(4,4) Superfeld Supergravitation

Christine Unkmeir

Diplomarbeit
am Institut für Theoretische Physik
der Universität Hannover

September 1996

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ein zentrales Problem in der modernen Hochenergiephysik ist die Vereinheitlichung der Gravitationskraft mit den anderen fundamentalen Kräften. Für nicht gravitative Kräfte gibt es renormierbare Quantenfeldtheorien, die die Natur adäquat beschreiben. Die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung wurden im Rahmen der elektroschwachen Theorie vereinheitlicht. Die Theorie der starken Wechselwirkung enthält Gluonen, die mit den Quarks und untereinander wechselwirken. Das Standard–Modell umfaßt diese beiden Kräfte und beschreibt eine Welt aus colour und flavour, aber ohne Gravitation. Als vielversprechender Kandidat für die gemeinsame Beschreibung von Gravitation und den beiden erwähnten Wechselwirkungen gilt die *Supergravitation*. Sie basiert auf der Forderung nach einer Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Die Supersymmetrietransformationen werden durch einen Operator Q erzeugt, der die Fermionen in die Bosonen transformiert. Der Operator Q ändert die Statistik und daher auch den Spin des Zustandes. Unter der Lorentztransformation verhält er sich wie ein Tensoroperator mit Spin 1/2.

Die Anzahl der Supersymmetrien N, die ein Supergravitations–Modell haben kann, ist nicht unbegrenzt. In vier Dimensionen wird die Grenze gesetzt durch die Forderung, daß die Supersymmetrietransformationen auf ein Multiplett mit physikalischen Zuständen wirken müssen und daß die zugrunde liegende Theorie entweder Allgemeine Relativitätstheorie oder eine renormierbare Theorie im flachen Raum sein soll. Wenden wir Q auf ein Boson an, dann erhalten wir seinen supersymmetrischen Partner. Im Fall von erweiterten Supersymmetrien (N>1) können wir jetzt ein anderes Q auf das Fermion wirken lassen und erhalten dann einen anderen Superpartner, dessen Spin sich vom ursprünglichen Boson um eins unterscheidet. Es gibt einen minimalen Bereich von Spins, den die Multipletts überdecken, der mit zunehmenden N ansteigt. Ein Multiplett von N–erweiterter Supersymmetrie enthält Zustände mit einem Spin von mindestens 1/4 N. Dies bedeutet, daß Felder mit Spin $\geq 3/2$ bei N>4 auftreten und mit Spin $\geq 5/2$ bei N>8. Renormierbare Feldtheorien im flachen Raum lassen aber keine Teilchen mit Spin $\geq 3/2$ zu. Wir enden daher bei den berühmten Grenzen

- $N_{\mathrm{Max}} = 4$ für renormierbare Feldtheorien im flachen Raum,
- $N_{\mathrm{Max}} = 8$ für Supergravitation.

In dieser Arbeit behandeln wir die zweidimensionale minimale off-shell N=4 Supergravitation. Diese off-shell Struktur liefert die Superraum–Formulierung der Theorie ausgedrückt durch uneingeschränkte Superfelder, sogenannte Präpotentiale. Sie ist relevant für Supergravitationstheorien, die im Superraum unter Verwendung der Wess-Zumino Eichung ([1]-[4]) formuliert werden. Eine vollständig kovariante Superfeldformulierung vereinfacht die Quantisierung. Weiterhin ist sie hilfreich, wenn man die Theorie auf ihre Renormierbarkeit und Endlichkeit prüft, sowie bei Untersuchungen von Super–Riemannflächen und Super–Beltrami–Differentialen.

Sobald die Hilfsfelder bekannt sind, die nötig sind, um die Supersymmetriealgebra zu schließen, ist es möglich die Zwangsbedingungens des zugehörigen Superraumes zu lösen.

In vier Dimensionen wurde die Lösung für den N=1 Superraum von Siegel in [5] gefunden, während das Lösen der N=2 erweiterten Superraum Supergravitation die Verwendung des harmonischen Superraumes verlangt [6]. Soweit es die vierdimensionale N=2 Supergravitation im gewöhnlichen N=2 Superrraum betrifft, wurden bisher nur linearisierte Lösungen gefunden [7, 8].

In zwei Dimensionen ist die Lorentzgruppe eingeschränkter und es sollte möglich sein, eine vollständig kovariante Lösung der (p,q) erweiterten Supergravitationen zu finden, sobald sich eine zugehörige off-shell Formulierung konstruieren läßt. Dabei bezeichnen wir mit p und q die Anzahl der Supersymmetrien im nach rechts und nach links laufenden Sektor. Vollständig kovariante Lösungen sind für den Fall der (1,0) Supergravitation in [9], für (1,1) in [10], (p,0) in [11] und für (2,2) in [12] angegeben. Die Lösungen der (2,2) Supergravitation erhält man auch durch die dimensionale Reduktion aus vier Dimensionen. Grisaru und Wehlau haben in [13] eine vollständige Lösung der Zwangsbedingungen der nichtminimalen zweidimensionalen (2,2) Supergravitation sowie in [14] das zugehörige invariante Maß und die invariante Wirkung in gefunden.

Wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit ist, die Zwangsbedingungen der minimalen zweidimensionalen (4,4) Superraum Supergravitation zu lösen. Die Zwangsbedingungen, die diese Theorie definieren, wurden bereits von Gates, Lu und Oerter in [15] angeben. Es sind aber bisher keine Versuche unternommen worden, sie zu lösen. Dieses Unternehmen wird dadurch vereinfacht, daß wir großteils analog zu Grisaru und Wehlau [13] verfahren können.

Die minimale 2d (4,4) Superraum Supergravitation enthält neben den allgemeinen Koordinatentransformationen eine $SO(1,1)$ Lorentztransformation und eine $SU(2)$ Transformation, die die expliziten Rechnungen erschwert. Indem wir das Vektor–Superfeld H^m als Präpotential einführen, können wir nach dem Frobenius-Theorem [4] das gekrümmte Supervielbein sowie die Konnektionen als Funktionen von uneingeschränkten Superfeldern bestimmen. Der wesentliche Unterschied zu der Arbeit von Grisaru und Wehlau besteht darin, daß wir aufgrund der $SU(2)$ Struktur mehr Bedingungen bekommen, als zur Berechnung des gekrümmten Supervielbeins und der Konnektionen nötig sind. Daher unterliegen die Vektor Superfelder H^m noch Bedingungen, die wir in dieser Arbeit nur aufzählen und deren Konsequenzen weiter untersucht werden müssen. Aus [22] ist bekannt, daß das allgemeine (4,4) Vektor Superfeld H^m anders als sein N=2 Gegenstück überzählige supersymmetrische Freiheitsgrade enthält und daß nur ein irreduzibles (4,4) Superfeld das N=4 Supergravitationsmultiplett beschreibt. Dieses relevante irreduzible Superfeld läßt sich nach [22] in der linearen Approximation identifizieren. Dies sei in dieser Arbeit nur erwähnt und bedarf sicherlich weiterer Untersuchungen.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert. In Kapitel 2 gehen wir auf die Arbeit von Grisaru und Wehlau [13] ein, in der die zweidimensionale (2,2) Supergravitation behandelt wurde. Da wir die zweidimensionale (4,4) Supergravitation analog behandeln können, befassen wir uns ausgiebig mit ihrer Arbeit. Wesentlicher Bestandteil ist dabei, die Zwangsbedingungen zu lösen, welche die zweidimensionale Supergravitation definieren. Natürliche Zwangsbedingungen an die Torsion definieren die Theorie und drücken das Supervielbein $E_{\dot{a}}{}^m$ und die Konnektionen durch die kovarianten Spinorsupervielbeine $E_\alpha{}^\mu$ und $E_{\dot{\alpha}}{}^\mu$ aus, die wiederum ihrerseits Zwangsbedingungen unterliegen. Da man lieber mit sogenannten Präpotentialen, welche keinen Zwangsbedingungen unterliegen, arbeitet, haben Grisaru und Wehlau die Zwangsbedingungen in Termen von Präpotentialen gelöst. Das gekrümmte Vielbein und die Konnektionen lassen sich dabei als Funktionen des flachen Vielbeins und der Präpotentiale bestimmen. Als weiteren Punkt haben Grisaru und Wehlau die Super–Weyl Transformationen untersucht. Die Zwangsbedingungen der 2d (2,2) Supergravitation sind invariant unter Skalierung mit einem beliebigen skalaren Superfeld. Das Transformationsverhalten der Superfelder des Supergravitationsmultipletts berechnen wir am Ende des Kapitels.

Im weiteren Verlauf der Arbeit widmen wir uns der zweidimensionlen minimalen (4,4) Supergravitation.

Ihre Geometrie beschreiben wir in Kapitel 3. Neben den N=4 allgemeinen Koordinatentransformationen beinhaltet sie die $SO(1,1)$ Lorentztransformation und eine $SU(2)$ Transformation. Die zweidimensionale N=4 minimale off-shell Supergravitation im Superraum wurde zuerst von Gates, Lu und Oerter in [15] formuliert. Sie forderten, daß die eichinvarianten Komponenten des off-shell Supergravitationsmultipletts isomorph zu denen des zugehörigen skalaren Multipletts sind. Daher unterliegen die physikalischen Spin-0 Felder des Supergravitationsmultipletts denselben Zwangsbedingungen, die von den physikalischen Spin-0 Felder des skalaren Multipletts erfüllt werden. Die Existenz dieses skalaren N=4 off-shell Multipletts wurde zuvor von Gates, Hull und Roček in [16] bemerkt. Nach der Klassifizierung in [17] nennen wir es TM-I (twisted-I) Multiplett. Es enthält ein komplexes und zwei reelle physikalische Spin-0 Felder. Die Zwangsbedingungen, die das zweidimensionale Supergravitationsmultiplett definieren, sind invariant unter Super–Weyl Transfomationen, deren Transformationsparameter ein weiteres Superfeld bilden. Entsprechend der Klassifizierung in [17] nennen wir es das TM-II (twisted-II) Multiplett. Es hat als physikalische Spin-0 Felder ein $SU(2)$ Singlett und ein $SU(2)$ Triplett.

In Kapitel 4 beschäftigen wir uns mit dem vierdimensionalen N=2 Vektor- und dem N=2 Tensor–Multiplett. Dabei beziehen wir uns auf Arbeiten von B. de Wit, J.W. van Holten, A. van Proeyen und R.Philippe, die in [18]-[21] die N=2 Multipletts eingehend untersucht und klassifiziert haben. Indem wir das 4d N=2 Vektor–Multipett dimensional reduzieren, bekommen wir das TM-I Multiplett. Entsprechend erhalten wir aus dem 4d N=2 Tensor–Multiplett das TM-II Multiplett.

In Kapitel 5 berechnen wir die lokalen und globalen Supersymmetrietransformationen der beiden Multipletts TM-I und TM-II. Im globalen Fall finden wir eine Dualitätsrelation zwischen ihnen. Die physikalischen Spin-0 Felder des einen Multipletts können durch die Hilfsfelder des anderen ausgedrückt werden. Diesen Sachverhalt nutzen wir in Kapitel 8 aus, um die (4,4) supersymmetrische Verallgemeinerung der Liouville–Wirkung zu konstruieren.

In Kapitel 6 wollen wir die Zwangsbedingungen, die die 2d (4,4) Supergravitation definieren, durch Einführung von Präpotentialen lösen. Wir verfahren dabei analog zur zweidimensionalen (2,2) Supergravitation. Indem wir die Vektor Superfelder H^m als Präpotentiale einführen und das Frobenius-Theorem [3, 4] anwenden, können wir einen allgemeinen Ansatz machen, der das gekrümmte Spinorsupervielbein durch das flache Spinorsupervielbein ausdrückt. Um den Ansatz zu spezifizieren, nutzen wir die Tatsache aus, daß die zweidimensionale Supergravitation superkonform flach ist. Die Beziehung zwischen dem gekrümmten und flachen Supervielbein nimmt dann die Form einer (4,4) superkonformen Transformation an. Wir werden sehen, daß sich das gekrümmte Spinorsupervielbein und die Konnektionen als Funktionen von uneingeschränkten Superfeldern bestimmen lassen.

