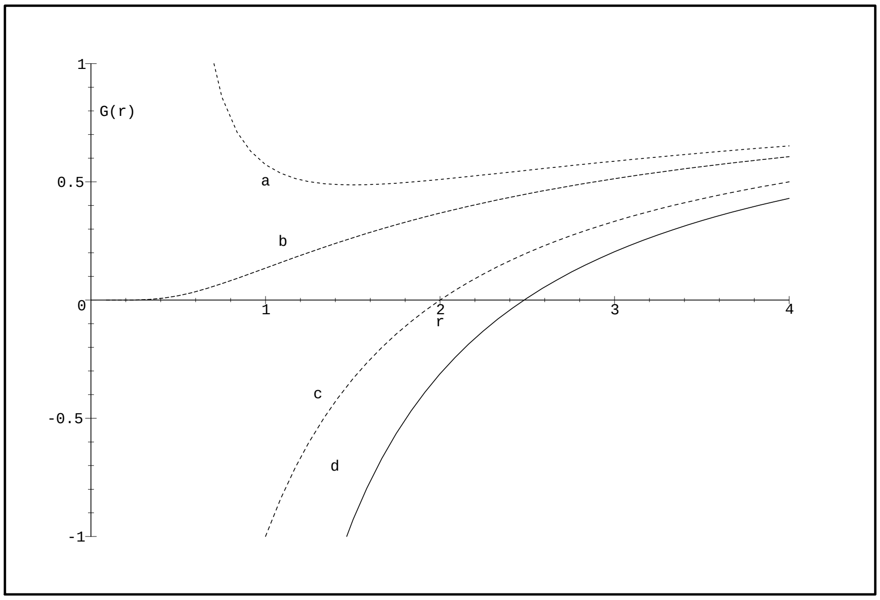

Abbildung 5.24: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ für $M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -3$, (b) $\phi_0 = -2$, (c) $\phi_0 = 0$, (d) $\phi_0 = 1$

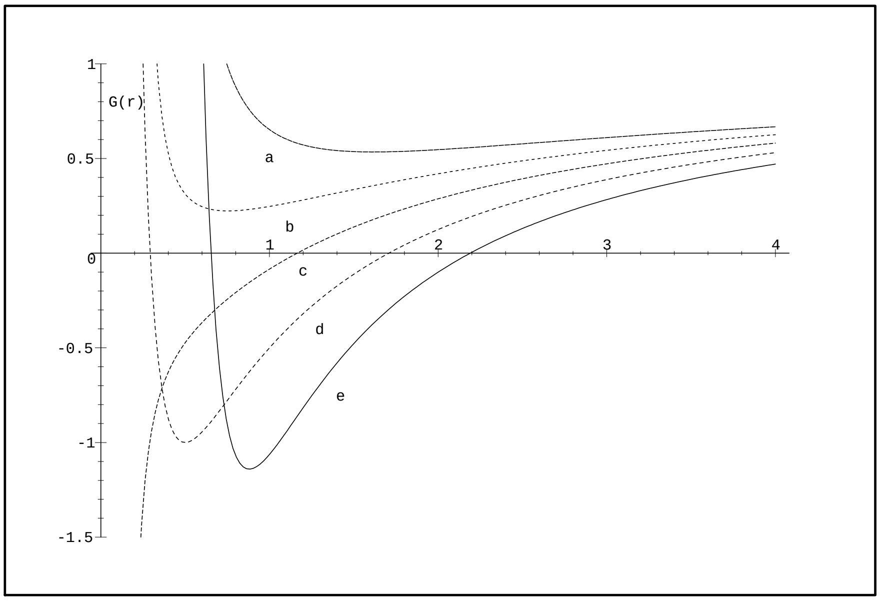

Abbildung 5.25: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ für $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -3$, (b) $\phi_0 = -2$, (c) $\phi_0 = -1$, (d) $\phi_0 = 0$, (e) $\phi_0 = 1$

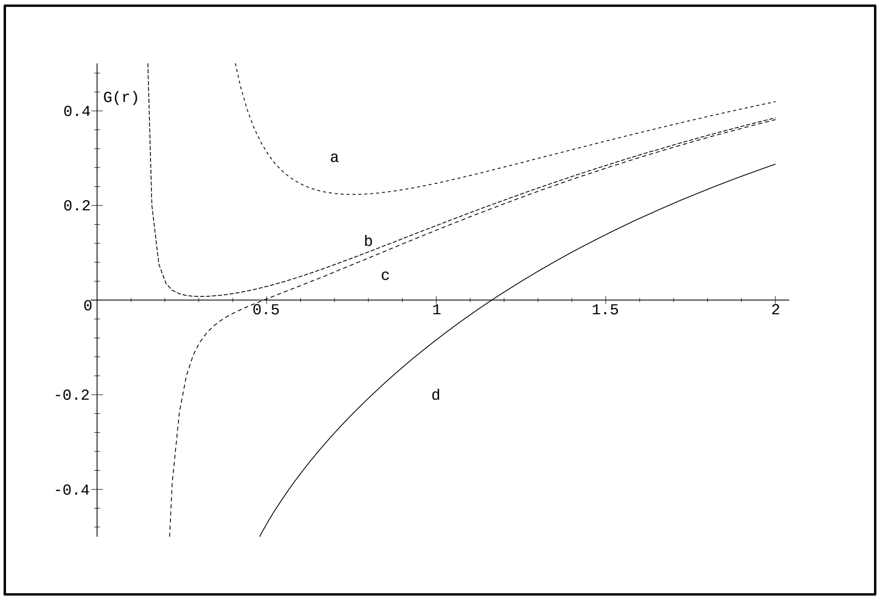

Abbildung 5.26: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ in einer Ausschnittsvergrößerung für $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -2$, (b) $\phi_0 = -1,73$, (c) $\phi_0 = -1,7$, (d) $\phi_0 = -1$

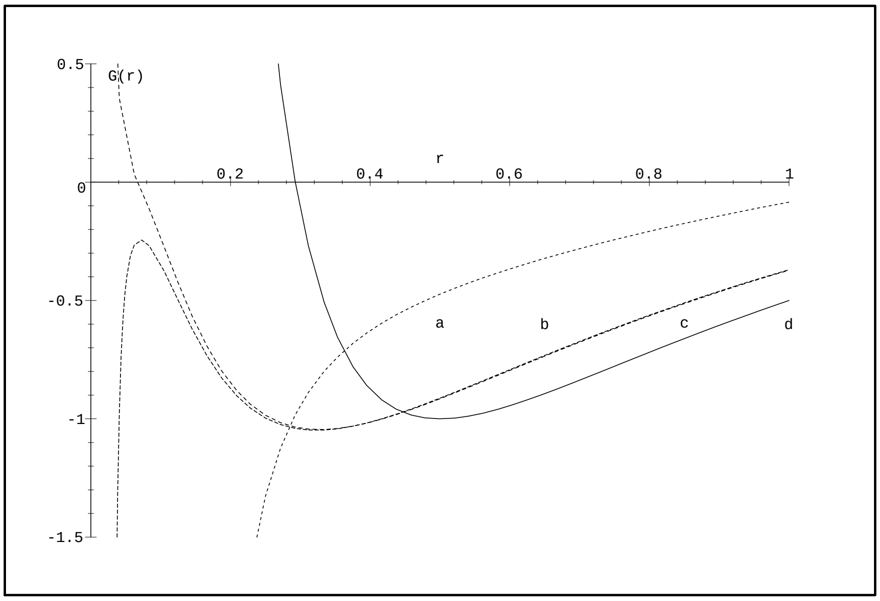

Abbildung 5.27: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ in einer Ausschnittsvergrößerung für $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -1$, (b) $\phi_0 = -0,275$, (c) $\phi_0 = -0,27$, (d) $\phi_0 = 0$

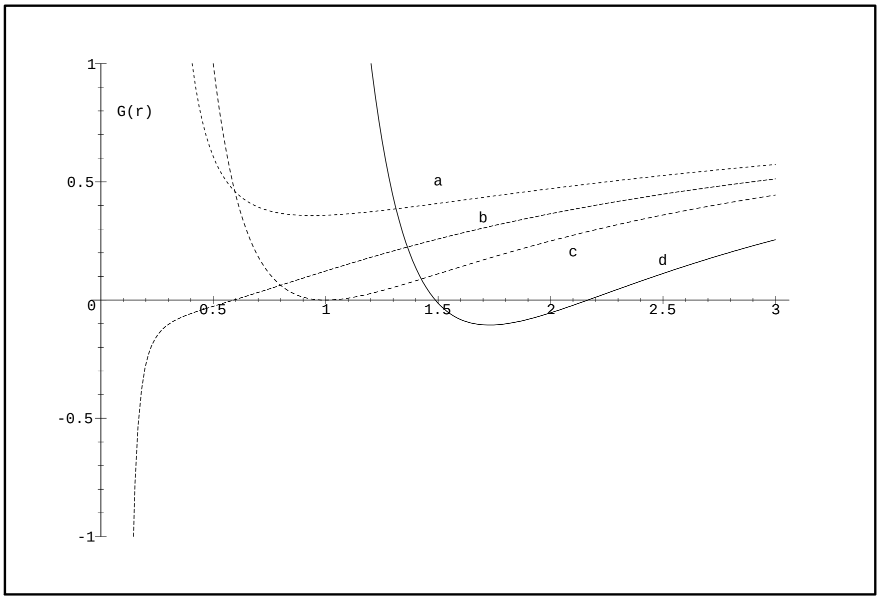

Abbildung 5.28: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ für $M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -2$, (b) $\phi_0 = -1$, (c) $\phi_0 = 0$, (d) $\phi_0 = 2$

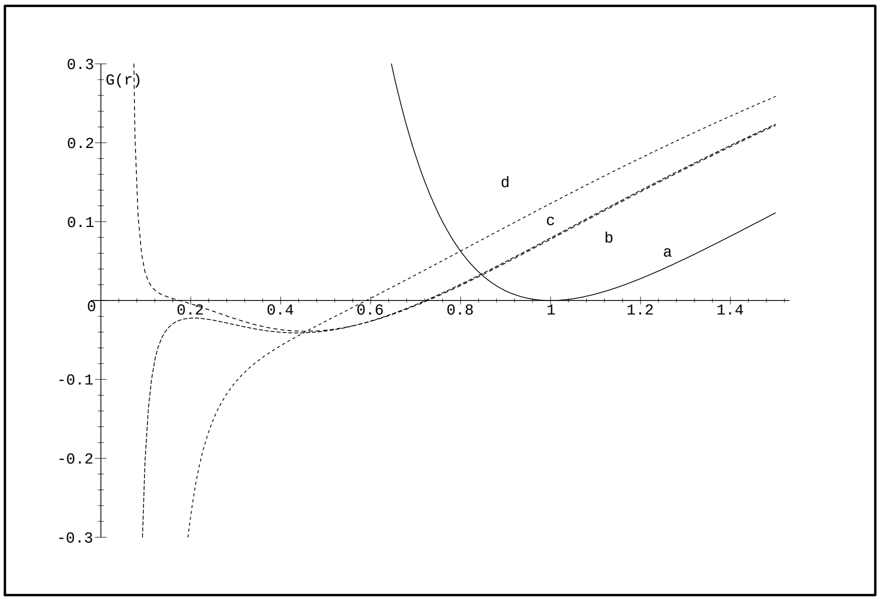

Abbildung 5.29: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ in einer Ausschnittsvergrößerung für $M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 0$, (b) $\phi_0 = -0,75$, (c) $\phi_0 = -0,76$, (d) $\phi_0 = -1$

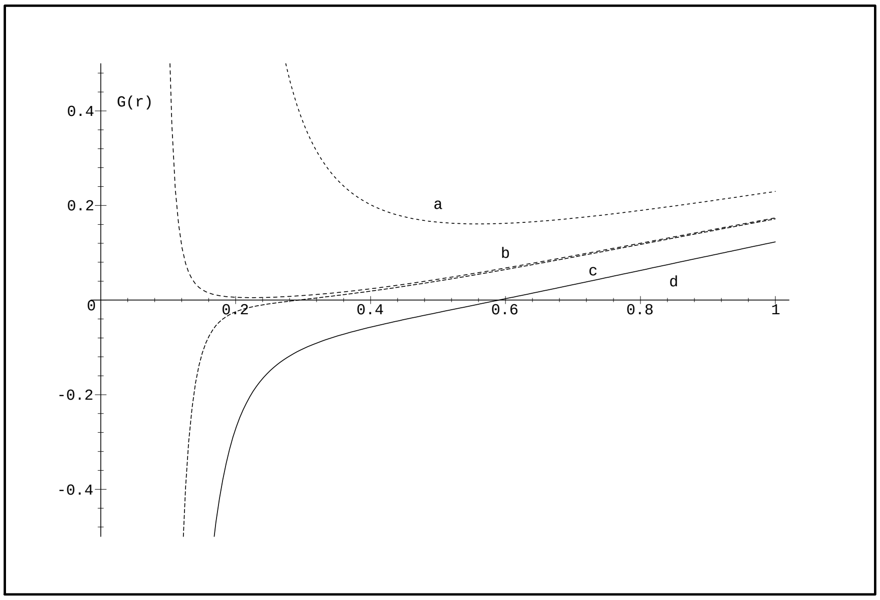

Abbildung 5.30: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ in einer Ausschnittsvergrößerung für $M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0:$\phi_0 = -1,5$(a),$\phi_0 = -1,25$(b),$\phi_0 = -1,24$(c),$\phi_0 = -1$(d)

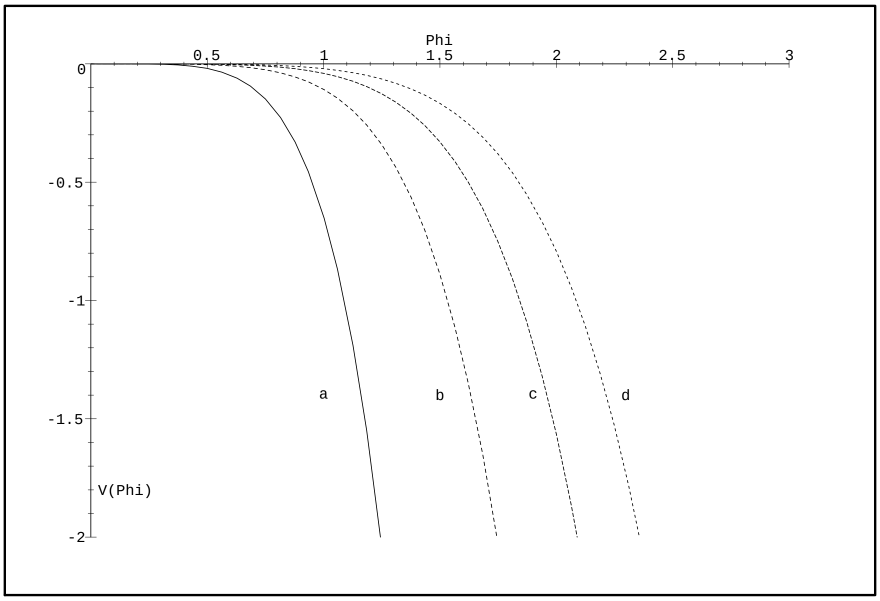

Abbildung 5.31: Die Funktion $V(\phi)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ für $M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 1$, (b) $\phi_0 = 2$, (c) $\phi_0 = 3$, (d) $\phi_0 = 4$

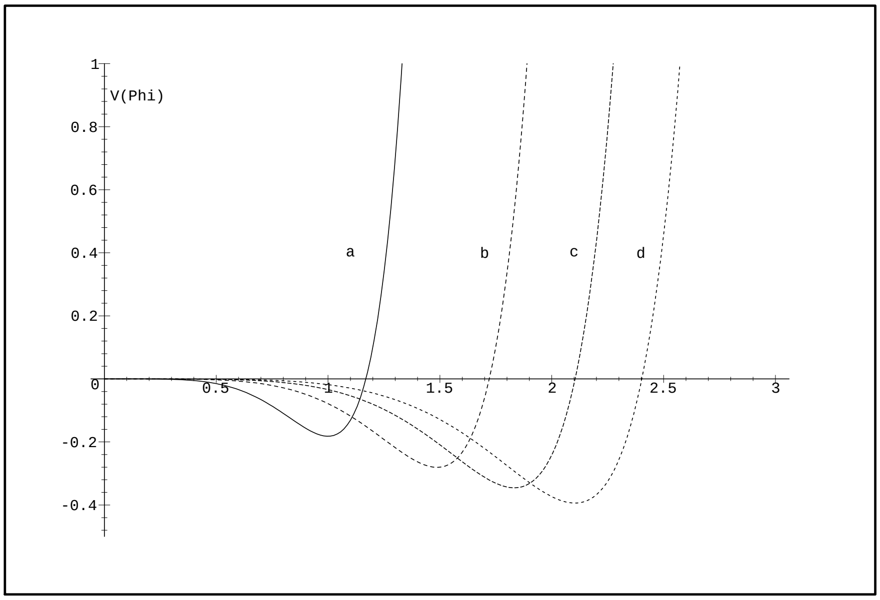

Abbildung 5.32: Die Funktion $V(\phi)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ für $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 1$, (b) $\phi_0 = 2$, (c) $\phi_0 = 3$, (d) $\phi_0 = 4$

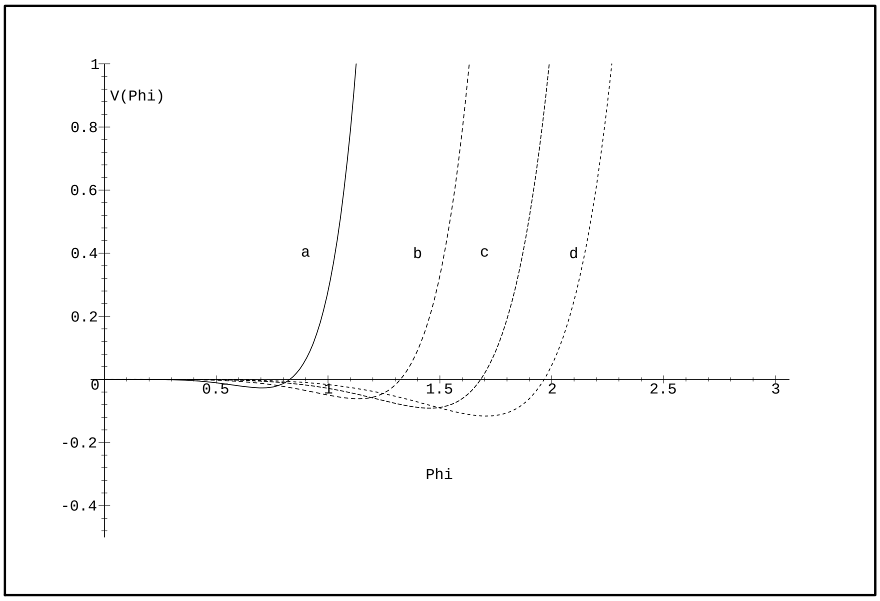

Abbildung 5.33: Die Funktion $V(\phi)$ des Ansatzes $\phi = \phi_0/r$ für $M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 1$, (b) $\phi_0 = 2$, (c) $\phi_0 = 3$, (d) $\phi_0 = 4$

5.4.3 Der Ansatz $\phi = \phi_0 \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$

Ein weiterer Ansatz für ϕ, der die Differentialgleichung zwischen R und ϕ löst, ist:

$$\phi = \phi_0 \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$$

Das asymptotische Verhalten des Skalarfeldes erfüllt durch den führenden Term mit der Ordnung $1/r$ die Forderung nach endlicher Energie. Mit diesem Ansatz lautet die Differentialgleichung (3.17)

$$R(r)'' = \frac{1}{4} R(r) \phi_0^2 \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r+r_1)^2 (r+r_2)^2}$$

Daraus erhält man als Lösung für R:

$$\begin{aligned} R(r) &= ((r+r_1)(r+r_2))^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\phi_0^2})} \cdot \\ &\quad \left(c_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{r+r_1}\right)^{\sqrt{1+\phi_0^2}} + c_2 \left(\frac{r_1 - r_2}{r+r_2}\right)^{\sqrt{1+\phi_0^2}} \right) \\ &= \sqrt{(r+r_1)(r+r_2)} \left(c_1 (r_2 - r_1)^{\sqrt{1+\phi_0^2}} \left(\frac{r+r_2}{r+r_1}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{1+\phi_0^2}} \right. \\ &\quad \left. + c_2 (r_1 - r_2)^{\sqrt{1+\phi_0^2}} \left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{1+\phi_0^2}} \right) \end{aligned}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 werden wieder durch die Randbedingungen fixiert. Zuerst wird durch eine Koordinatentransformation die Konstante c_2 zum Verschwinden gebracht. Dazu wird in folgender Weise skaliert:

$$r' = r \left(\frac{1}{c_2 (r_1 - r_2)^{\sqrt{1+\phi_0^2}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1+\phi_0^2}+1}}$$

Damit die Transfomation konform ist, wird die Zeitkoordinate entsprechend mit dem inversen Faktor multipliziert:

$$t' = t \left(\frac{1}{c_2 (r_1 - r_2)^{\sqrt{1+\phi_0^2}}} \right)^{-\frac{1}{\sqrt{1+\phi_0^2}+1}}$$