Im Kapitel 7 zeigen wir, wie sich die Felder des Supergravitation–Multipletts unter den Super–Weyl Transformationen verhalten. Versuche, die infinitesimalen und endlichen Transformationen über einen Ansatz von Gates, Hassoun und Nieuwenhuizen aus [23] zu berechnen, endeten in Widersprüchen. Wir verfahren daher analog zu Grisaru und Wehlau in [13] und fordern neben dem Transformationsparameter des $SU(2)$ Singletts einen zusätzlichen für das $SU(2)$ Triplett. Damit lassen sich dann die Super–Weyl–Transformationen der Superfelder des Supergravitationsmultipletts berechnen.

Die Kopplung der Materie–Multipletts an die zweidimensionale (4,4) Supergravitation untersuchen wir in Kapitel 8. Die lokale (4,4) supersymmetrische Wirkung des TM-I Multipletts läßt sich auf eine Form bringen, die der Kopplung des vierdimensionalen N=2 Vektor–Multipletts an die N=2 Supergravitation ähnelt. Die wiederum nimmt die Form eines nichtlinearen Sigma–Modells gekoppelt an N=2 Supergravitation an, das von Antoniadis, Bachas und Kounnas in [33] angegeben wurde. Daraus kann man die supersymmetrische Verallgemeinerung der bosonischen Liouville–Wirkung ableiten. Weiterhin läßt sich über die Dualitätsbeziehung zwischen dem TM-I und TM-II Multiplett die (4,4) lokale supersymmetrische Liouville–Wirkung berechnen.

Bis zu diesem Kapitel haben wir die 2d (4,4) Supergravitation in der Superraum–Formulierung behandelt. Auf die Formulierung in Komponenten gehen wir in Kapitel 9 ein. Wir behandeln dabei zuerst die N=4 superkonforme Algebra. Um sie durch freie Felder zu realisieren, benutzen wir das TM-I Multiplett. Für dieses Multiplett ist die Wirkung, die invariant unter der globalen Algebra ist, bekannt. Um sie lokal zu machen, müssen wir sie via Noether–Methode an die Supergravitation koppeln. Als Ergebnis erhalten wir die N=4 Wirkung, die von Pernici und Nieuwenhuizen in [42] angegeben wurde. Auf ihre lokalen und diskreten Symmetrien gehen wir zum Schluß ein.

Im Anhang stehen unsere Konventionen, die wir bei der Superraum–Formulierung der zweidimensionalen (4,4) Supergravitation benutzen. Weiterhin finden sich dort auch die Notationen für die vierdimensionalen Vektor– und Tensor–Multipletts sowie die Vereinbarungen bei der Rechnung in Komponenten.

Kapitel 2

(2,2) Supergravitation

In diesem Kpaitel befassen wir uns mit einigen Aspekten der nichtminimalen zweidimensionalen N=2 Supergravitation im N=2 Superraum, die Grisaru und Wehlau in [13] untersucht haben. Da wir im weiteren Verlauf der Arbeit die zweidimensionale (4,4) Supersymmetrie analog behandeln, wollen wir jetzt ihre Arbeit [13] nachvollziehen.

Zuerst beschäftigen wir uns mit der Geometrie der zweidimensionalen (2,2) Supergravitation. Die Supersymmetriealgebra enthält neben der $SO(1,1)$ Lorentztransformation eine axiale und eine vektorielle $U(1)$ Symmetrie: $U_A(1)$ und $U_V(1)$. Daher enthalten nach [3, 4] die kovarianten Spinorableitungen neben dem Supervielbein die Lorentzkonnektion Λ, eine $U_V(1)$ Konnektion $\tilde{\Lambda}$ und eine $U_A(1)$ Konnektion N. Zwangsbedingungen an die Torsion definieren die Theorie. Durch die Zwangsbedingungen an die Torsion lassen sich die Supergeometriepotentiale $E_A{}^M$ und die Konnektionen Λ, $\tilde{\Lambda}$ und N durch die Spinorvielbeine $E_\alpha{}^\mu$ und $E_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\mu}}$ ausdrücken, die wiederum Zwangsbedingungen unterliegen. Da es leichter ist mit Objekten zu arbeiten, die keine Zwangsbedingungen erfüllen müssen, drücken wir die Potentiale durch sogenannte Präpotentiale aus. Eine supersymmetrische Eichung erlaubt uns, das gerkrümmte Vielbein mit dem flachen in eine einfache Beziehung zu setzen, so daß wir in der Lage sind, die Zwangsbedingungen zu lösen. Wir bestimmen dabei das gekrümmte Vielbein und die Konnektionen als Funktionen des flachen Vielbeins und der Präpotentiale. Die Zwangsbedingungen der 2d (2,2) Supergravitation sind invariant unter den Super–Weyl Transformationen. Wie sich die Konnektionen und die Felder des Supergravitation–Multipletts unter ihnen transformieren, berechnen wir am Ende des Kapitels.

Wir benutzen dabei folgende Notation. Der flache N=2 Superraum wird durch zwei bosonische Koordinaten $x^{\ddagger}$ und $x^{=}$ und durch die fermionischen Koordinaten θ^+ und

θ^-, sowie ihre Konjugierten $\theta^{\dot{+}}$ und $\theta^{\dot{-}}$ beschrieben. Die flachen Spinorableitungen erfüllen folgende Antikommutatorrelationen

$$\begin{aligned} \{D_+, D_{\dot{+}}\} &= i\partial_{\ddagger} \ , \\ \{D_-, D_{\dot{-}}\} &= i\partial_{=} \ . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Alle anderen Antikommutatoren verschwinden.

Wir definieren die Lorentz, $U_V(1)$ und $U_A(1)$ Tangentialraum Generatoren Λ, $\tilde{\Lambda}$ und N durch ihre Wirkung auf die Spinoren

$$\begin{aligned} [\Lambda, \psi_\pm] &= \pm\tfrac{1}{2}\psi_\pm \quad , \quad [\Lambda, \psi_{\dot{\pm}}] = \pm\tfrac{1}{2}\psi_{\dot{\pm}} \ , \\ [\tilde{\Lambda}, \psi_\pm] &= \mp\tfrac{i}{2}\psi_\pm \quad , \quad [\tilde{\Lambda}, \psi_{\dot{\pm}}] = \pm\tfrac{i}{2}\psi_{\dot{\pm}} \ , \\ [N, \psi_\pm] &= -\tfrac{i}{2}\psi_\pm \quad , \quad [N, \psi_{\dot{\pm}}] = +\tfrac{i}{2}\psi_{\dot{\pm}} \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Konventioneller Weise führt man eine Kombination von Operatoren ein, die entweder auf ungepunktete oder gepunktete Variablen wirkt

$$M = \tfrac{1}{2}(\Lambda + i\tilde{\Lambda}) \quad , \quad \bar{M} = \tfrac{1}{2}(\Lambda - i\tilde{\Lambda}) \ . \tag{2.3}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} [M, \psi_\pm] &= \pm\tfrac{1}{2}\psi_\pm \quad , \quad [M, \psi_{\dot{\pm}}] = 0 \ , \\ [\bar{M}, \psi_{\dot{\pm}}] &= \tfrac{1}{2}\psi_{\dot{\pm}} \quad , \quad [\bar{M}, \psi_\pm] = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die Wirkung der Operatoren auf alle anderen Größen läßt sich hiervon ableiten.

2.1 Die N=2 Geometrie

Die Geometrie der zweidimensionalen N=2 Supergravitation wurde von Howe und Papadopoulos in [24] behandelt und auch von Gates in [15] und Alnowaiser in [12] diskutiert. Sie wird durch geeignete kovariante Ableitungen beschrieben, die die Wirkung der oben eingeführten Tangentialraumgeneratoren beinhalten. Für gewöhnlich betrachtet man zunächst die nichtminimale Theorie und läßt sie invariant unter allen Tangentialraumgeneratoren. Will man dann minimale Multipletts betrachten, so entfernt man entweder die $U_V(1)$ oder $U_A(1)$ Konnektion. Im ersten Fall erhält man eine Theorie, die man auch durch dimensionale Reduktion der vier dimensionalen Supergravitation mitttels chiraler Kompensatoren erhält. Der zweite Fall führt auf eine Theorie, die getwistete chirale Kompensatoren beinhaltet.

Die kovarianten Spinorableitungen sind durch

$$
\begin{aligned}
\nabla_\pm &= E_\pm + \Phi_\pm \Lambda + \tilde{\Phi}_\pm \Lambda + \tilde{\Gamma}_\pm N \\
&= E_\pm + \Omega_\pm M + \Gamma_\pm \bar{M} + \tilde{\Gamma}_\pm N
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

und einem entsprechenden Ausdruck für ihr komplex Konjugiertes definiert. Das Vielbein ist durch

$$
E_A = E_A^M \partial_M
$$

gegeben. Die Torsion und die Krümmung werden wie gewöhnlich durch

$$
[\nabla_A, \nabla_B\} = T_{AB}{}^C \nabla_C + R_{AB} M + \bar{R}_{AB} \bar{M} + F_{AB} N \tag{2.6}
$$

bestimmt. Zwangsbedingungen an die Torsion definieren die Theorie, da sich die Constraints an die Krümmung und an die Feldstärke über Bianchi–Identitäten berechnen lassen [25]. Wir nehmen hier folgende Zwangsbedingungen an

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} &= T_{\alpha\beta}{}^{\dot{\gamma}} = 0 \ , \\
T_{\alpha\dot{\beta}}{}^{c} &= (\gamma^c)_{\alpha\dot{\beta}} \ , \\
T_{\alpha b}{}^{b} &= \epsilon^{bc} T_{\alpha bc} = 0 \quad T_{\alpha\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} = 0 \ , \\
T_{ab}{}^{c} &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Die Zwangsbedingungen an die Krümmung und die Feldstärke erhalten wir durch die Bianchi–Identitäten

$$
\begin{aligned}
\nabla F &= 0 \ , \\
\nabla T^A &= E^B R^A_{\ B} \ .
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

(2.7) kann auch durch folgende Antikommutatoren beschrieben werden [13]

$$
\begin{aligned}
\{\nabla_\pm, \nabla_\pm\} &= 0 \ , \\
\{\nabla_{+}, \nabla_{\dot{+}}\} = i\nabla_{\ddagger} \ , \quad \{\nabla_{-}, \nabla_{\dot{-}}\} &= i\nabla_{=} \ , \\
\{\nabla_+, \nabla_-\} = -\tfrac{1}{2}\bar{R}(\Lambda - i\tilde{\Lambda}) &= -\bar{R}\bar{M} \ , \\
\{\nabla_+, \nabla_{\dot{-}}\} = F(\Lambda - iN) &= F(M + \bar{M} - iN) \ .
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Aus den Bianchi–Identitäten können wir berechnen, daß R der Bedingung $\nabla_{\dot{\pm}} R = 0$ genügt und daher ein chirales Superfeld ist. F erfüllt $\nabla_+ F = 0$ und $\nabla_{\dot{-}} F = 0$ und ist ein getwistetes chirales Superfeld.

Die *minimalen* N=2 Supergravitationen erhalten wir, wenn wir unsere Eichgruppe einschränken, so daß entweder $F = 0$ für die $U_A(1)$ Version oder $R = 0$ für die $U_V(1)$ Version ist [24].

2.2 Lösen der N=2 Zwangsbedingungen

In diesem Abschnitt wollen wir die Zwangsbedingungen (2.9) lösen. Indem wir die Zwangsbedingungen an die Torsion (2.7) aufstellten, haben wir die Supervielbeine $E_{\ddagger}$ und $E_{=}$ und die Konnektionen $\Omega_{\pm}$, $\Gamma_{\pm}$ und $\tilde{\Gamma}_{\pm}$ durch die Spinorvielbeinsuperfelder $E_{\pm}$ ausgedrückt, die wiederum auch Zwangsbedingungen unterliegen. Man arbeitet aber lieber mit Objekten, die keinen Zwangsbedingungen unterliegen, sogenannten Präpotentialen. Der Name Präpotential läßt sich folgendermaßen motivieren. In der Terminologie der Eichtheorien spielen $T_{AB}{}^{C}$ und R_{AB} die Rolle von Feldstärken, da sie eichkovariante Superfelder sind. Die Vielbeine $E_{A}{}^{M}$ und die Konnektionen $\Omega_{\pm}$, $\Gamma_{\pm}$ und $\tilde{\Gamma}_{\pm}$ spielen die Rolle von Potentialen. Daher nennt man Objekte, die Potentiale bestimmen, Präpotentiale.