Die Auswirkungen der Transformation auf die Konstanten wird durch deren Neudefinition absorbiert:

$$\begin{aligned} r_1' &= r_1 \left(\frac{1}{c_2 (r_1 - r_2)^{\sqrt{1+\phi_0^2}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1+\phi_0^2}+1}} \\ r_2' &= r_2 \left(\frac{1}{c_2 (r_1 - r_2)^{\sqrt{1+\phi_0^2}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1+\phi_0^2}+1}} \\ c &= \frac{c_1}{c_2} \left(\frac{(r_2 - r_1)}{(r_1 - r_2)} \right)^{\sqrt{1+\phi_0^2}} \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktion R, die transformierten Größen gleich umbenannt:

$$R(r) = \sqrt{(r+r_1)(r+r_2)}\left(c\left(\frac{r+r_2}{r+r_1}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{1+\phi_0^2}} + \left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{1+\phi_0^2}}\right)$$

Die asymptotische Entwicklung für R ergibt:

$$\begin{aligned} R &\stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} (1+c)\,r + O(1) \\ &\stackrel{!}{\longrightarrow} r \end{aligned}$$

Daraus folgt $c = 0$. Damit vereinfacht sich R nach Einsetzen:

$$R(r) = \sqrt{(r+r_1)(r+r_2)}\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{1+\phi_0^2}}$$

Die beiden Parameter r_1 und r_2 geben den Ort der Nullstelle bzw. der Singularität im Funktionsverlauf von R an. Zwischen den beiden Punkten wird der Funktionswert imaginär. Es besteht noch die Freiheit der Wahl des Koordinatenursprungs. Mit dieser Eichfreiheit läßt sich ein Parameter zu Null wählen. Gleichzeitig sind durch die Freiheit in der Wahl des Vorzeichens der Wurzel die beiden Parameter in ihren qualitativen Auswirkungen austauschbar.

In den Abbildungen 5.34 und 5.35 sind die Metrikfunktion R für $r_1 = 0$ graphisch dargestellt. Das qualitative Verhalten ist in beiden Fällen gleich. Der Verlauf von R bleibt monoton steigend, wenn sich die Funktion auch für kleine r und großen Parameterwerten nur langsamer von der r-Achse entfernt. Weiterhin wäre zu sagen, das der quantitative Einfluß des Parameters ϕ_0 größer ist.

Um sich ein Bild von dem Verlauf der elektromagnetischen Feldstärken machen zu können, sind in den Abbildungen 5.36 und 5.37 die Funktion $1/R^2$ aufgetragen. Die aus den Komponenten des Feldstärketensors, welche über 5.1 und 5.2 aus R folgen, bestimmten elektrischen bzw. magnetischen Felder weisen qualitativ dasselbe Verhalten wie die dargestellte Funktion auf.

In den Abbildungen 5.38 und 5.39 ist nun der Parameter r_2 zu Null gesetzt. Hier ist die Metrikfunktion nur noch für den Fall des verschwindenen Skalarfeldes monoton steigend. In den anderen Fällen fällt R aus dem positiv Unendlichen bis zu einem Minimum, um sich dann asymptotisch der Geraden $R = r$ anzunähern. Auch ist der qualitative Einfluß der beiden Parameter wesentlich stärker.

Auch die elektromagnetischen Feldstärken weisen somit ein anderes Verhalten auf. In Abb. 5.40 und 5.41 ist der Verlauf von $1/R^2$ graphisch dargestellt.

Aus der Metrikfunktion R wird über die Integralgleichung (5.4) die Funktion $G(r)$ bestimmt.

$$G = R^2\int_r^\infty d\tilde{r}\,\frac{2\tilde{r}-C_M}{R^4} + 4Q^2R^2\int_r^\infty d\tilde{r}\,\frac{1}{R^4}\int_{\tilde{r}}^\infty d\tilde{\tilde{r}}\,R^{-2}$$

Da die Ergebnisse der Integralberechnungen kompliziert sind, sollen die Integrale getrennt berechnet und angeführt werden. Hierbei wird zu besseren Übersichtlichkeit die Abkürzung

$$w = \sqrt{1+\phi_0^2}$$

eingeführt.

Als erstes soll das einfachste Integral berechnet werden.

$$\begin{aligned} Int_1 &= -C_M \int_r^\infty d\tilde{r}\, R(r)^{-4} \\ &= \frac{C_M}{w(2w+1)(2w-1)(r+r_1)(r+r_2)(r_1-r_2)^3} \cdot \\ &\quad \left[\left(\frac{r+r_2}{r+r_1}\right)^{2w} ((r+r_1)(r+r_2) + w(r_1-r_2)(2r+r_1+r_2+2w(r_1-r_2)) \right. \\ &\quad \left. -(r+r_1)(r+r_2) \right] \end{aligned}$$

Das nächste Integral lautet:

$$\begin{aligned} Int_2 &= \int_r^\infty d\tilde{r}\, \frac{2r}{R(r)^4} \\ &= \frac{-1}{w(2w+1)(2w-1)(r+r_1)(r+r_2)(r_1-r_2)^3} \cdot \\ &\quad \left[\left(\frac{r+r_2}{r+r_1}\right)^{2w} (4w^2 r(r_1-r_2)^2 + 2w(r_1-r_2)(r^2-r_1r_2) \right. \\ &\quad -(r+r_1)(r+r_2)(r_1+r_2)) \\ &\quad \left. +(r+r_1)(r+r_2)(r_1+r_2) - 2w(r+r_1)(r+r_2)(r_1-r_2) \right] \end{aligned}$$

Zur Berechnung des noch verbliebenden Integral muß erst das innere Integral berechnet werden:

$$\int_r^\infty d\tilde{r}\, R(r)^{-2} = \frac{1-(\frac{r+r_2}{r+r_1})^w}{w(r_1-r_2)}$$

Somit lautet das fehlende Integral:

$$\begin{aligned} Int_3 &= \frac{4Q^2}{w(r_1-r_2)} \int_r^\infty d\tilde{r}\, \frac{(\frac{r+r_2}{r+r_1})^{2w} - (\frac{r+r_2}{r+r_1})^{3w}}{(r+r_1)^2(r+r_2)^2} \\ &= \frac{4Q^2}{3w^2(3w+1)(3w-1)(2w+1)(2w-1)(r+r_1)(r+r_2)(r_1-r_2)^4} \cdot \\ &\quad \left[(19w^2-1)(r+r_1)(r+r_2) \right. \\ &\quad - \left(\frac{r+r_2}{r+r_1}\right)^{2w} \left(3(3w+1)(3w-1)\left(2w^2(r_1-r_2)^2\right.\right. \\ &\quad \left.\left. +w(r_1-r_2)(2r+r_1+r_2) + (r+r_1)(r+r_2)\right)\right) \\ &\quad + \left(\frac{r+r_2}{r+r_1}\right)^{3w} \left((2w+1)(2w-1)\left(9w^2(r_1-r_2)^2\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. +3w(r_1-r_2)(2r+r_1+r_2) + 2(r+r_1)(r+r_2)\right)\right)\right] \end{aligned}$$

Die Metrikfunktion G bestimmt sich dann zu:

$$\begin{aligned} G(r) &= R(r)^2(Int_1 + Int_2 + Int_3) \\ &= \frac{(r+r_1)^{w+1}(r+r_2)^{-w+1}}{w(2w+1)(2w-1)(r_1-r_2)^3} \cdot \left(2w(r_1-r_2) - r_1 - r_2 - C_M \right. \\ &\quad \left. + \frac{4Q^2\left(19w^2-1\right)}{3w(3w+1)(3w-1)(r_1-r_2)}\right) \\ &\quad + \frac{(r+r_1)^{-w}(r+r_2)^w}{w(2w+1)(2w-1)(r_1-r_2)^3} \cdot \left(C_M\left((r+r_1)(r+r_2)\right.\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+w(r_1-r_2)(2r+r_1+r_2+2w(r_1-r_2)))-4w^2r(r_1-r_2)^2\\
&-2w(r_1-r_2)(r^2-r_1r_2)+(r_1+r_2)(r+r_1)(r+r_2)\\
&-\frac{4Q^2}{w(r_1-r_2)}\left(2w^2(r_1-r_2)^2+w(r_1-r_2)(2r+r_1+r_2)+(r+r_1)(r+r_2)\right)\Big)\\
&+\frac{4Q^2(r+r_1)^{-2w}(r+r_2)^{-2w}}{3w^2(3w+1)(3w-1)(r_1-r_2)^4}\cdot\left(9w^2(r_1-r_2)^2\right.\\
&\left.+3w(r_1-r_2)(2r+r_1+r_2)+2(r+r_1)(r+r_2)\right)
\end{aligned}
$$

Nach Vergleich des asymptotischen Verhaltens mit der Schwarzschildlösung muß die Massenkonstante geändert werden zu:

$$C_M = 6M - \sqrt{1+\phi_0^2}(r_1-r_2)-(r_1+r_2)$$

In dieser Lösung ist der Übergang zur Buchdahllösung wiederzufinden. Setzt man die Ladung $Q = 0$, verschiebt die Radialkoordinate indem man $r_2 = 0$ setzt, so erhält man unter Wahl von $w = 2M/r_1$ die Buchdahllösung:

$$G_{Bu} = \left(\frac{r+r_1}{r}\right)^{-\frac{2M}{r_1}}$$

Die Verschiebung der Radialkoordinate ist immer möglich. Sie ändert nichts an dem qualitativen Verlauf der Metrikfunktion, sondern nur die Wahl des Ortes der Singularität.

Weiterhin kann man die Rollen von r_1 und r_2 tauschen, indem man für die Wurzel das andere Vorzeichen gewählt wird.

Für die Graphen wird generell der Parameter r_2 zu Null gewählt.

Zum Verlauf der Metrikfunktion ist zu sagen, daß in allen Fällen durch genügend große Parameterwerte das Schwarze Loch zu einer nackten Singularität wird.

Auf die Angabe des Potentials, welches nach der Differentialgleichung (3.19) berechnet wird, soll hier verzichtet werden. Es ist jedoch anzumerken, daß da Potential für den Grenzfall der Buchdahllösung tatsächlich verschwindet.

In den Abbildungen 5.48 bis 5.59 sind die Potentiale in Abhängigkeit vom Radialparameter r und, nach Ersetzung von r mittels des invertierten Ansatzes in Abhängigkeit vom Skalarfeld dargestellt.

Bei der Darstellung in Abhängigkeit vom Skalarfeld ist das Potential noch nicht symmetrisch fortgesetzt worden, und überstreicht deswegen je nach Werten der Parameter nur ein Vorzeichen.

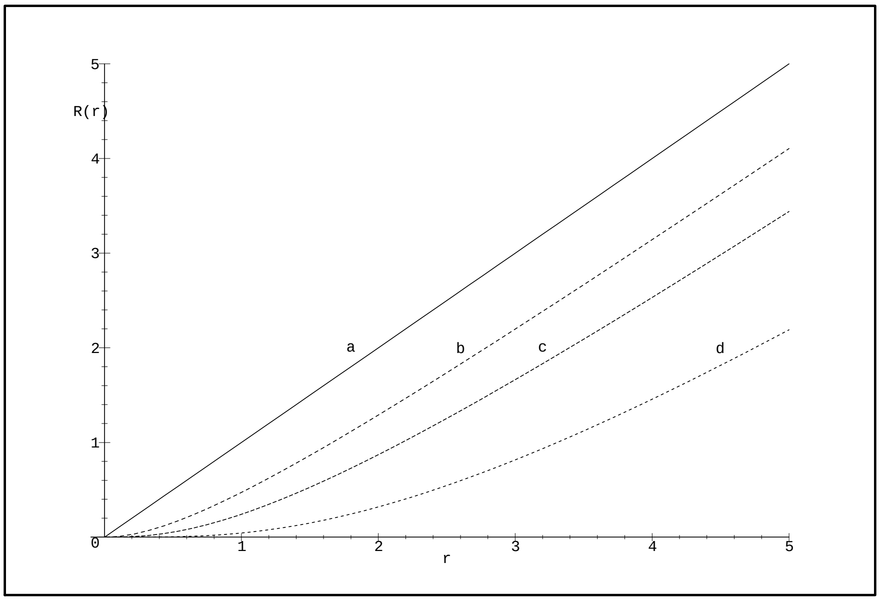

Abbildung 5.34: Die Funktion $R(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ und verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 0$, (b) $\phi_0 = 3$, (c) $\phi_0 = 5$, (d) $\phi_0 = 10$

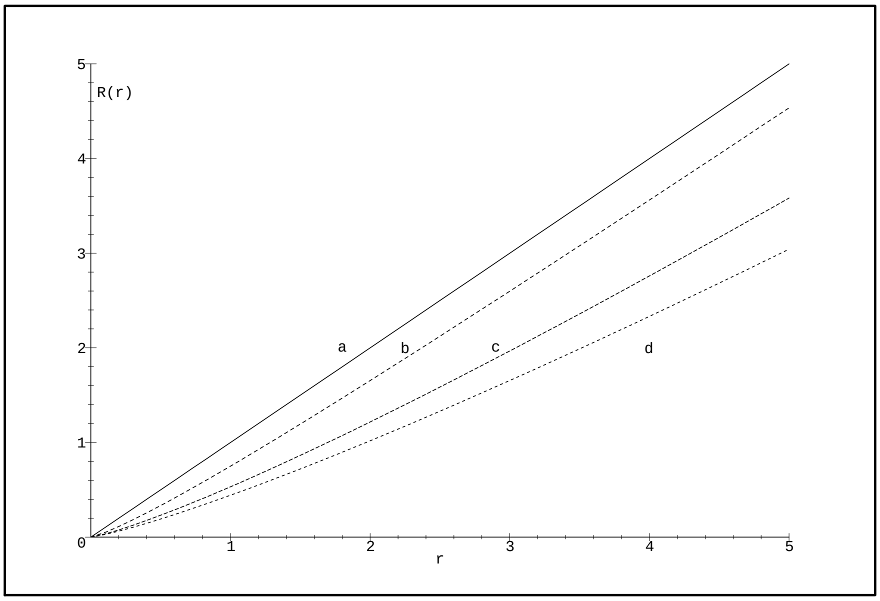

Abbildung 5.35: Die Funktion $R(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 0$, $\phi_0 = 1$ und verschiedenen Werten des Parameters r_2 : (a) $r_2 = 0$, (b) $r_2 = 3$, (c) $r_2 = 20$, (d) $r_2 = 50$

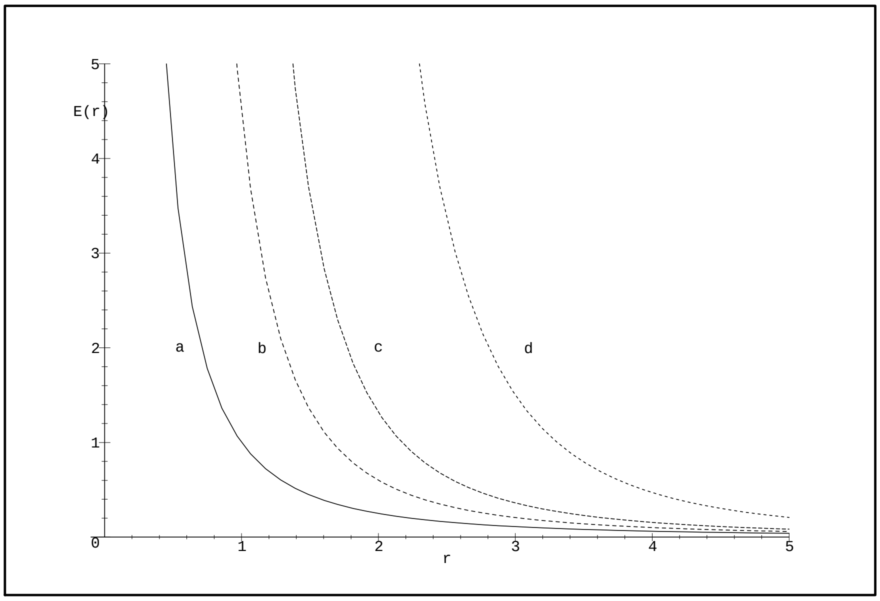

Abbildung 5.36: Die Funktion $1/R(r)^2$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ und verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 0$, (b) $\phi_0 = 3$, (c) $\phi_0 = 5$, (d) $\phi_0 = 10$

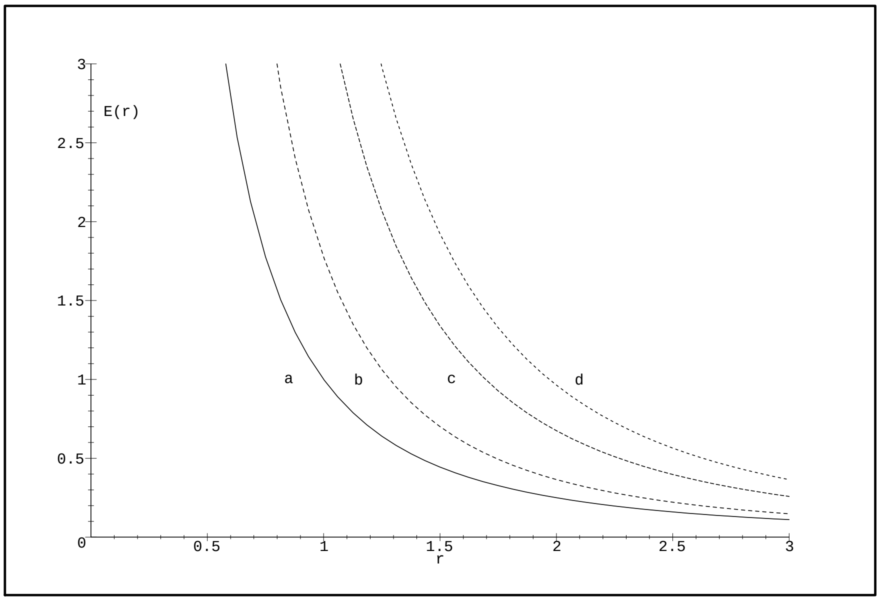

Abbildung 5.37: Die Funktion $1/R(r)^2$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 0$, $\phi_0 = 1$ und verschiedenen Werten des Parameters r_2 : (a) $r_2 = 0$, (b) $r_2 = 3$, (c) $r_2 = 20$, (d) $r_2 = 50$

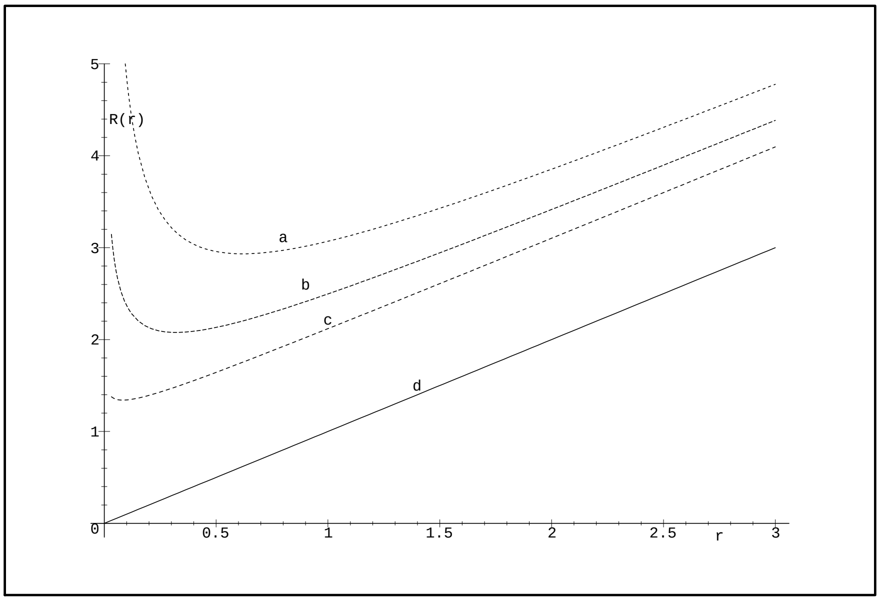

Abbildung 5.38: Die Funktion $R(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_2 = 0$, $r_1 = 1$ und verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 2$, (b) $\phi_0 = 1,3$, (c) $\phi_0 = 0,6$, (d) $\phi_0 = 0$

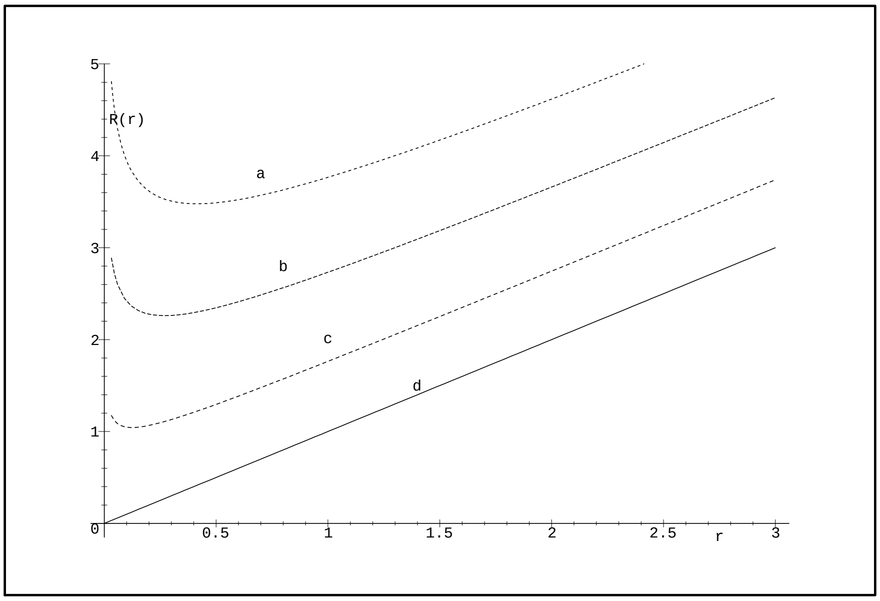

Abbildung 5.39: Die Funktion $R(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_2 = 0$, $\phi_0 = 1$ und verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = 2$, (b) $r_1 = 1,3$, (c) $r_1 = 0,6$, (d) $r_1 = 0$