Wir definieren uns zuerst die flachen Differentialoperatoren

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\pm} &= \mathrm{e}^{-iH^m\partial_m} D_{\pm} \mathrm{e}^{+iH^m\partial_m} \\ &= \mathrm{e}^{-iH} D_{\pm} \mathrm{e}^{iH} \end{aligned} \tag{2.10}$$

mit

$$H = H^m \partial_m \ . \tag{2.11}$$

Das Präpotential H^m ist hier ein reelles Vektorsuperfeld. Die explizite Form von $\hat{E}_{\pm}$ lautet

$$\hat{E}_{\pm} = D_{\pm} + iH_{\pm}^m \partial_m \ , \tag{2.12}$$

wobei $H_{\pm}^m$ eine Funktion von H^m und seinen Ableitungen ist. $\hat{E}_{\pm}$ erfüllt

$$\begin{aligned} \{\hat{E}_{\pm}, \hat{E}_{\pm}\} &= \{\mathrm{e}^{-iH} D_{\pm} \mathrm{e}^{iH}, \mathrm{e}^{-iH} D_{\pm} \mathrm{e}^{iH}\} \\ &= \mathrm{e}^{-iH} \{D_{\pm}, D_{\pm}\} \mathrm{e}^{iH} \\ &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Analog erhalten wir

$$\{\hat{E}_{+}, \hat{E}_{-}\} = 0 \ , \tag{2.14}$$

und

$$\begin{aligned} \{\hat{E}_{+}, \hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}\} &= i\hat{E}_{\ddagger} + \ldots \ , \\ \{\hat{E}_{-}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}\} &= i\hat{E}_{=} + \ldots \ . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Daher bilden $\hat{E}_\pm$, $\hat{E}_{\overset{\bullet}{\pm}}$, $\hat{E}_{\ddagger}$ und $\hat{E}_=$ eine Basis von Ableitungsoperatoren.

Um die Zwangsbedingungen zu lösen, entfernen wir durch die supersymmetrische Eichung möglichst viele irrelevante Superfelder

$$\begin{aligned}
E_+ &= e^{\bar{S}}\left(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-\right) \ , \\
E_- &= e^{\bar{S}}\left(\hat{E}_- + A_-{}^+\hat{E}_+\right) \ .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Dabei haben wir mit S ein komplexes, skalares Superfeld eingeführt. Die Superfeldkonnektionen $A_+{}^-$ und $A_-{}^+$ werden später als Funktionen der Präpotentiale H^m bestimmt. Im folgenden wollen wir die Zwangsbedingungen (2.9) lösen. Dazu setzen wir den Ausdruck für die kovarianten Spinorableitungen (2.5) und für die gekrümmten Vielbeine (2.16) in (2.9) ein. Wir können damit die Konnektionen als Funktionen der flachen Vielbeine und der Präpotentiale bestimmen.

Wir wollen zuerst die Zwangsbedingung $\{\nabla_+, \nabla_+\} = 0$ betrachten. Setzen wir dort (2.5) ein

$$\begin{aligned}
\{\nabla_+, \nabla_+\} &= \{E_+ + \Omega_+ M + \Gamma_+\bar{M} + \Sigma_+ N, E_+ + \Omega_+ M + \Gamma_+\bar{M} + \Sigma_+ N\} \\
&= \{E_+, E_+\} + \{E_+, \Omega_+ M\} + \{E_+, \Gamma_+\bar{M}\} + \{E_+, \Sigma_+ N\} \\
&\quad + \{\Omega_+ M, E_+\} + \{\Omega_+ M, \Omega_+ M\} + \{\Omega_+ M, \Gamma_+\bar{M}\} + \{\Omega_+ M, \Sigma_+ N\} \\
&\quad + \{\Gamma_+\bar{M}, E_+\} + \{\Gamma_+\bar{M}, \Omega_+ M\} + \{\Gamma_+\bar{M}, \Gamma_+\bar{M}\} + \{\Gamma_+\bar{M}, \Sigma_+ N\} \\
&\quad + \{\Sigma_+ N, E_+\} + \{\Sigma_+ N, \Omega_+ M\} + \{\Sigma_+ N, \Gamma_+\bar{M}\} + \{\Sigma_+ N, \Sigma_+ N\} \\
&= \{E_+, E_+\} + \tfrac{1}{2}\Omega_+ E_+ + E_+\Omega_+ M + E_+\Gamma_+\bar{M} - \tfrac{i}{2}\Sigma_+ E_+ + E_+\Sigma_+ N \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Omega_+ E_+ + E_+\Omega_+ M + \tfrac{1}{2}\Omega_+\Gamma_+\bar{M} + \tfrac{1}{2}\Omega_+\Sigma_+ N - \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Omega_+ M \\
&\quad + E_+\Gamma_+\bar{M} + \tfrac{1}{2}\Omega_+\Gamma_+\bar{M} - \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Gamma_+\bar{M} \\
&\quad - \tfrac{i}{2}\Sigma_+ E_+ + E_+\Sigma_+ N - \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Omega_+ M + \tfrac{1}{2}\Omega_+\Sigma_+ N - \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Gamma_+\bar{M} \ ,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

dann bekommen wir, da die linke Seite verschwindet, folgende Bedingungen

$$\begin{aligned}
\{E_+, E_+\} + (\Omega_+ - i\Sigma_+)E_+ &= 0 \ , \\
2E_+\Gamma_+ + (\Omega_+ - i\Sigma_+)\Gamma_+ &= 0 \ , \\
2E_+\Omega_+ - i\Sigma_+\Omega_+ &= 0 \ , \\
2E_+\Sigma_+ + \Omega_+\Sigma_+ &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Betrachten wir die erste Zeile. Setzen wir dort den expliziten Ausdruck für das Vielbein (2.16) ein

$$\{E_+, E_+\} + (\Omega_+ - i\Sigma_+)E_+ \ = \ 0$$

$$\begin{aligned}
\left[2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-) + (\Omega_+ - i\Sigma_+)\right]\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-) &= 0 \\
\left[2\mathrm{e}^{\bar{S}}((\hat{E}_+\bar{S}) + A_+{}^-(\hat{E}_-\bar{S})) + (\Omega_+ - i\Sigma_+)\right]\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-) & \\
+\mathrm{e}^{2\bar{S}}\{\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-, \hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-\} &= 0\ , \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

berechnen die letzte Zeile

$$\begin{aligned}
\{\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-, \hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-\} &= \\
\{\hat{E}_+, A_+{}^-\hat{E}_-\} + \{A_+{}^-\hat{E}_-, \hat{E}_+\} + \{A_+{}^-\hat{E}_-, A_+{}^-\hat{E}_-\} &= \\
2(\hat{E}_+A_+{}^-)\hat{E}_- \ + \ 2(A_+{}^-\hat{E}_-A_+{}^-)\hat{E}_- & \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

und bedenken, daß die $\hat{E}_\pm$ linear unabhängig sind, dann finden wir die Relation

$$\Omega_+ - i\Sigma_+ \ = \ -2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+\bar{S} + A_+{}^-\hat{E}_-\bar{S})\ . \qquad (2.21)$$

Dabei unterliegt der Koeffizient $A_+{}^-$ der Bedingung

$$\hat{E}_+A_+{}^- + A_+{}^-\hat{E}_-A_+{}^- = 0\ . \qquad (2.22)$$

Wir werden später sehen, daß $A_+{}^-$ sie identisch erfüllt. Wenden wir auf (2.22) $\hat{E}_-$ an und beachten $(\hat{E}_-A_+{}^-)^2 = 0$ und $(\hat{E}_-)^2 = 0$, dann finden wir, daß $A_+{}^-$ linear ist in dem Sinn, daß

$$\hat{E}_+\hat{E}_-A_+{}^- = 0\ . \qquad (2.23)$$

Bisher haben wir nur die erste Zeile von (2.18) betrachtet. Die verbleibenden Gleichungen in (2.18) lassen sich erst verifizieren, wenn die expliziten Ausdrücke für die Konnektionen bekannt sind.

Aus der Zwangsbedingung $\{\nabla_-, \nabla_-\} = 0$ erhalten wir ein analoges Resultat. Als Gleichung für die Konnektionen bekommen wir

$$\Omega_- + i\Sigma_- \ = \ 2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_-\bar{S} + A_-{}^+\hat{E}_+\bar{S})\ , \qquad (2.24)$$

und der Koeffizient $A_-{}^+$ muß

$$\hat{E}_-A_-{}^+ + A_-{}^+\hat{E}_+A_-{}^+ = 0 \qquad (2.25)$$

erfüllen. Wenden wir $\hat{E}_+$ auf die Gleichung (2.25) an, dann finden wir, daß $A_-{}^+$ linear ist in dem Sinn, daß

$$\hat{E}_+\hat{E}_-A_-{}^+ = 0\ . \qquad (2.26)$$

Als nächtes wenden wir uns dem Zwangsbedingung $\{\nabla_+, \nabla_-\} = -\bar{R}\bar{M}$ zu. Wir verfahren genauso wie beim ersten Zwangsbedingung und setzen zuerst die Ausdrücke für die kovarianten Spinorableitungen (2.5) ein

$$\begin{aligned}
\{\nabla_+, \nabla_-\} &= \{E_+ + \Omega_+ M + \Gamma_+ \bar{M} + \Sigma_+ N, E_- + \Omega_- M + \Gamma_- \bar{M} + \Sigma_- N\} \\
&= \{E_+, E_-\} + \{E_+, \Omega_- M\} + \{E_+, \Gamma_- \bar{M}\} + \{E_+, \Sigma_- N\} \\
&\quad + \{\Omega_+ M, E_-\} + \{\Omega_+ M, \Omega_- M\} + \{\Omega_+ M, \Gamma_- \bar{M}\} + \{\Omega_+ M, \Sigma_- N\} \\
&\quad + \{\Gamma_+ \bar{M}, E_-\} + \{\Gamma_+ \bar{M}, \Omega_- M\} + \{\Gamma_+ \bar{M}, \Gamma_- \bar{M}\} + \{\Gamma_+ \bar{M}, \Sigma_- N\} \\
&\quad + \{\Sigma_+ N, E_-\} + \{\Sigma_+ N, \Omega_- M\} + \{\Sigma_+ N, \Gamma_- \bar{M}\} + \{\Sigma_+ N, \Sigma_- N\} \\
&= \{E_+, E_-\} + \tfrac{1}{2}\Omega_- E_+ + E_+ \Omega_- M + E_+ \Gamma_- \bar{M} - \tfrac{i}{2}\Sigma_- E_+ + E_+ \Sigma_- N \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\Omega_+ E_- + E_- \Omega_+ M - \tfrac{1}{2}\Omega_+ \Omega_- M + \tfrac{1}{2}\Omega_- \Omega_+ M - \tfrac{1}{2}\Omega_+ \Gamma_- \bar{M} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\Omega_+ \Sigma_- N - \tfrac{i}{2}\Sigma_- \Omega_+ M + E_- \Gamma_+ \bar{M} + \tfrac{1}{2}\Omega_- \Gamma_+ \bar{M} - \tfrac{i}{2}\Sigma_- \Gamma_+ \bar{M} \\
&\quad - \tfrac{i}{2}\Sigma_+ E_- + E_- \Sigma_+ N - \tfrac{i}{2}\Sigma_+ \Omega_- M + \tfrac{1}{2}\Omega_- \Sigma_+ N - \tfrac{i}{2}\Sigma_+ \Gamma_- \bar{M} \\
&\quad - \tfrac{i}{2}\Sigma_+ \Sigma_- N - \tfrac{i}{2}\Sigma_- \Sigma_+ N \ . \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Daraus bekommen wir die Bedingungen

$$\begin{aligned}
\{E_+, E_-\} + \tfrac{1}{2}(\Omega_- - i\Sigma_-)E_+ - \tfrac{1}{2}(\Omega_+ + i\Sigma_+)E_- &= 0 \ , \\
E_+\Omega_- + E_-\Omega_+ - \Omega_+\Omega_- - \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Omega_- - \tfrac{i}{2}\Sigma_-\Omega_+ &= 0 \ , \\
E_+\Sigma_- + E_-\Sigma_+ - \tfrac{1}{2}\Omega_+\Sigma_- + \tfrac{1}{2}\Omega_-\Sigma_+ &= 0 \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

und

$$E_+\Gamma_- + E_-\Gamma_+ - \tfrac{1}{2}(\Omega_+ + i\Sigma_+)\Gamma_- + \tfrac{1}{2}(\Omega_- - i\Sigma_-)\Gamma_+ = -\bar{R} \ . \qquad (2.29)$$

Nun setzen wir in die erste Zeile von (2.28) die expliziten Ausdrücke für die Vielbeine (2.16) ein

$$\begin{aligned}
\{E_+, E_-\} + \tfrac{1}{2}(\Omega_- - i\Sigma_-)E_+ - \tfrac{1}{2}(\Omega_+ + i\Sigma_+)E_- &= 0 \\
e^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-)e^{\bar{S}}(\hat{E}_- + A_-{}^+\hat{E}_+) & \\
+e^{\bar{S}}(\hat{E}_- + A_-{}^+\hat{E}_+)e^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-) & \\
+\tfrac{1}{2}(\Omega_- - i\Sigma_-)e^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-) - \tfrac{1}{2}(\Omega_+ + i\Sigma_+)e^{\bar{S}}(\hat{E}_- + A_-{}^+\hat{E}_+) &= 0 \\
\left[e^{\bar{S}}((\hat{E}_+\bar{S}) + A_+{}^-(\hat{E}_-\bar{S})) - \tfrac{1}{2}(\Omega_+ + i\Sigma_+)\right] e^{\bar{S}}(\hat{E}_- + A_-{}^+\hat{E}_+) & \\
+ \left[e^{\bar{S}}((\hat{E}_-\bar{S}) + A_-{}^+(\hat{E}_+\bar{S})) + \tfrac{1}{2}(\Omega_- - i\Sigma_-)\right] e^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-) & \\
+e^{2\bar{S}}\{\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-, \hat{E}_- + A_-{}^+\hat{E}_+\} &= 0 \\
e^{2\bar{S}}[(\hat{E}_+\bar{S} + A_+{}^-\hat{E}_-\bar{S})(\hat{E}_- + A_-{}^+\hat{E}_+) + (\hat{E}_-\bar{S} + A_-{}^+\hat{E}_+\bar{S})(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-) & \\
+(\hat{E}_+A_-{}^+ + A_+{}^-\hat{E}_-A_-{}^+)\hat{E}_+ + (\hat{E}_-A_+{}^- + A_-{}^+\hat{E}_+A_+{}^-)\hat{E}_-] &
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
+\tfrac{1}{2}(\Omega_- - i\Sigma_-)\mathrm{e}^{\bar S}(\hat E_+ + A_+{}^-\hat E_-) - \tfrac{1}{2}(\Omega_+ + i\Sigma_+)\mathrm{e}^{\bar S}(\hat E_- + A_-{}^+\hat E_+) &= 0 \\
-\tfrac{1}{2}(\Omega_+ - i\Sigma_+)\mathrm{e}^{\bar S}(\hat E_- + A_-{}^+\hat E_+) + \tfrac{1}{2}(\Omega_- + i\Sigma_-)\mathrm{e}^{\bar S}(\hat E_+ + A_+{}^-\hat E_-) & \\
+\mathrm{e}^{2\bar S}(\hat E_+ A_-{}^+ + A_+{}^-\hat E_- A_-{}^+)\hat E_+ + \mathrm{e}^{2\bar S}(\hat E_- A_+{}^- + A_-{}^+\hat E_+ A_+{}^-)\hat E_- & \\
+\tfrac{1}{2}(\Omega_- - i\Sigma_-)\mathrm{e}^{\bar S}(\hat E_+ + A_+{}^-\hat E_-) - \tfrac{1}{2}(\Omega_+ + i\Sigma_+)\mathrm{e}^{\bar S}(\hat E_- + A_-{}^+\hat E_+) &= 0 \\
-\Omega_+\mathrm{e}^{\bar S}(\hat E_- + A_-{}^+\hat E_+) + \Omega_-\mathrm{e}^{\bar S}(\hat E_+ + A_+{}^-\hat E_-) & \\
+\mathrm{e}^{2\bar S}(\hat E_+ A_-{}^+ + A_+{}^-\hat E_- A_-{}^+)\hat E_+ + \mathrm{e}^{2\bar S}(\hat E_- A_+{}^- + A_-{}^+\hat E_+ A_+{}^-)\hat E_- &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Mit den Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
\hat E_+ + A_+{}^-\hat E_- = u\ , &\quad \hat E_- + A_-{}^+\hat E_+ = v\ , \\
\hat E_+ = \frac{u - A_+{}^- v}{1 - A_+{}^- A_-{}^+}\ , &\quad \hat E_- = \frac{v - A_-{}^+ u}{1 - A_+{}^- A_-{}^+}
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&[-\Omega_+\mathrm{e}^{\bar S} + \mathrm{e}^{2\bar S}\frac{\hat E_- A_+{}^- + A_-{}^+\hat E_+ A_+{}^-}{1 - A_+{}^- A_-{}^+} \\
&-\mathrm{e}^{2\bar S}\frac{A_+{}^-}{1 - A_+{}^- A_-{}^+}(\hat E_+ A_-{}^+ + A_+{}^-\hat E_- A_-{}^+)]v \\
&+[\Omega_-\mathrm{e}^{\bar S} + \mathrm{e}^{2\bar S}\frac{\hat E_+ A_-{}^+ + A_+{}^-\hat E_- A_-{}^+}{1 - A_+{}^- A_-{}^+} \\
&-\mathrm{e}^{2\bar S}\frac{A_-{}^+}{1 - A_+{}^- A_-{}^+}(\hat E_- A_+{}^- + A_-{}^+\hat E_+ A_+{}^-)]u \quad = \quad 0\ .
\end{aligned}
$$

Wenn wir fordern, daß die Koeffizienten vor u und v verschwinden und (2.22) und (2.25) anwenden, dann erhalten wir als Resultat für die Lorentzkonnektionen

$$
\begin{aligned}
\Omega_+ &= e^{\bar S}(\hat E_- A_+{}^- - A_+{}^-\hat E_+ A_-{}^+)\ , \\
\Omega_- &= -e^{\bar S}(\hat E_+ A_-{}^+ - A_-{}^+\hat E_- A_+{}^-)\ .
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Wieder haben wir bisher nur die erste Zeile von (2.28) betrachtet. Die anderen Bedingungen in (2.28) können erst verifiziert werden, wenn wir die expliziten Ausdrücke der Konnektionen $\Gamma_\pm$ berechnet haben.

Dazu betrachten wir die Zwangsbedingung $\{\nabla_+, \nabla_{\underline{\bullet}}\} = F(M + \bar M - iN)$.

$$
\begin{aligned}
\{\nabla_+, \nabla_{\underline{\bullet}}\} &= \{E_+, E_{\underline{\bullet}}\} - \tfrac{1}{2}(\Gamma_+ - i\Sigma_+)E_{\underline{\bullet}} + \tfrac{1}{2}(\Gamma_{\underline{\bullet}} - i\Sigma_{\underline{\bullet}})E_+ \\
&+ [E_+\Gamma_{\underline{\bullet}} + E_{\underline{\bullet}}\Omega_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Gamma_{\underline{\bullet}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\underline{\bullet}}\Omega_+ + \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Gamma_{\underline{\bullet}} - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\underline{\bullet}}\Omega_+]M \\
&+ [E_+\Omega_{\underline{\bullet}} + E_{\underline{\bullet}}\Gamma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\underline{\bullet}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\underline{\bullet}}\Gamma_+ + \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Omega_{\underline{\bullet}} - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\underline{\bullet}}\Gamma_+]\bar M \\
&+ [E_+\Sigma_{\underline{\bullet}} + E_{\underline{\bullet}}\Sigma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\underline{\bullet}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\underline{\bullet}}\Sigma_+ + i\ \Sigma_+\Sigma_{\underline{\bullet}}]N
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Wir verlangen, daß die erste Zeile verschwindet.

$$
\begin{aligned}
\{E_+, E_{\dot{-}}\} - \tfrac{1}{2}(\Gamma_+ - i\Sigma_+)E_{\dot{-}} - \tfrac{1}{2}(\Gamma_{\dot{-}} - i\Sigma_{\dot{-}})E_+ &= 0 \\
\left[\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-) - \tfrac{1}{2}(\Omega_+ + i\Sigma_+)\right] \mathrm{e}^{S}(\hat{E}_{\dot{-}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}}) & \\
+ \left[\mathrm{e}^{S}(\hat{E}_{\dot{-}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}}) + \tfrac{1}{2}(\Omega_{\dot{-}} - i\Sigma_{\dot{-}})\right] \mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-) & \\
\{\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-, \hat{E}_{\dot{-}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}}\} &= 0 \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Berechnen wir den Antikommutator

$$
\begin{aligned}
\{\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-, \hat{E}_{\dot{-}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}}\} &= 0 \\
\{\hat{E}_+, \hat{E}_{\dot{-}}\} + \{\hat{E}_+, A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}}\} + \{A_+{}^-\hat{E}_-, \hat{E}_{\dot{-}}\} + \{A_+{}^-\hat{E}_-, A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}}\} &= 0 \\
\{\hat{E}_+, \hat{E}_{\dot{-}}\} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\{\hat{E}_+, \hat{E}_{\dot{+}}\} + (\hat{E}_+ A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}})\hat{E}_{\dot{+}} & \\
+ A_+{}^-\{\hat{E}_-, \hat{E}_{\dot{-}}\} + (\hat{E}_{\dot{-}}A_+{}^-)\hat{E}_- & \\
+ A_+{}^-(\hat{E}_- A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}})\hat{E}_{\dot{+}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}(\hat{E}_{\dot{+}}A_+{}^-)\hat{E}_- + A_+{}^-A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\{\hat{E}_-, \hat{E}_{\dot{+}}\} &= 0\ , \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

so erhalten wir als Bedingungen an die A's als Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_+ A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}} + A_+{}^-\hat{E}_- A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}} &= 0\ , \\
\hat{E}_{\dot{-}} A_+{}^- + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}} A_+{}^- &= 0\ , \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

und als quadratische Gleichung

$$
\{\hat{E}_+, \hat{E}_{\dot{-}}\} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\{\hat{E}_+, \hat{E}_{\dot{+}}\} + A_+{}^-\{\hat{E}_-, \hat{E}_{\dot{-}}\} + A_+{}^-A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\{\hat{E}_-, \hat{E}_{\dot{+}}\} = 0\ . \qquad (2.37)
$$

Für die Konnektionen bekommen wir

$$
\begin{aligned}
\Gamma_+ - i\Sigma_+ &= 2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ S + A_+{}^-\hat{E}_- S) \\
\Gamma_{\dot{-}} - i\Sigma_{\dot{-}} &= -2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_{\dot{-}}\bar{S} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}}\bar{S})\ . \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

Wir sind jetzt in Lage, die restlichen Konnektionen zu berechnen. Neben der Gleichung für $\Omega_\pm$ finden wir folgende Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
\Sigma_+ &= -2i\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+\bar{S} + A_+{}^-\hat{E}_-\bar{S}) - i\ \mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_- A_+{}^- - A_+{}^-\hat{E}_+ A_-{}^+) \\
\Sigma_- &= -2i\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_-\bar{S} + A_-{}^+\hat{E}_+\bar{S}) - i\ \mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ A_-{}^+ - A_-{}^+\hat{E}_- A_+{}^-) \\
\Gamma_+ &= 2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ S + A_+{}^-\hat{E}_- S) + 2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+\bar{S} + A_+{}^-\hat{E}_-\bar{S}) \\
&\quad + \mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_- A_+{}^- - A_+{}^-\hat{E}_+ A_-{}^+) \\
\Gamma_- &= -2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_- S + A_-{}^+\hat{E}_+ S) - 2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_-\bar{S} + A_-{}^+\hat{E}_+\bar{S}) \\
&\quad - \mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ A_-{}^+ - A_-{}^+\hat{E}_- A_+{}^-)\ .
\end{aligned}
$$