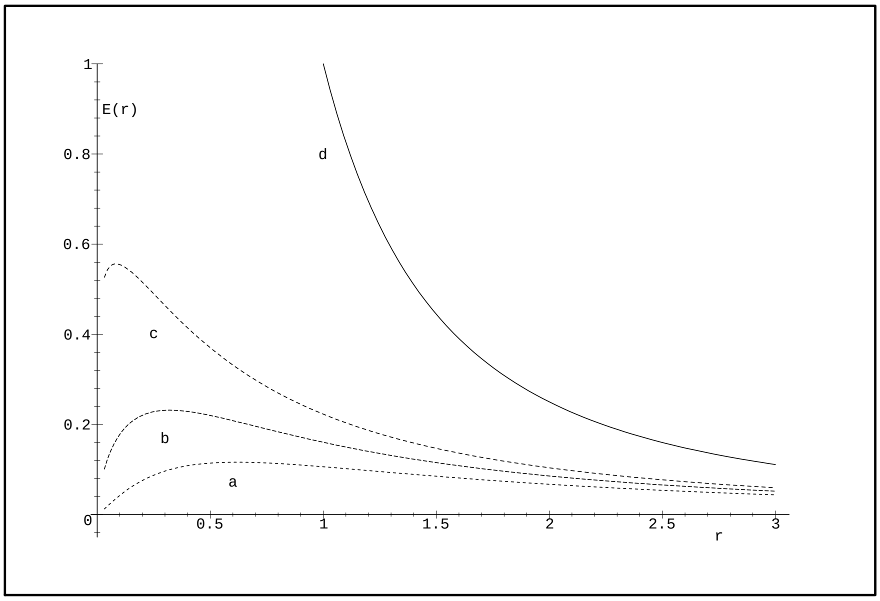

Abbildung 5.40: Die Funktion $1/R(r)^2$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_2 = 0$, $r_1 = 1$ und verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 2$, (b) $\phi_0 = 1,3$, (c) $\phi_0 = 0,6$, (d) $\phi_0 = 0$

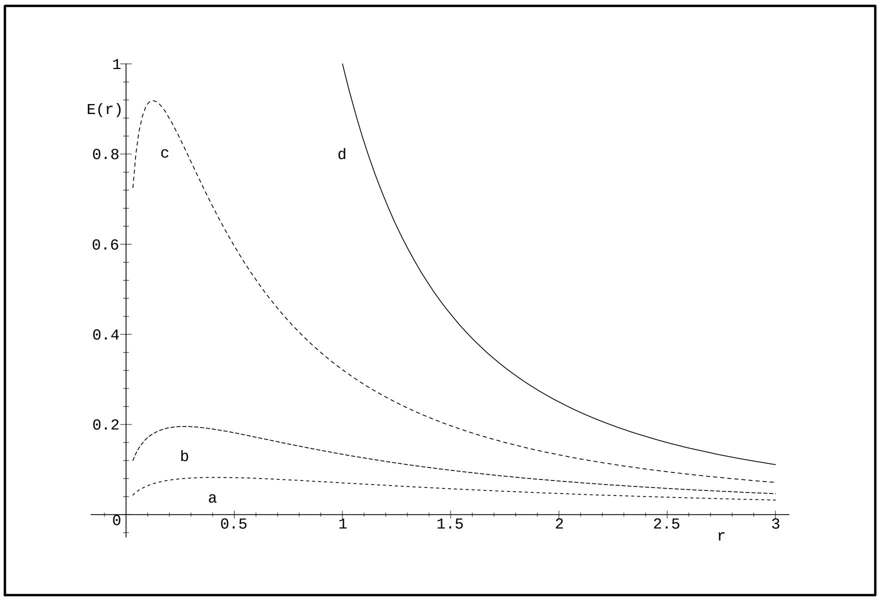

Abbildung 5.41: Die Funktion $1/R(r)^2$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_2 = 0$, $\phi_0 = 1$ und verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = 2$, (b) $r_1 = 1,3$, (c) $r_1 = 0,6$, (d) $r_1 = 0$

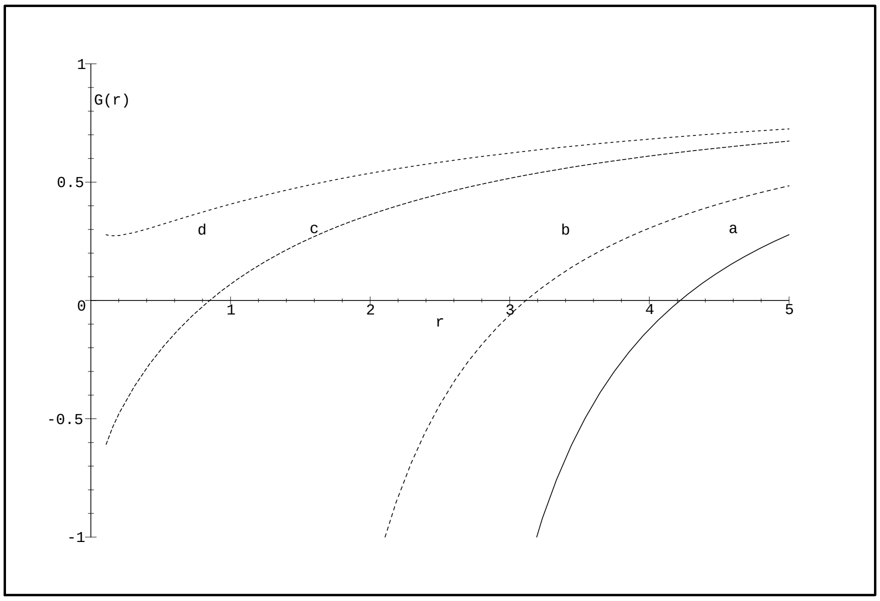

Abbildung 5.42: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $\phi_0 = 3/4, M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = -2$, (b) $r_1 = -1$, (c) $r_1 = 1$, (d) $r_1 = 2$

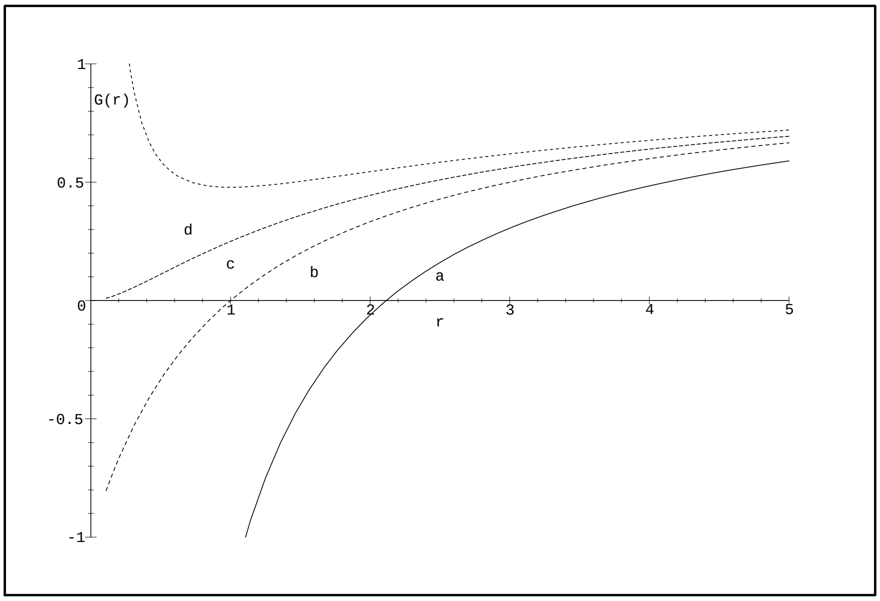

Abbildung 5.43: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 1, M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 3/4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = \sqrt{3}$, (d) $\phi_0 = \sqrt{8}$

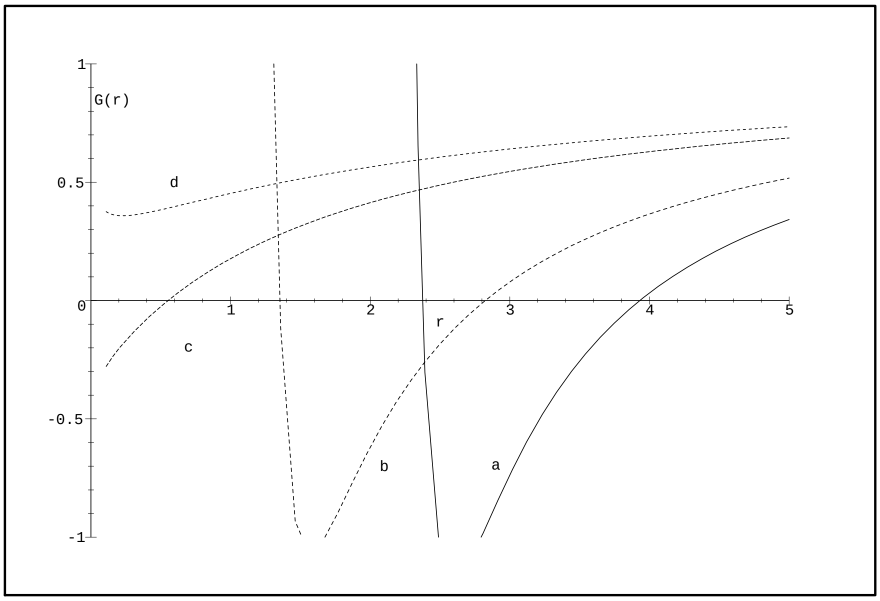

Abbildung 5.44: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $\phi_0 = 3/4$, $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = -2$, (b) $r_1 = -1$, (c) $r_1 = 1$, (d) $r_1 = 2$