(2.39)

Um das Superfeld F in (2.33) bestimmen zu können, müssen wir zeigen, daß die zweite, dritte und vierte Zeile in Gleichung (2.33) gleich sind. Wir zeigen zuerst, daß die zweite und dritte Zeile gleich sind, indem wir sie voneinander abziehen.

$$
\begin{aligned}
& [E_+\Gamma_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Omega_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Gamma_{\dot{-}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Omega_+ + \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Gamma_{\dot{-}} - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{-}}\Omega_+] \\
& - [E_+\Omega_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Gamma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\dot{-}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Gamma_+ + \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Omega_{\dot{-}} - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{-}}\Gamma_+] \\
= {} & E_+(\Gamma_{\dot{-}} - \Omega_{\dot{-}}) - E_{\dot{-}}(\Gamma_+ - \Omega_+) + \tfrac{1}{2}(\Gamma_{\dot{-}} - i\Sigma_{\dot{-}})\Omega_+ + \tfrac{1}{2}(\Gamma_+ - i\Sigma_+)\Omega_{\dot{-}} \\
& + \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Gamma_{\dot{-}} + \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{-}}\Gamma_+ \\
= {} & E_+(\Gamma_{\dot{-}} - \Omega_{\dot{-}}) - E_{\dot{-}}(\Gamma_+ - \Omega_+) + \tfrac{1}{2}(\Gamma_{\dot{-}} - i\Sigma_{\dot{-}})(\Omega_+ - \Gamma_+) \\
& + \tfrac{1}{2}(\Gamma_+ - i\Sigma_+)(\Omega_{\dot{-}} - \Gamma_{\dot{-}}) \\
= {} & -2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-)\mathrm{e}^{S}(\hat{E}_{\dot{-}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}})(S + \bar{S}) \\
& -2\mathrm{e}^{S}(\hat{E}_{\dot{-}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}})\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-)(S + \bar{S}) \\
& +2\mathrm{e}^{S}(\hat{E}_{\dot{-}}\bar{S} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}}\bar{S})\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-)(S + \bar{S}) \\
& +2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+ S + A_+{}^-\hat{E}_- S)\mathrm{e}^{S}(\hat{E}_{\dot{-}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}})(S + \bar{S}) \\
= {} & -2(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-)(\hat{E}_{\dot{-}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}})(S + \bar{S}) \\
& -2(\hat{E}_{\dot{-}} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}})(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-)(S + \bar{S}) \\
= {} & -2(\{\hat{E}_+, \hat{E}_{\dot{-}}\} + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\{\hat{E}_+, \hat{E}_{\dot{+}}\} \\
& + A_+{}^-\{\hat{E}_{\dot{-}}, \hat{E}_-\} + A_+{}^-A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\{\hat{E}_-, \hat{E}_{\dot{+}}\} \\
& + \hat{E}_+ A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}} + A_+{}^-\hat{E}_- A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}} \\
& + \hat{E}_{\dot{-}}A_+{}^-\hat{E}_- + A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{E}_{\dot{+}}A_+{}^-\hat{E}_-)(S + \bar{S}) \\
= {} & 0
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Dabei haben wir (2.36) und (2.37) benutzt. Bleibt noch zu zeigen, daß die zweite und dritte Zeile gleich i mal der vierten Zeile sind. Dazu addieren wir die zweite und dritte Zeile und subtrahieren 2i mal die vierte Zeile

$$
\begin{aligned}
& [E_+\Gamma_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Omega_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Gamma_{\dot{-}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Omega_+ + \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Gamma_{\dot{-}} - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{-}}\Omega_+] \\
& + [E_+\Omega_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Gamma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\dot{-}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Gamma_+ + \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Omega_{\dot{-}} - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{-}}\Gamma_+] \\
& -2i[E_+\Sigma_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Sigma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\dot{-}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Sigma_+ + i\,\Sigma_+\Sigma_{\dot{-}}] = \\
& E_+(\Gamma_{\dot{-}} + \Omega_{\dot{-}}) + E_{\dot{-}}(\Omega_+ + \Gamma_+) \\
& -\tfrac{1}{2}(\Gamma_+ - i\Sigma_+)(\Omega_{\dot{-}} + \Gamma_{\dot{-}}) + \tfrac{1}{2}(\Gamma_{\dot{-}} - i\Sigma_{\dot{-}})(\Omega_+ + \Gamma_+) \\
& -2i[E_+\Sigma_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Sigma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\dot{-}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Sigma_+ + i\,\Sigma_+\Sigma_{\dot{-}}] =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2i[E_+\Sigma_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Sigma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\dot{-}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Sigma_+ + i\ \Sigma_+\Sigma_{\dot{-}}]& \\
-2i[E_+\Sigma_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Sigma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\dot{-}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Sigma_+ + i\ \Sigma_+\Sigma_{\dot{-}}] &= 0\ .
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Dabei haben wir die Relationen

$$
\Gamma_{\dot{-}} + \Omega_{\dot{-}} = 2i\Sigma_{\dot{-}}, \quad \Gamma_+ + \Omega_+ = 2i\Sigma_+ \tag{2.42}
$$

benutzt und erhalten

$$
F = i[E_+\Sigma_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Sigma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\dot{-}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Sigma_+ + i\ \Sigma_+\Sigma_{\dot{-}}]\ . \tag{2.43}
$$

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch die Zwangsbedingung $\{\nabla_+, \nabla_{\dot{+}}\} = i\nabla_{\ddagger}$. Er liefert die Bedingungen

$$
\begin{aligned}
\{E_+, E_{\dot{+}}\} - \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{+}}E_+ + \tfrac{1}{2}\Gamma_+E_{\dot{+}} - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{+}}E_+ + \tfrac{i}{2}\Sigma_+E_{\dot{+}} &= i\nabla_{\ddagger}\ , \\
E_+\Gamma_{\dot{+}} + E_{\dot{+}}\Omega_+ + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{+}}\Omega_+ - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{+}}\Omega_+ + \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Gamma_{\dot{+}} + \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Gamma_{\dot{+}} &= 0\ , \\
E_+\Omega_{\dot{+}} + E_{\dot{+}}\Gamma_+ + \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Omega_{\dot{+}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{+}}\Gamma_+ - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{+}}\Gamma_+ + \tfrac{i}{2}\Sigma_+\Omega_{\dot{+}} &= 0\ , \\
E_+\Sigma_{\dot{+}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\dot{+}} + E_{\dot{+}}\Sigma_+ + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{+}}\Sigma_+ + i\Sigma_+\Sigma_{\dot{+}} &= 0\ ,
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

und $\{\nabla_-, \nabla_{\dot{-}}\} = i\nabla_=$ liefert

$$
\begin{aligned}
\{E_-, E_{\dot{-}}\} - \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}E_- - \tfrac{1}{2}\Gamma_-E_{\dot{-}} + \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{-}}E_- + \tfrac{i}{2}\Sigma_-E_{\dot{-}} &= i\nabla_=\ , \\
E_-\Gamma_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Omega_- - \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Omega_- - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{-}}\Omega_- - \tfrac{1}{2}\Gamma_-\Gamma_{\dot{-}} + \tfrac{i}{2}\Sigma_-\Gamma_{\dot{-}} &= 0\ , \\
E_-\Omega_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Gamma_- - \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Gamma_- - \tfrac{i}{2}\Sigma_{\dot{-}}\Gamma_- + \tfrac{i}{2}\Sigma_-\Omega_{\dot{-}} &= 0\ , \\
E_-\Sigma_{\dot{-}} + E_{\dot{-}}\Sigma_- - \tfrac{1}{2}\Gamma_-\Sigma_{\dot{-}} - \tfrac{1}{2}\Gamma_{\dot{-}}\Sigma_- + i\Sigma_-\Sigma_{\dot{-}} &= 0\ .
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Wir können jetzt überprüfen, ob die restlichen Bedingungen in (2.18), (2.28) und (2.44) und (2.45) konsistent erfüllt sind. Solange die A's ihre Bedingungen (2.22), (2.26) und (2.23), (2.25) erfüllen, ist es einfach zu zeigen, daß sie konsistent sind. Wir wollen hier nicht alle nachrechen, sondern die Rechnung an der zweiten Zeile von Gleichung (2.18) demonstrieren.

$$
2E_+\Gamma_+ + (\Omega_+ - i\Sigma_+)\Gamma_+ \ = \ 0 \tag{2.46}
$$

Setzen wir die explizieten Ausdrücke für die Vielbeine ein und benutzen Gleichung (2.21), dann finden wir

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E} + A_+{}^-\hat{E}_-)\Gamma_+ - 2\mathrm{e}^{\bar{S}}(\hat{E}_+\bar{S} + A_+{}^-\hat{E}_-\bar{S})\Gamma_+ \ &= \\
2E_+\bar{S}\Gamma_+ - 2E_+\bar{S}\Gamma_+& \\
+2\mathrm{e}^{2\bar{S}}(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-)(2(\hat{E}_+ + A_+{}^-\hat{E}_-)(S + \bar{S})&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+(\hat E_- A_+{}^- - A_+{}^- - A_+{}^- \hat E_+ A_-{}^+)) &= \\
4\mathrm{e}^{2\bar S}(A_+{}^-\{\hat E_-, \hat E_+\} + \hat E_+ A_+{}^- \hat E_- + A_+{}^- \hat E_- A_+{}^- \hat E_-)(S+\bar S) & \\
+2\mathrm{e}^{2\bar S}(\hat E_+ \hat E_- A_+{}^- - \hat E_+ A_+{}^- \hat E_+ A_-{}^+ & \\
-A_+{}^- \hat E_- A_+{}^- \hat E_+ A_-{}^+ - A_+{}^- A_+{}^- \hat E_- \hat E_+ A_-{}^+) &= 0 \ . \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn wir die (2.22), (2.23) und (2.26) benutzen.

Wir haben in diesem Abschnitt die Zwangsbedingungen (2.9) gelöst und das gekrümmte Vielbein und die Konnektionen als Funktionen des flachen Vielbeins und der Präpotentiale berechnet (2.32), (2.39). Dabei steckt das Präpotential H^m in den A's . Wir müssen also noch $A_+{}^-$ und $A_-{}^+$ bestimmen und überpüfen, ob sie ihre Differentialgleichungen (2.22), (2.25) und (2.36) erfüllen.

2.3 Bestimmung von A

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die A's als Funktionen der Präpotentiale H^m bestimmt werden können. Dazu definieren wir uns zuerst

$$
\begin{aligned}
\hat E_{\ddagger} &= -i\,\{\hat E_+, \hat E_{\dot +}\} \\
&= \partial_{\ddagger} + [-D_+ H_{\dot +}{}^n + D_{\dot +} H_+{}^n - iH_+{}^m \partial_m H_{\dot +}{}^n - iH_{\dot +}{}^m \partial_m H_+{}^n]\partial_n \ , \\
\hat E_{=} &= -i\,\{\hat E_-, \hat E_{\dot -}\} \\
&= \partial_{=} + [-D_- H_{\dot -}{}^n + D_{\dot -} H_-{}^n - iH_-{}^m \partial_m H_{\dot -}{}^n - iH_{\dot -}{}^m \partial_m H_-{}^n]\partial_n \ . \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

Die Struktur der gedachten Differentialoperatoren liefert

$$
\begin{aligned}
\{\hat E_+, \hat E_{\dot -}\} &= \tilde C_{+\dot -}{}^{\ddagger} \hat E_{\ddagger} + \tilde C_{+\dot -}{}^{=} \hat E_{=} \ , \\
\{\hat E_-, \hat E_{\dot +}\} &= \tilde C_{-\dot +}{}^{\ddagger} \hat E_{\ddagger} + \tilde C_{-\dot +}{}^{=} \hat E_{=} \ . \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

Mit diesen Definitionen zerfällt Gleichung (2.37) in zwei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\tilde C_{+\dot -}{}^{\ddagger} + iA_{\dot -}{}^{\dot +} + \tilde C_{-\dot +}{}^{\ddagger} A_+{}^- A_{\dot -}{}^{\dot +} &= 0 \ , \\
\tilde C_{+\dot -}{}^{=} + iA_+{}^- + \tilde C_{-\dot +}{}^{=} A_+{}^- A_{\dot -}{}^{\dot +} &= 0 \ . \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir von $\{\nabla_-, \nabla_{\dot +}\}$

$$
\begin{aligned}
\tilde C_{-\dot +}{}^{\ddagger} + iA_-{}^+ + \tilde C_{+\dot -}{}^{\ddagger} A_-{}^+ A_{\dot +}{}^{\dot -} &= 0 \ , \\
\tilde C_{-\dot +}{}^{=} + iA_{\dot +}{}^{\dot -} + \tilde C_{+\dot -}{}^{=} A_-{}^+ A_{\dot +}{}^{\dot -} &= 0 \ . \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Entfernen wir eine der Unbekannten in Gleichung (2.50)

$$A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}} = -\frac{\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=} + iA_+{}^-}{\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=} A_+{}^-} \;, \tag{2.52}$$

so erhalten wir eine quadratische Gleichung für A

$$(A_+{}^-)^2 + \frac{i}{\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}}(\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{\ddagger}\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=} - \tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=}\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger} + 1)A_+{}^- + \frac{\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=}}{\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}} \;, \tag{2.53}$$

die sich leicht auflösen läßt

$$\begin{aligned} A_+{}^- \;=\; & \frac{\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{\ddagger}\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=} - \tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=}\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger} + 1}{2i\,\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}} \\ & - \frac{\sqrt{(\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{\ddagger}\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=} - \tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=}\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger} + 1)^2 + 4\,\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=}\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}}}{2i\,\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}} \;. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}} \;=\; & \frac{\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=} - \tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=}\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{\ddagger} + 1}{2i\,\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=}} \\ & - \frac{\sqrt{(\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=} - \tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=}\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{\ddagger} + 1)^2 + 4\,\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=}\tilde{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{\ddagger}}}{2i\,\tilde{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=}} \;. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Dabei haben wir die Vorzeichen der Wurzeln so gewählt, daß A verschwindet, wenn $\hat{C}$ und damit H^m verschwindet. Die Lösungen zu (2.51) können wir über die Relationen

$$A_-{}^+ = \frac{\hat{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}}{\hat{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=}}A_+{}^- \;, \quad A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{\dot{-}} = \frac{\hat{C}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=}}{\hat{C}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{\ddagger}}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}} \tag{2.56}$$

aus (2.50) berechnen.

Bleibt noch zu zeigen, daß die A's die Gleichungen (2.23) und (2.37) erfüllen. Wir verfolgen dabei folgende Strategie: zuerst berechnen wir den Kommutator von (2.37) mit $\hat{E}_+$

$$[\hat{E}_+, \{\hat{E}_+, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}\}]$$

$$
\begin{aligned}
+[\hat E_+, A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}\{\hat E_+, \hat E_{\underset{+}{\bullet}}\}] + [\hat E_+, A_+{}^-\{\hat E_-, \hat E_{\underset{-}{\bullet}}]& \\
+[\hat E_+, A_+{}^- A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}\{\hat E_-, \hat E_{\underset{+}{\bullet}}\}] &= 0 \\
\hat E_+ A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}\{\hat E_+, \hat E_{\underset{+}{\bullet}}\} + E_+ A_+{}^-\{\hat E_-, \hat E_{\underset{-}{\bullet}}\}& \\
+A_+{}^-[\hat E_+, \{\hat E_-, \hat E_{\underset{-}{\bullet}}\}]& \\
+A_+{}^- A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}[\hat E_+, \{\hat E_-, \hat E_{\underset{+}{\bullet}}\}]& \\
+\hat E_+(A_+{}^- A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}})\{\hat E_-, \hat E_{\underset{+}{\bullet}}\} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Benutzen wir die Jacobi-Identitäten für dreier Kommutatuoren und setzten die Koeffizieten vor $\hat E_{\ddagger}$ und $\hat E_{=}$ null, so erhalten wir folgende Gleichungen

$$
\begin{aligned}
ix + \hat C_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=}(A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}} x + A_+{}^- y) &= -A_+{}^-(i\hat C_{+=}{}^{=} - iA_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}\hat C_{-\ddagger}{}^{=})\ , \\
iy + \hat C_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}(A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}} x + A_+{}^- y) &= -A_+{}^-(i\hat C_{+=}{}^{\ddagger} - iA_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}\hat C_{-\ddagger}{}^{\ddagger})\ .
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

Dabei haben wir

$$
\begin{aligned}
x &= \hat E_+ A_+{}^-\ , \\
y &= \hat E_+ A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

definiert. Berechnen wir den Kommutator mit $\hat E_-$ und benutzen die Jacobi–Identitäten, dann bekommen wir

$$
\begin{aligned}
iu + \hat C_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{=}(A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}} u + A_+{}^- v) &= i\hat C_{+=}{}^{=} - iA_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}\hat C_{-\ddagger}{}^{=}\ , \\
iv + \hat C_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger}(A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}} u + A_+{}^- v) &= i\hat C_{+=}{}^{\ddagger} - iA_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}\hat C_{-\ddagger}{}^{\ddagger}
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
u &= \hat E_- A_+{}^-\ , \\
v &= \hat E_- A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{\dot{+}}\ .
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Die Lösungen zu den beiden unteren Gleichungen sind proportional zu den Lösungen der oberen beiden und zwar mit dem Proportionalitätsfaktor $-A_+{}^-$, was den Inhalt von (2.22) und der ersten Zeile von (2.36) demonstriert. Indem wir den Kommutator von (2.37) mit $\hat E_{\underset{+}{\bullet}}$ und $\hat E_{\underset{-}{\bullet}}$ berechnen, können wir (2.25) und die zweite Zeile von (2.36) überprüfen.

2.4 Super-Weyl–Transformationen

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir in diesem Abschnitt auf die Symmetrie der Zwangsbedingungen (2.9) eingehen. Die Zwangsbedingungen (2.9) sind invariant unter den lokalen Super–Weyl(Skalen) Transformationen im N=2 Superraum [24, 26]. Der Transformationsparameter L kann als reell angenommen werden, da sich sein Imaginärteil in die lokalen $U_{\mathrm{V}}(1)$ Transformationen absorbieren läßt. Die Skalierung kann als Verschiebung im Skalenkompensator $S \to S + L$ eingebaut werden. Um das Transformationsverhalten der Vielbeine und Konnektionen zu berechnen, setzen wir die Transformation $S \to S + L$ in (2.16), (2.32) und (2.39) ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} E_\pm &\to \mathrm{e}^L E_\pm \;, \\ \Omega_\pm &\to \mathrm{e}^L \Omega_\pm \;, \\ \Sigma_\pm &\to \mathrm{e}^L(\Sigma_\pm - 2iE_\pm L) \;, \\ \Gamma_\pm &\to \mathrm{e}^L(\Gamma_\pm \pm 4E_\pm L) \;. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Wenden wir (2.62) auf die Gleichungen (2.29) und (2.43) an, dann können wir das Transformationsverhalten der Supergravitationsfelder berechnen. Für $\bar{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{R} &= -E_+\Gamma_- - E_-\Gamma_+ + \tfrac{1}{2}(\Omega_+ + i\Sigma_+)\Gamma_- - \tfrac{1}{2}(\Omega_- - i\Sigma_-)\Gamma_+ \\ &\to -\mathrm{e}^L E_+ \mathrm{e}^L(\Gamma_- - 4E_-L) - \mathrm{e}^L E_- \mathrm{e}^L(\Gamma_+ + 4E_+L) \\ &\quad +\frac{1}{2}(\mathrm{e}^L\Omega_+ + i\mathrm{e}^L(\Sigma_+ - 2iE_+L))\mathrm{e}^L(\Gamma_- - 4E_-L) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^L\Omega_- - i\mathrm{e}^L(\Sigma_- - 2iE_-L))\mathrm{e}^L(\Gamma_+ + 4E_+L) \\ &= e^{2L}(\bar{R} + 4[\nabla_-, \nabla_+]L) \;, \end{aligned} \tag{2.63}$$

und für F bekommen wir

$$\begin{aligned} F &= i[E_+\Sigma_{\underline{\bullet}} + E_{\underline{\bullet}}\Sigma_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma_+\Sigma_{\underline{\bullet}} + \tfrac{1}{2}\Gamma_{\underline{\bullet}}\Sigma_+ + i\Sigma_+\Sigma_{\underline{\bullet}}] \\ &\to i[\mathrm{e}^L E_+ \mathrm{e}^L(\Sigma_{\underline{\bullet}} + 2iE_{\underline{\bullet}}L) + \mathrm{e}^L E_{\underline{\bullet}}(\Sigma_+ - 2iE_+L) \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^L(\Gamma_+ + 4E_+L)\mathrm{e}^L(\Sigma_{\underline{\bullet}} + 2iE_{\underline{\bullet}}L) + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^L(\Gamma_{\underline{\bullet}} - 4E_{\underline{\bullet}}L)\mathrm{e}^L(\Sigma_+ - 2iE_+L) \\ &\quad +i\mathrm{e}^L(\Sigma_+ - 2iE_+L)\mathrm{e}^L(\Sigma_{\underline{\bullet}} + 2iE_{\underline{\bullet}}L)] - \\ &= \mathrm{e}^{2L}(F + 2[\nabla_{\underline{\bullet}}, \nabla_+]L) \;. \end{aligned} \tag{2.64}$$

2.5 Zusammenfassung

Wir haben uns in diesem Kapitel mit der nichtminimalen zweidimensionalen (2,2) Supergravitation beschäftigt. Zuerst haben wir uns die Geometrie angeschaut und die Zwangsbedingungen (2.9) aufgestellt. Indem wir dann das Vielbein supersymmetrisch geeicht haben, konnten wir eine Beziehung zwischen dem gekrümmten und flachen Vielbein (2.16) aufstellen. Damit waren wir in der Lage, die Zwangsbedingungen (2.9) zu lösen und Gleichungen für die Konnektionen (2.32) und (2.39) anzugeben. Weiter haben wir das Skalentransformationsverhalten der Superfelder des Supergravitationsmultiplett $\bar{R}$ in (2.29) und für F in (2.43) untersucht.

In den nächsten Kapiteln wollen wir versuchen, die Rechnungen auf die zweidimensionale (4,4) Supergravitation zu übertragen. Dort haben wir neben der $SO(1,1)$ Lorentztransformation eine $SU(2)$ Transformation. Diese $SU(2)$ Struktur wird uns unsere Berechnungen erschweren.

Kapitel 3

N=4 Superraum

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Geometrie der zweidimensionalen minimalen (4,4) Supergravitation. Der flache $N = 4$ Superraum in zwei Dimensionen wird durch folgende Koordinaten parametrisiert

$$z^A = (x^{\ddagger}, x^{=}, \theta^{+i}, \theta^{-i}, \theta^{\dot{+}}{}_i, \theta^{\dot{-}}{}_i) \ . \tag{3.1}$$

Dabei sind $x^{\ddagger}$ uund $x^{=}$ zwei reelle bosonische (kommutierende) Koordinaten und $\theta^{\pm i} i = 1, 2$ sind komplexe fermionische (antikommutierende) Koordinaten. Die fermionischen Koordinaten $\theta^{\pm i}$ sind Spinoren bezüglich der $SU(2)$. Ihr komplex Konjugiertes ist durch

$$(\theta^{\pm i})^* \equiv - \theta^{\dot{\pm}}{}_i \quad , \quad \theta^{\dot{\pm}\, i} = \mathcal{C}^{ij} \theta^{\dot{\pm}}{}_j \tag{3.2}$$

definiert, wobei der Stern die gewöhnliche komplexe Konjugation anzeigt. Die $SU(2)$ Indizes werden kanonischen von links oben nach rechts unten (Nord-West/Süd-Ost Regel) kontrahiert und mit der Matrix $\mathcal{C}^{ij}$ beziehungsweise mit $\mathcal{C}_{ij}$ hoch und runtergezogen, deren explizite Form durch $\mathcal{C}^{ij} = i\varepsilon^{ij}$ und $(\mathcal{C}^{ij})^* = \mathcal{C}_{ij}$ gegeben ist. Im folgenden arbeiten wir wie in [15, 13] in der Licht–Kegel Basis.