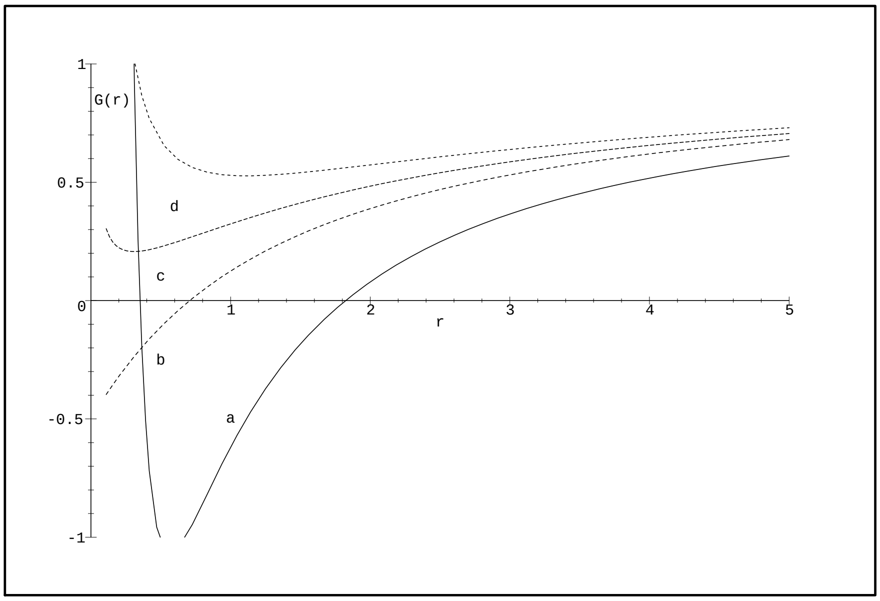

Abbildung 5.45: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 1$, $M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 3/4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = \sqrt{3}$, (d) $\phi_0 = \sqrt{8}$

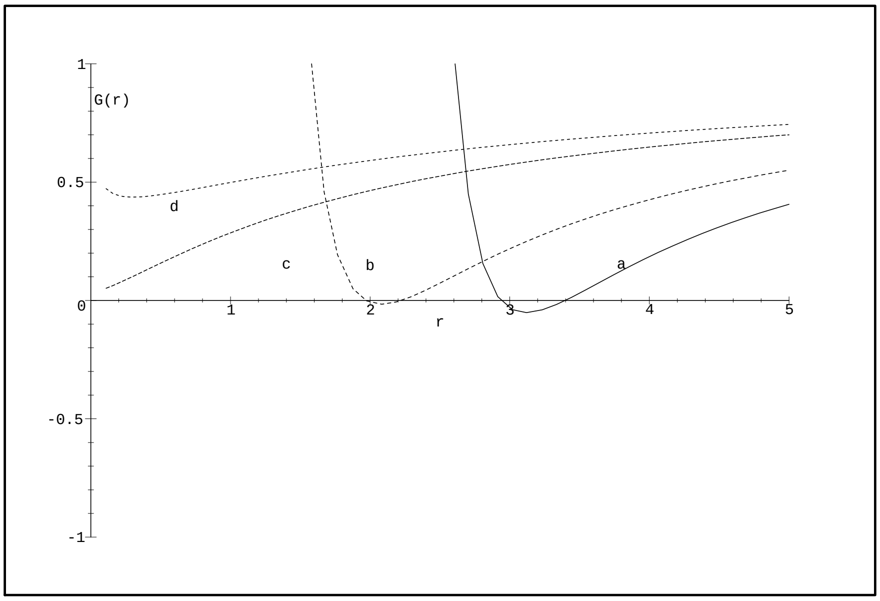

Abbildung 5.46: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln \left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $\phi_0 = 3/4, M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = -2$, (b) $r_1 = -1$, (c) $r_1 = 1$, (d) $r_1 = 2$

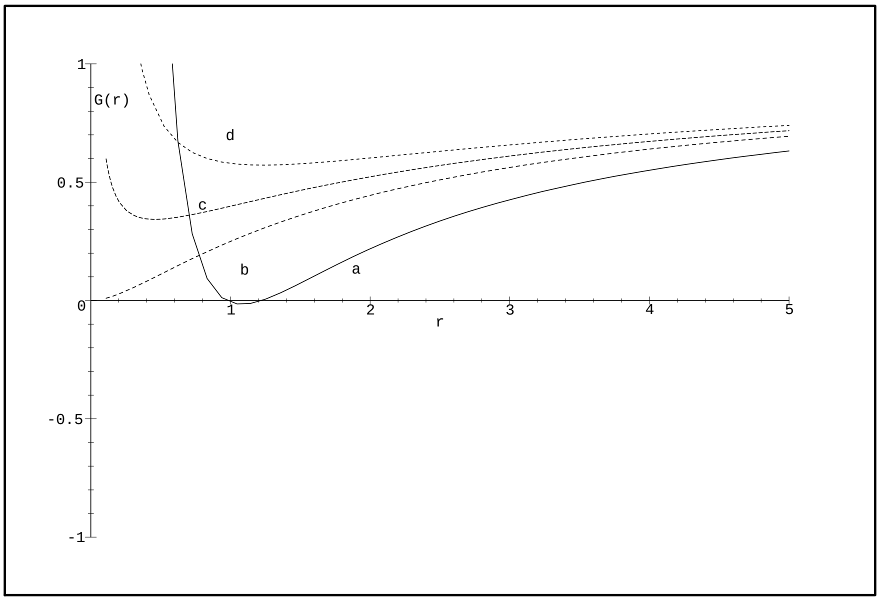

Abbildung 5.47: Die Funktion $G(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln \left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 1, M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 3/4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = \sqrt{3}$, (d) $\phi_0 = \sqrt{8}$

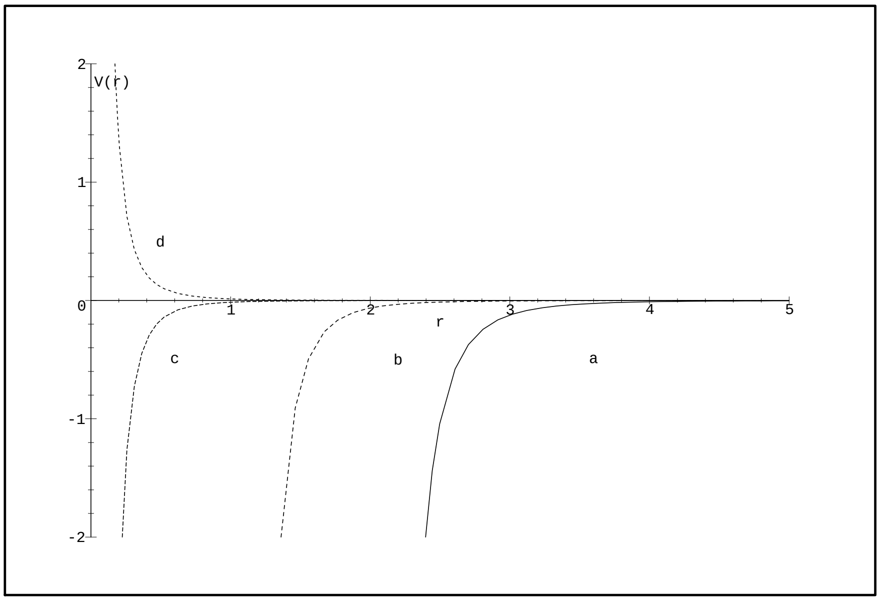

Abbildung 5.48: Die Funktion $V(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $\phi_0 = 3/4, M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = -2$, (b) $r_1 = -1$, (c) $r_1 = 1$, (d) $r_1 = 2$

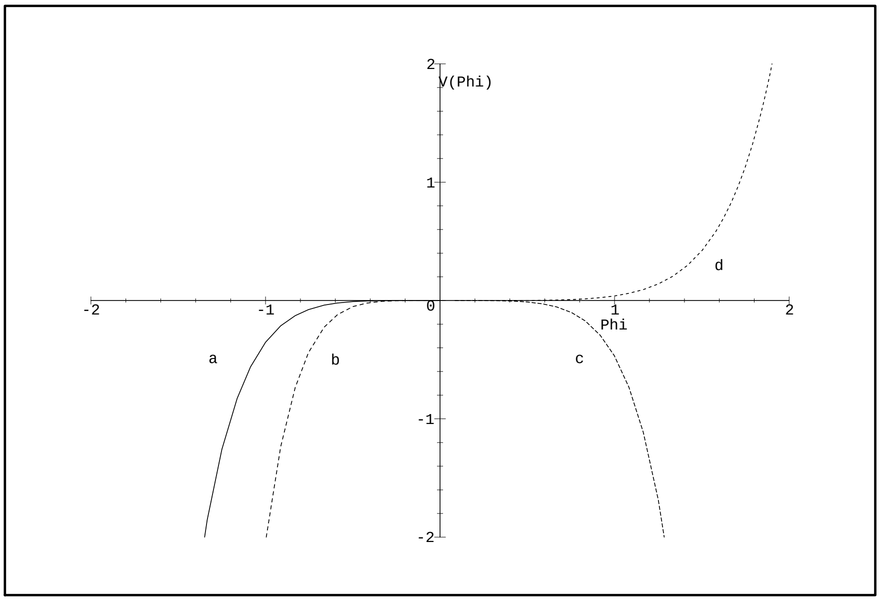

Abbildung 5.49: Die Funktion $V(\phi)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $\phi_0 = 3/4, M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = -2$, (b) $r_1 = -1$, (c) $r_1 = 1$, (d) $r_1 = 2$

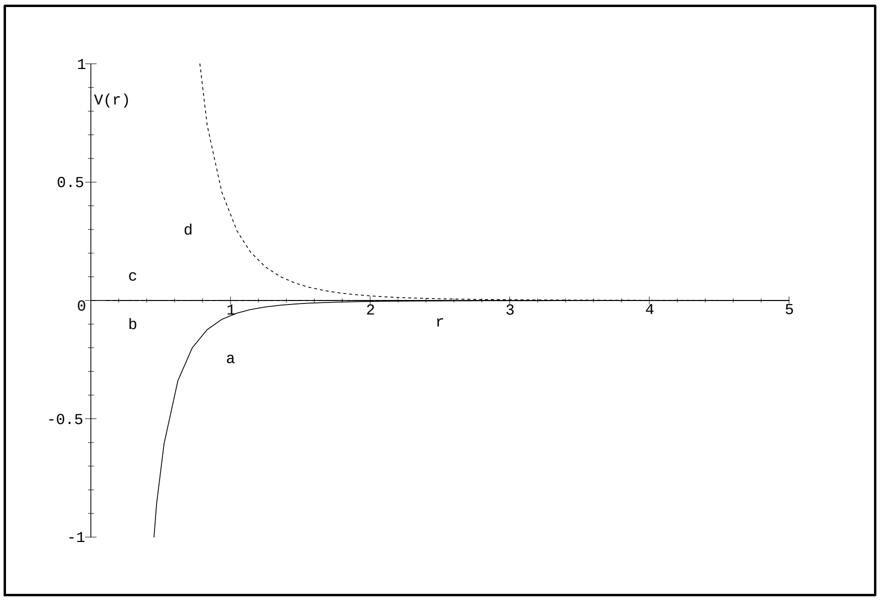

Abbildung 5.50: Die Funktion $V(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 1, M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 3/4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = \sqrt{3}$, (d) $\phi_0 = \sqrt{8}$