Die kovarianten Spinorableitungen im flachen (4,4) Superraum erfüllen die Algebra

$$\{D_{+i}, D_{\dot{+}j}\} = i\, \mathcal{C}_{ij}\, \partial_{\ddagger} \ , \qquad \{D_{-i}, D_{\dot{-}j}\} = i\, \mathcal{C}_{ij}\, \partial_{=} \ , \tag{3.3}$$

während die restlichen (Anti-) Kommutatoren verschwinden. Die lokale Symmetrie der N=4 Superfeld Supergravitation enthält die N=4 allgemeinen Superraum Koordinatentransformationen, lokale Lorentzrotation und $SU(2)$ interne Rotation. Daher beinhaltet nach [3, 4] die gesamte kovariante Ableitung im gekrümmten N=4 Superraum die Tangentialraumgeneratoren für alle Symmetrien mit zugehörigen Konnektionen

$$\nabla_A = E_A^M D_M + \Omega_A \mathcal{M} + i\, \Gamma_A \cdot \mathcal{Y} \ . \tag{3.4}$$

Dabei haben wir das N=4 Supervielbein E_A^M, den Lorentzgenerator $\mathcal{M}$ samt Lorentzkonnektion Ω_A und den $SU(2)$ Generator $\mathcal{Y}_i{}^j$ mit der $SU(2)$ Konnektion $(\Gamma_A)_j{}^i$ eingeführt. Bei der Kontraktion der $SU(2)$ Indizes vereinbaren wir folgende Notation

$$\Gamma_A \cdot \mathcal{Y} \equiv (\Gamma_A)_j{}^i \mathcal{Y}_i{}^j . \tag{3.5}$$

Die Operatoren ∇_A ändern sich kovariant unter allen lokalen Symmetrietransformationen

$$\nabla'_A = e^{-\mathcal{H}} \nabla_A e^{\mathcal{H}} \ , \qquad \mathcal{H} = H^M \partial_M + H\mathcal{M} + iH_j{}^i \mathcal{Y}_i{}^j \ , \tag{3.6}$$

wobei H^M, H und $iH_j{}^i$ die infinitesimalen Superfeldparameter der allgemeinen N=4 Superraum Koordinaten, lokalen Lorentz und der $SU(2)$ Transformation sind.

Wir nehmen an, daß das Supervielbein invertierbar ist und identifizieren die Komponenten in niedrigster Ordnung der θ-Entwicklung des Superfeldes E_μ^a mit dem Zweibein

$$E_\mu^a\Big| = e_\mu^a \ . \tag{3.7}$$

Analog identifizieren wir

$$E_\mu^{i\pm}\Big| = \psi_\mu^{i\pm} \tag{3.8}$$

mit den vier Gravitini $\psi_\mu^{i\pm}$ und

$$\Gamma_{\mu j}{}^i\Big| = A_{\mu j}{}^i \tag{3.9}$$

mit dem $SU(2)$ Triplett von Graviphotonen.

Die Superfeld Torsion, der Krümmungstensor und die Feldstärken sind wie gewöhnlich definiert

$$[\nabla_A, \nabla_B\} \equiv T_{AB}{}^C \nabla_C + R_{AB}\mathcal{M} + i\ F_{AB} \cdot \mathcal{Y} \ . \tag{3.10}$$

Die Generatoren der lokalen Lorentz und der $SU(2)$ Transformation werden durch ihre Wirkung auf Spinoren oder Spinorableitungen definiert

$$[\mathcal{M}, \nabla_{\pm i}] \ = \ \pm \tfrac{1}{2} \nabla_{\pm i} \ , \quad [\mathcal{M}, \nabla_{\dot\pm}{}^i] \ = \ \pm \tfrac{1}{2} \nabla_{\dot\pm}{}^i \ , \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{Y}_i{}^j, \nabla_{\pm k}] \ &= \ +\delta_k{}^j \nabla_{\pm i} - \tfrac{1}{2}\delta_i{}^j \nabla_{\pm k} \ , \\ [\mathcal{Y}_i{}^j, \nabla_{\dot\pm}{}^k] \ &= \ -\delta_i{}^k \nabla_{\dot\pm}{}^j + \tfrac{1}{2}\delta_i{}^j \nabla_{\dot\pm}{}^k \ . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Als Zwangsbedingungen an die Torsion nehmen wir folgende Zwangsbedingungen an [23]

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha i \beta j}{}^{m} &= 0 \quad T_{\alpha i \dot{\beta}}{}^{j\ m} = \tfrac{1}{2}\delta_i{}^j (C\gamma^m)_{\alpha\beta}\ , \\
T_{\alpha i \beta j}{}^{\dot{\gamma} k} &= 0 \quad T_{\alpha i \dot{\beta}}{}^{j\ \gamma}{}_{k} = 0\ , \\
T_{\alpha i \dot{\beta} j}{}^{\gamma k} &= 0 \quad T_{\alpha i m}{}^{n} = 0\ , \\
T_{\alpha i m}{}^{\gamma k} &= \tfrac{1}{4}\Phi_\alpha{}^\beta (C\gamma_m C^{-1})_\beta{}^\gamma \delta_i{}^k \quad \Phi_\alpha{}^\beta \equiv \delta_\alpha{}^\beta S + i(\gamma_3)_\alpha{}^\beta T\ , \\
T_{\alpha i m j}{}^{\dot{\delta}} &= \tfrac{1}{2}\bar{R} C_{ij} (C\gamma^3\gamma_m C^{-1})_\alpha{}^\beta \quad T_{mn}{}^{p} = 0\ .
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Sie können in der Licht–Kegel–Basis durch folgende Antikommutatoren beschrieben werden ([12], [15])

$$
\begin{aligned}
\{\nabla_{\pm i}, \nabla_{\pm j}\} = 0\ , \quad \{\nabla_{+i}, \nabla_{\dot{+}j}\} &= i\mathcal{C}_{ij}\nabla_{\ddagger}\ , \quad \{\nabla_{-i}, \nabla_{\dot{-}j}\} = i\mathcal{C}_{ij}\nabla_{=}\ , \\
\{\nabla_{+i}, \nabla_{-}{}^{j}\} &= -\tfrac{i}{2} R^* \left(\delta_i{}^j \mathcal{M} - \mathcal{Y}_i{}^j\right)\ , \\
\{\nabla_{+i}, \nabla_{\dot{-}}{}^{j}\} &= -\tfrac{i}{2} S \left(\delta_i{}^j \mathcal{M} - \mathcal{Y}_i{}^j\right) - \tfrac{1}{2} T \left(\delta_i{}^j \mathcal{M} - \mathcal{Y}_i{}^j\right)\ .
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Dies liefert als Feldstärken

$$
F_{+i-j} = \frac{1}{2}\bar{R}\mathcal{Y}_{ij}\ , \quad F_{+i\dot{-}j} = \frac{1}{2}(S - iT)\mathcal{Y}_{ij}\ , \quad F_{\dot{+}i-j} = -\frac{1}{2}(S + iT)\mathcal{Y}_{ij}\ . \tag{3.15}
$$

Aus den Bianchi–Identitäten lassen sich zusätzliche Zwangsbedingungen berechnen

$$
\begin{aligned}
&[\nabla_{+i}, \nabla_{=}] = \\
&-\frac{i}{2}\mathcal{C}^{kj}([\nabla_{\dot{-}k}, \{\nabla_{+i}, \nabla_{-j}\}] + [\nabla_{-j}, \{\nabla_{\dot{-}k}, \nabla_{+i}\}]) = \\
&-\frac{i}{2}\mathcal{C}^{kj}([\nabla_{\dot{-}k}, -\frac{i}{2}\bar{R}(\mathcal{C}_{ij}\mathcal{M} - \mathcal{Y}_{ij})] + [\nabla_{-j}, -\frac{i}{2}(S - iT)(\mathcal{C}_{ik}\mathcal{M} - \mathcal{Y}_{ik})]) = \\
&\frac{1}{4}[-2R^*\ \nabla_{\dot{-}i} + 2(S - iT)\nabla_{-i} + (\nabla_{\dot{-}}{}^{j} R^* - \nabla_{-}^{j}\ (S - iT))\ (\mathcal{C}_{ij}\mathcal{M} - \mathcal{Y}_{ij})]\ ,
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

woraus sich die Feldstärke

$$
F_{+i=} = \frac{i}{4}\left(\nabla_{\dot{-}}{}^{j} R^* - \nabla_{-}^{j}\ (\ S - iT\ )\right)\mathcal{Y}_{ij} \tag{3.17}
$$

ablesen läßt. Für $[\nabla_{-i}, \nabla_{\ddagger}]$ bekommen wir analog

$$
\begin{aligned}
&[\nabla_{-i}, \nabla_{\ddagger}] = \\
&-\frac{i}{2}\mathcal{C}^{kj}([\nabla_{\dot{+}k}, \{\nabla_{-i}, \nabla_{+j}\}] + [\nabla_{+j}, \{\nabla_{\dot{+}k}, \nabla_{-i}\}]) = \\
&-\frac{i}{2}\mathcal{C}^{kj}([\nabla_{\dot{+}k}, -\frac{i}{2}\bar{R}(\mathcal{C}_{ji}\mathcal{M} - \mathcal{Y}_{ij})]) + [\nabla + j, \frac{i}{2}(S + iT)(\mathcal{C}_{ki}\mathcal{M} - \mathcal{Y}_{ik}]) = \\
&\frac{1}{4}\ [-2\bar{R}\nabla_{\dot{+}i} - 2(\ S + iT\ )\ \nabla_{+i} - (\nabla_{\dot{+}}{}^{j}\bar{R} - \nabla_{+}^{j}\ (S + iT)\ )(\mathcal{C}_{ij}\mathcal{M} + \mathcal{Y}_{ij})\ ]
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

mit der Feldstärke

$$F_{-i\ddagger} = \frac{i}{4}\Big(\nabla_{\dot{+}}{}^{j}\bar{R} - \nabla_{+}{}^{j}\,(\,S + iT\,)\Big)\,\mathcal{Y}_{ij} \quad . \tag{3.19}$$

Weiterhin finden wir

$$[\nabla_{+i}, \nabla_{\ddagger}] \;=\; 0\;, \qquad [\nabla_{-i}, \nabla_{=}] \;=\; 0\;, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
&[\nabla_{\ddagger}, \nabla_{=}] = \\
&-\tfrac{1}{4}\mathcal{C}^{lk}\mathcal{C}^{ji}(\{\nabla_{+i}, [\{\nabla_{\dot{+}j}, \nabla_{-k}\}, \nabla_{\dot{-}l}]\} + \{\nabla_{+i}, [\{\nabla_{\dot{+}j}, \nabla_{\dot{-}l}\}, \nabla_{-k}]\} \\
&+\{\nabla_{\dot{+}j}, [\{\nabla_{+i}, \nabla_{-k}\}, \nabla_{\dot{-}l}]\} + \{\nabla_{\dot{+}j}, [\{\nabla_{+i}, \nabla_{\dot{-}l}\}, \nabla_{-k}]\}) = \\
&\frac{i}{4}\Big[+(\nabla_{-}{}^{i}R)\nabla_{+i} - (\nabla_{+}{}^{i}R)\nabla_{-i} - (\nabla_{\dot{-}}{}^{i}\bar{R})\nabla_{\dot{+}i} + (\nabla_{\dot{+}}{}^{i}\bar{R})\nabla_{\dot{-}i} - (\nabla_{\dot{-}}{}^{i}(S+iT))\nabla_{+i} \\
&+(\nabla_{-}{}^{i}(S-iT))\nabla_{\dot{+}i} - (\nabla_{\dot{+}}{}^{i}(S-iT))\nabla_{-i} + (\nabla_{+}{}^{i}(S+iT))\nabla_{\dot{-}i}\Big] \\
&+\frac{1}{2}\Big[\;R\bar{R} - S^2 - T^2 - \tfrac{i}{4}(\nabla_{+}{}^{i}\nabla_{-i}R) + \tfrac{i}{4}(\nabla_{\dot{+}}{}^{i}\nabla_{\dot{-}i}\bar{R}) \\
&-\tfrac{i}{4}(\nabla_{\dot{+}}{}^{i}\nabla_{-i}(S-iT)) + \tfrac{i}{4}(\nabla_{+}{}^{i}\nabla_{\dot{-}i}(S+iT))\Big]\mathcal{M} \\
&+\frac{i}{8}\Big[(\nabla_{+}{}^{i}\nabla_{-j}R) - (\nabla_{\dot{+}}{}^{i}\nabla_{\dot{-}j}\bar{R}) + (\nabla_{\dot{+}}{}^{i}\nabla_{-j}(S-iT)) - (\nabla_{+}^{i}\nabla_{\dot{-}j}(S+iT))\Big]\mathcal{Y}_{i}{}^{j},
\end{aligned}$$

$$[\nabla_{\ddagger}, \nabla_{\ddagger}] \;=\; 0\;, \qquad [\nabla_{=}, \nabla_{=}] \;=\; 0\;. \tag{3.21}$$