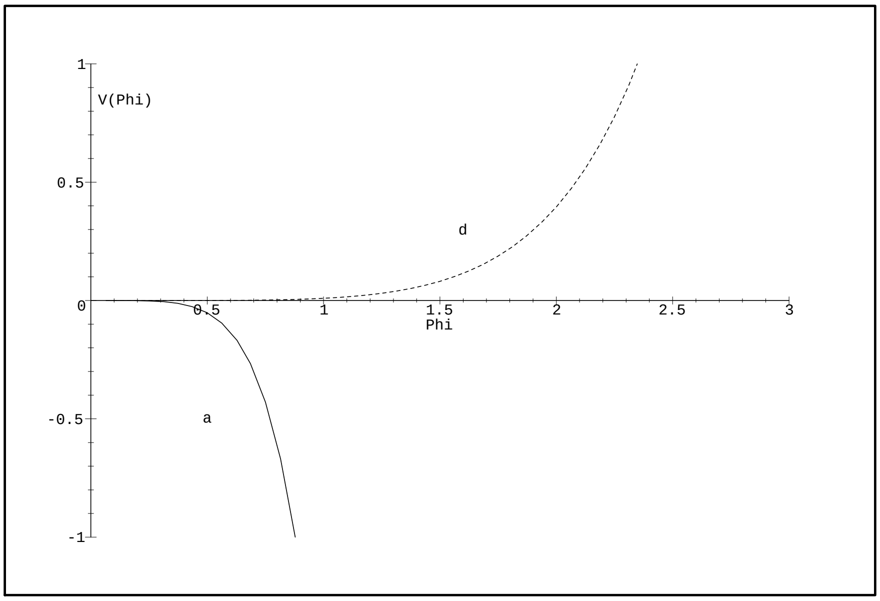

Abbildung 5.51: Die Funktion $V(\phi)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 1, M = 1$ und $Q = 0$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 3/4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = \sqrt{3}$, (d) $\phi_0 = \sqrt{8}$

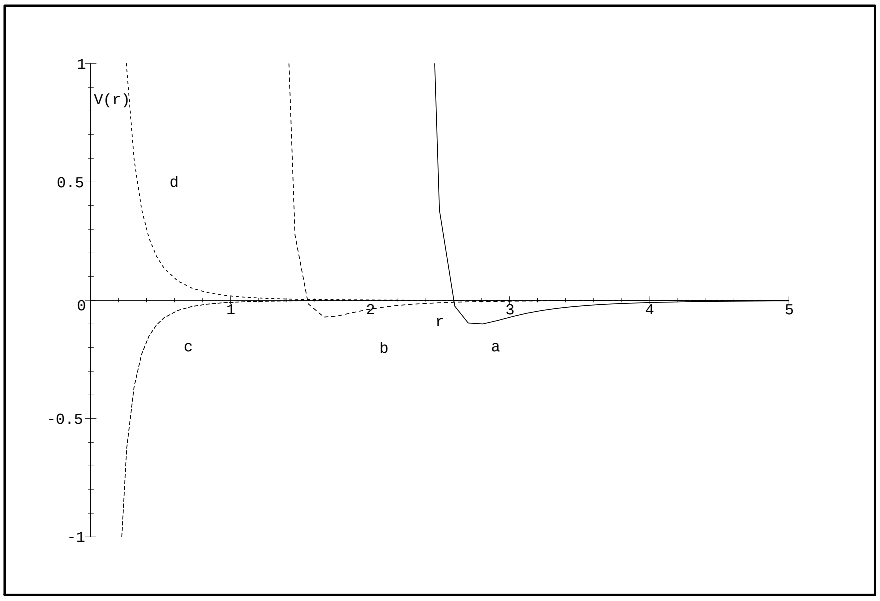

Abbildung 5.52: Die Funktion $V(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $\phi_0 = 3/4$,$M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = -2$, (b) $r_1 = -1$, (c) $r_1 = 1$, (d) $r_1 = 2$

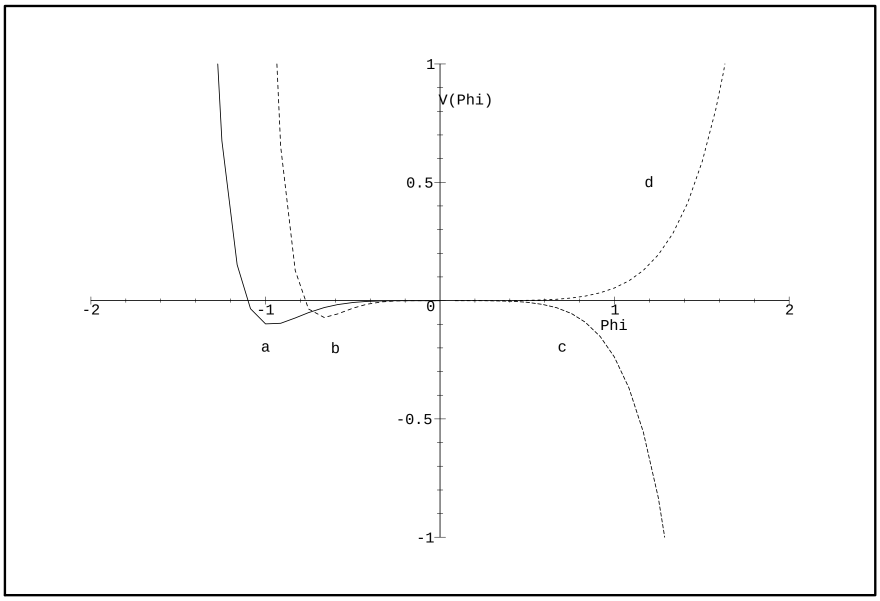

Abbildung 5.53: Die Funktion $V(\phi)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $\phi_0 = 3/4$,$M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = -2$, (b) $r_1 = -1$, (c) $r_1 = 1$, (d) $r_1 = 2$

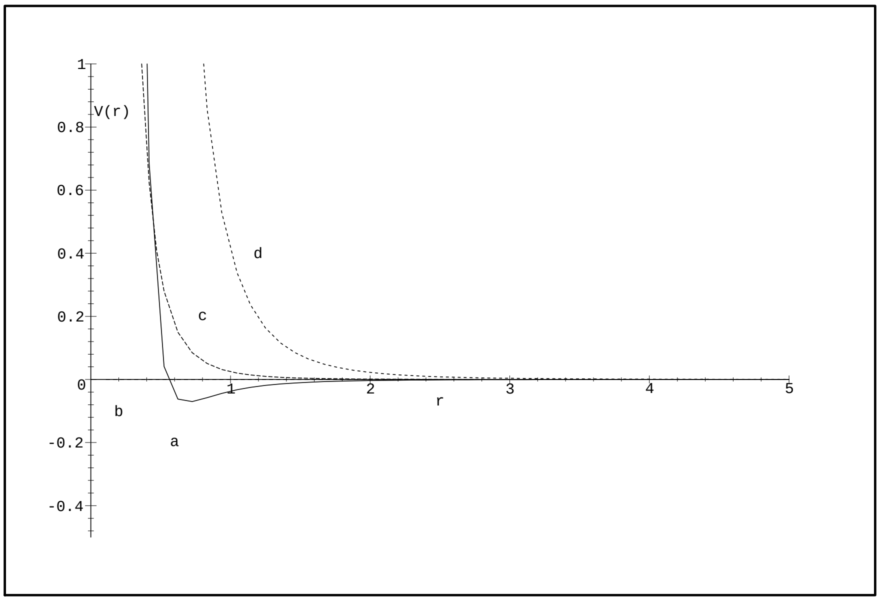

Abbildung 5.54: Die Funktion $V(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 1, M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 3/4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = \sqrt{3}$, (d) $\phi_0 = \sqrt{8}$

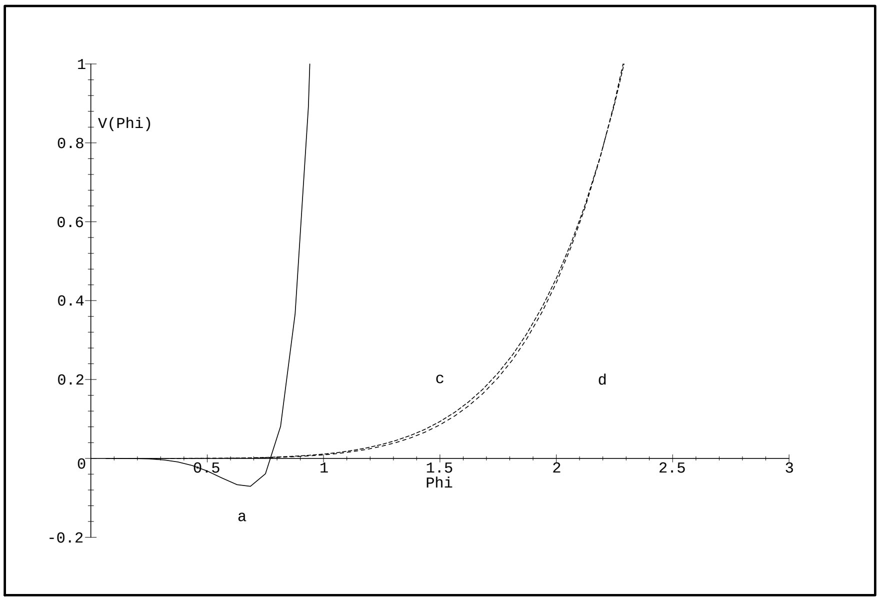

Abbildung 5.55: Die Funktion $V(\phi)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 1, M = 1$ und $Q = 1/\sqrt{2}$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 3/4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = \sqrt{3}$, (d) $\phi_0 = \sqrt{8}$

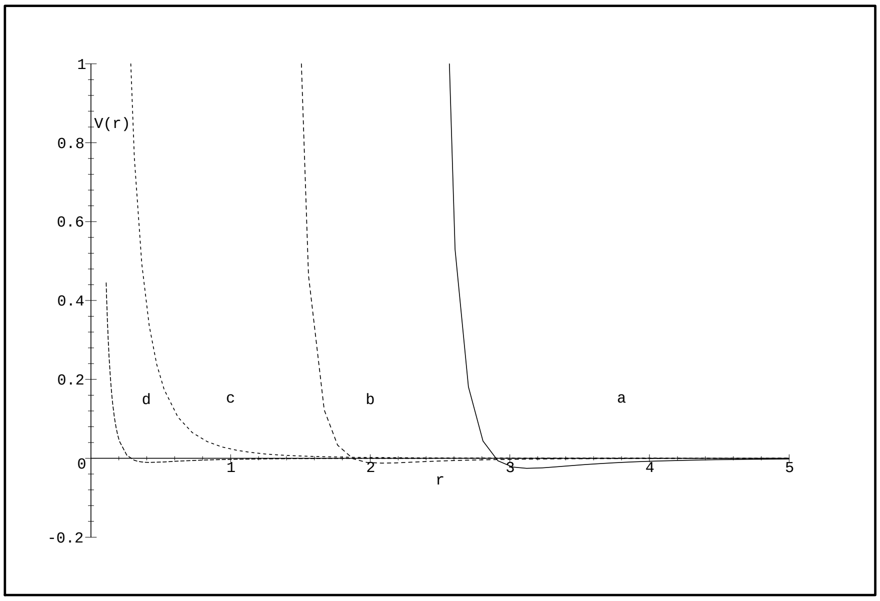

Abbildung 5.56: Die Funktion $V(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $\phi_0 = 3/4$,$M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = -2$, (b) $r_1 = -1$, (c) $r_1 = 1$, (d) $r_1 = 2$

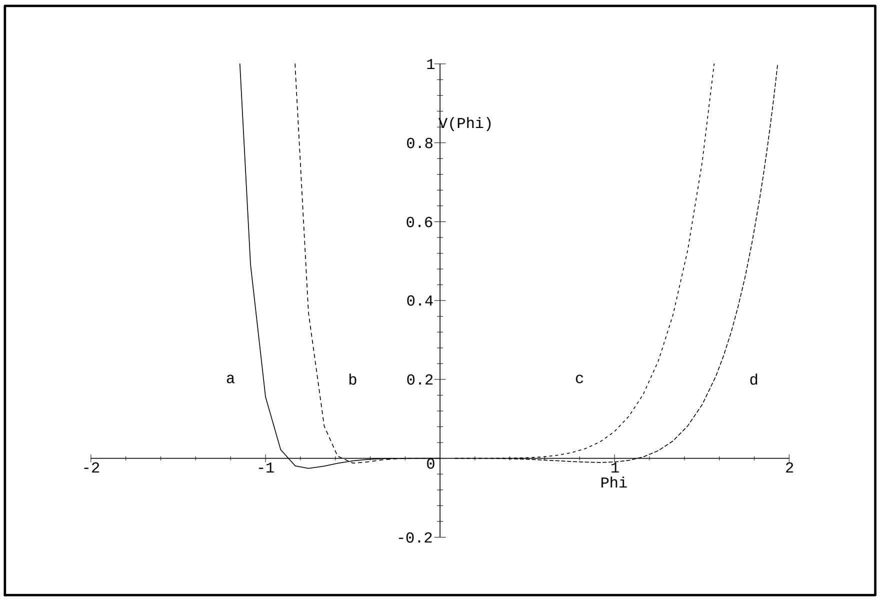

Abbildung 5.57: Die Funktion $V(\phi)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $\phi_0 = 3/4$,$M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters r_1 : (a) $r_1 = -2$, (b) $r_1 = -1$, (c) $r_1 = 1$, (d) $r_1 = 2$

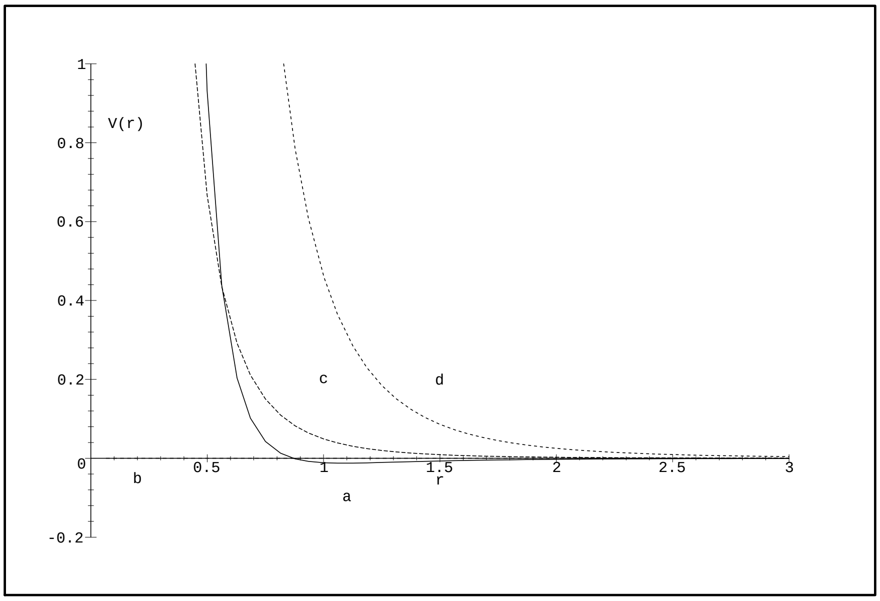

Abbildung 5.58: Die Funktion $V(r)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 1, M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 3/4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = \sqrt{3}$, (d) $\phi_0 = \sqrt{8}$

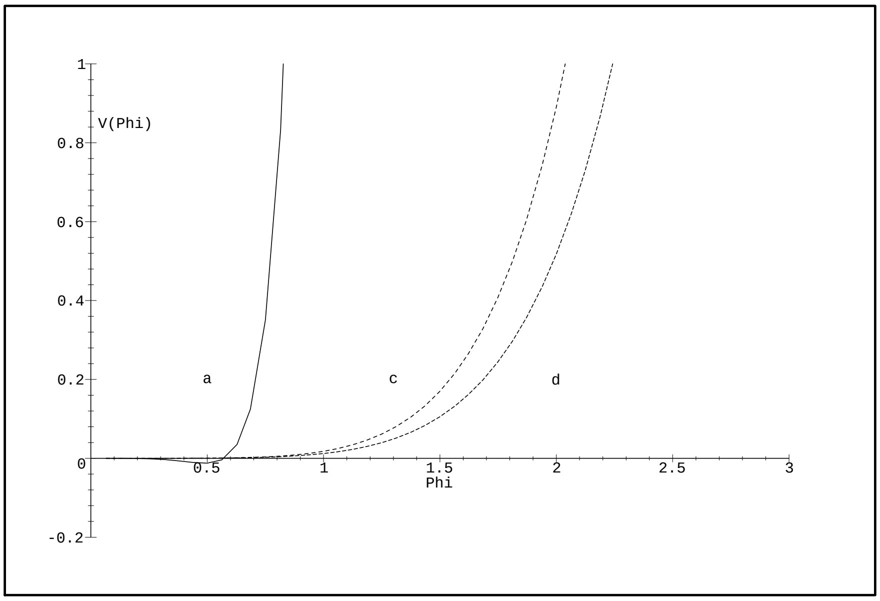

Abbildung 5.59: Die Funktion $V(\phi)$ des Ansatzes $\phi = |\phi_0| \ln\left(\frac{r+r_1}{r+r_2}\right)$ für $r_1 = 1, M = 1$ und $Q = 1$, sowie verschiedenen Werten des Parameters ϕ_0 : (a) $\phi_0 = 3/4$, (b) $\phi_0 = 0$, (c) $\phi_0 = \sqrt{3}$, (d) $\phi_0 = \sqrt{8}$

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden geladene Schwarze Löcher untersucht, an denen ein Skalarfeld mittels der Wirkung (3.1) koppelt. Das aus dieser Wirkung erhaltenen Gleichungssystem wurde untersucht und für Spezialfälle gelöst.

Zu diesen zählt eine allgemeine Lösung für ein wechselwirkungsfreies Skalarfeld, die eine zur Buchdahllösung [13] analoge Erweiterung für Schwarze Löcher mit Ladung darstellt.

Weiterhin konnte das Problem durch Ansätze für das selbstwechselwirkende Skalarfeld durch Ansätze gelöst werden. Dabei wurden zu zwei bekannten Skalarfeldansätzen zwei weitere gefunden. Zu all diesen Lösungen wurden über das Gleichungssystem die Metrik und das Potential berechnet.

Dabei ist besonders der Ansatz $\phi = \phi_0 \ln\left(\frac{r+r_0}{r}\right)$ herauszuheben, der wiederum die Buchdahllösung als Grenzfall enthält. Bei diesem Ansatz besteht die Möglichkeit, daß für einen analogen Ansatze mit mehr Parametern auch die im Laufe der Arbeit gefundene Erweiterung der Buchdahllösung als Grenzfall enthalten ist. Leider konnten die Untersuchungen in dieser Richtung aus Mangel an Zeit nicht fortgeführt werden.

Die Eigenschaften der aus den Ansätzen erhaltenen Potentiale stehen in Widerspruch zu bekannten No-Hair-Theoremen. So verletzen sie die Eingangsbedingung eines in dieser Arbeit zitierten Arguments von Bekenstein [10].

Literaturverzeichnis

[1] Olaf Bechmann, *Skalare Deformation Schwarzer Löcher*, Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik Hannover, 1994

Olaf Bechmann und Olaf Lechtenfeld, *Exact black-hole solution with self-interacting scalar field*, Class. Quantum Grav., 12 (1995), 1473-1481

[2] Helge Dennhardt, *Stabilitätsuntersuchungen an Schwarzen Löchern mit Skalarfeldern*, Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik Hannover, 1996

[3] Robert M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984

[4] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, Akademie Verlag GmbH, 1992

[5] Torsten Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1995

[6] D. Garfinkle, G. T. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev. D43 (1972), 3140

[7] K. Schwarzschild, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech. 189, 1916

[8] H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*, Ann. Physik 50 (1916), 106

G. Nordström, Proc. Kon. Ned. Acad. Wet. 20 (1918), 1238

[9] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43 (1975), 199

[10] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D5 (1972), 1239

[11] J. D. Bekenstein, *Black hole hair: twenty-five years after*, Racah Institut of Physics, The Hebrew University, Jerusalem 1996, Reprint gr-qc/9411054

[12] Markus Heusler, *Black Hole Uniqueness Theorems*, Cambride University Press, 1996

[13] H. A. Buchdahl, Phys. Rev. 115(1959), 1325

[14] *Maple V Release 4 Student Version*, Waterloo Maple Software, 1996

Danksagung

Für das Thema und die Betreuung möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld bedanken. Weiterhin gilt mein Dank Carsten Reinhardt und Helge Dennhardt für die konstruktiven Gespräche und Anregungen. Aber auch allen anderen Mitarbeitern des Instituts sei an dieser Stelle für die Unterstützung im Studium und während der Anfertigung dieser Diplomarbeit gedankt.

Besonders dankbar bin ich jedoch meiner Familie, speziell meiner Mutter, die mir mit ihrer Unterstützung ermöglichte, meiner Neugier zu folgen und Physik zu studieren.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Sven Peters