Aus der Bianchi–Identiät

$$\nabla F = 0$$

$$\nabla_C F_{AB} + \nabla_B F_{AC} + \nabla_A F_{BC} - T_{CB}{}^{D} F_{DA} - T_{BA}{}^{D} F_{DB} = 0 \tag{3.22}$$

finden wir für den Fall $A = -i$ und $B = +j$ folgende Zwangsbedingungen an die $SU(2)$ Feldstärken F

$$\begin{aligned}
\nabla_{+k}\; F_{+i\;-j} + \nabla_{+j}\; F_{+k\;-i} \;&=\; 0\;, \\
\nabla_{-k}\; F_{+i\;-j} + \nabla_{-i}\; F_{+j\;-k} \;&=\; 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

und als konsistente Gleichungen

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{-}k}\; F_{+i\;-j} + \nabla_{-i}\; F_{+j\;\dot{-}k} - T_{-i\;\dot{-}k}{}^{=}\; F_{=+j} \;&=\; 0\;, \\
\nabla_{\dot{+}k}\; F_{+i\;-j} + \nabla_{+j}\; F_{\dot{+}k\;-i} - T_{+j\;\dot{+}k}{}^{\ddagger}\; F_{\ddagger-i} \;&=\; 0\;.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Setzen wir die expliziten Ausdrücke für die Feldstärken ein

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_{+k}\bar{R}\mathcal{Y}_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_{+j}\bar{R}\mathcal{Y}_{ki} = 0 \ , \\
\frac{1}{2}\nabla_{-k}\bar{R}\mathcal{Y}_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_{-j}\bar{R}\mathcal{Y}_{ki} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

so folgt

$$
\nabla_{\dot{+}i} R = 0 \ . \tag{3.26}
$$

Der Fall $A = \dot{-}\, i$ und $B = +j$ liefert

$$
\begin{aligned}
\nabla_{+k}\ F_{+i\ \dot{-}j} + \nabla_{+j}\ F_{+k\ \dot{-}i} \ &= \ 0 \ , \\
\nabla_{\dot{-}k}\ F_{+i\ \dot{-}j} + \nabla_{\dot{-}i}\ F_{+j\ \dot{-}k} \ &= \ 0
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

als Zwangsbedingungen an die $SU(2)$ Feldstärken und als konsistente Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\nabla_{-k}\ F_{+i\ \dot{-}j} + \nabla_{\dot{-}}\ F_{+j\ -k} - T_{\dot{-}i\ -k}{}^{=}\ F_{=+j} \ &= \quad 0 \ , \\
\nabla_{\dot{+}k}\ F_{+i\ \dot{-}j} + \nabla_{+j}\ F_{\dot{+}k\ -i} - T_{+j\ \dot{+}k}{}^{\ddagger}\ F_{\ddagger\dot{-}i} \ &= \quad 0 \ .
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Setzen wir hier die expliziten Ausdrücke für die Feldstärken ein

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\nabla_{+k}(S - iT)\mathcal{Y}_{ij} + \tfrac{1}{2}\nabla_{+j}(S - iT)\mathcal{Y}_{ik} = 0 \ , \\
\tfrac{1}{2}\nabla_{\dot{-}k}(S - iT)\mathcal{Y}_{ij} + \tfrac{1}{2}\nabla_{\dot{-}i}(S - iT)\mathcal{Y}_{jk} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

dann bekommen wir

$$
\begin{aligned}
\nabla_{+i} S \ &= \ i\nabla_{+i} T \\
\nabla_{-i} S \ &= \ -i\nabla_{-i} T.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Diese Relationen liefern die Zwangsbedingungen an das (4,4) Supergravitations-Multiplett, das aus dem komplexen skalaren Superfeld R und den reellen Superfeldern S und T besteht

$$
\nabla_{\dot{\pm}i} R \ = \ 0 \ , \quad \nabla_{\pm i} R \ = \ \pm\, 2\ \nabla_{\dot{\pm}i} S \ , \quad \nabla_{\pm i} S \ = \ \pm\ i\ \nabla_{\pm i} T \ , \tag{3.31}
$$

$$
[\nabla_{+}^{\ i}, \nabla_{+i}]R = [\nabla_{-}^{\ i}, \nabla_{-i}]R = 0 \ . \tag{3.32}
$$

Wir konnten aber die Relation

$$
\nabla_{\pm i} R \ = \ \pm\, 2\ \nabla_{\dot{\pm}i} S \tag{3.33}
$$

nicht aus den Bianchi–Identitäten ableiten, sondern übernehmen sie in unserer Notation aus [15].

Zusätzlich ergibt sich eine Realitätsbedingung der Form

$$\left(\nabla_{+i}\nabla_{\underset{-}{\bullet}j}S\right)^{*} = \nabla_{+}{}^{i}\nabla_{\underset{-}{\bullet}}{}^{j}S \ . \tag{3.34}$$

Damit haben wir die Bedingungen, die das Supergravitationsmultiplett definieren, gefunden.

(3.31) wurden von Gates, Hull und Rocek in [16] als die Zwangsbedingungen gefunden, die ein zweidimensionales N=4 getwistetes skalares Multiplett (TM-I) definieren. Von Gates, Lu und Oerter wurde dann in [15] als Prinzip gefordert, daß die eichinvarianten Komponenten des zweidimensionalen N=4 off-shell Supergravitationsmultipletts isomorph zu denen des zugehörigen skalaren Multipletts sind.

N	Sklares Multiplett	Supergravitationsmultiplett
4	$(B, F, G, \chi, A, A_i{}^j)$	$(R, S, T, \Sigma, \mathcal{R}, \mathcal{F}_i{}^j)$

Dabei bezeichnet Σ die superkovariante Gravitinofeldstärke, $\mathcal{R}$ die superkovariante Riemannkrümmung und $\mathcal{F}_i{}^j$ die $SU(2)$ Feldstärke. Daher erfüllen die Spin-0 Felder (R,S,T) des Supergravitationsmultipletts dieselben Zwangsbedingungen wie die Spin-0 Felder (B,F,G) des zugehörigen skalaren Multipletts. Auf das TM-I Multiplett gehen wir in den nächten zwei Kapiteln ausführlich ein. Dort untersuchen wir die Supersymmetrietransformationen, bei deren Berechnung wir die Bedingungen (3.33) und (3.34) fordern müssen.

Rechnet man in Komponenten, dann beinhaltet das Supergravitationmultiplett das Graviton e_μ^a, vier Gravitini $\psi_\mu^{i\pm}$, ein $SU(2)$ Triplett von Graviphotonen A_μ^I, $I = 1, 2, 3$, ein komplexes skalares Hilfsfeld R und zwei reelle Hilfsfelder S und T. Auf die Behandlung in Komponenten gehen wir in Kapitel 9 ausführlicher ein.

Kapitel 4

TM-I und TM-II Multiplett

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den zweidimensionalen (4,4) Hypermultipletts. Eine Klassifizierung von ihnen findet man in [17]. In dieser Arbeit wollen wir auf die zwei off-shell Hypermultipletts TM-I und TM-II eingehen. In beiden treten propagierende Skalare auf. Diese sind im TM-I alle in der Singlett–Darstellung bezüglich $SU(2)$ und in dem TM-II Multiplett treten ein $SU(2)$ Singlett und ein $SU(2)$ Triplett auf [17]. Das TM-II Multiplett kann uns als (4,4) Skalenkompensator dienen, da der Skalar den üblichen Weyl–Transformations–Parameter repräsentiert. Es gibt aber keinen offensichtlichen Grund, warum das TM-I Multiplett nicht auch als Skalenkompensator dienen sollte bis auf die Tatsache, daß es vier physikalische Skalare enthält, die alle auf gleichem Niveau sind.

4.1 TM-I Multiplett

Das TM-I Multilplett erhalten wir durch dimensionale Reduktion aus dem vierdimensionalen $N=2$ Vektormultiplett. Die verschiedenen $N=2$ Multipletts wurden von de Wit et al. in [18]-[20] untersucht und klassifiziert.

Der einfachste N=2 constraint, der das N=2 chirale Superfeld $\Phi(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha} i})$, $\mu = 0,1,2,3$, $i,j,\ldots = 1,2$ und $\alpha = 1,2$ definiert, lautet

$$D^i_\alpha \overline{\Phi} = \overline{D}_{\dot{\alpha} i} \Phi = 0 \ . \tag{4.1}$$

Dabei haben wir die flachen kovarianten Superraumableitungen

$$\begin{aligned} D^i_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta_i^{\ \alpha}} - \frac{i}{2} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha} i} \\ \overline{D}_i^{\ \dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^{\ i}} - \frac{i}{2} \partial^{\alpha\dot{\alpha}} \theta_{\alpha i} \end{aligned} \tag{4.2}$$

eingeführt, die die Algebra

$$\left\{D^i_\alpha, \overline{D}_{j\dot\beta}\right\} = 2i\delta^i_j\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu \tag{4.3}$$

erfüllen.

Wir benutzen dabei die Standard–Notation für zweikomponentige Spinoren in vier Dimensionen und die dazugehörigen Sigma–Matrizen [2, 22]. Das chirale Multiplett lautet [1]

$$\Phi = \exp\left\{-\frac{i}{2}\theta^\gamma_i\partial\bar\theta^i\right\}\left\{A + \theta^\alpha_i\xi_\alpha{}^i + \frac{1}{2}\theta_i\theta_jA^{ij} + \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta} + (\theta^3)^{i\alpha}\lambda_{i\alpha} + \theta^4q\right\} \tag{4.4}$$

mit den Supersymmetrietransformationen [2]

$$\begin{aligned}
\delta A &= \epsilon_i\xi^i\ ,\\
\delta\xi^i_\alpha &= A^{ij}\epsilon_{j\alpha} - i\partial_{\alpha\dot\beta}A\bar\epsilon^{i\dot\beta} + \epsilon^{i\beta}D_{\beta\alpha}\ ,\\
\delta A^{ij} &= \epsilon^{(i}\lambda^{j)} + \partial_\nu\xi^{\alpha(i}i\sigma_{\nu\alpha\dot\alpha}\bar\epsilon^{j)\dot\alpha}\ ,\\
\delta\lambda &= q\epsilon_{i\alpha} - i\partial_{\alpha\dot\beta}A_{ij}\bar\epsilon^{\dot\beta j} + i\partial_\nu D^\beta_\alpha\sigma_{\nu\beta\dot\alpha}\bar\epsilon^\alpha_i\ ,\\
\delta D_{\alpha\beta} &= -\epsilon_{i(\alpha}\varrho^i{}_{\beta)} - i\partial_\nu\xi^i{}_{(\alpha}\sigma_{\beta)\dot\gamma\nu}\bar\epsilon_i{}^{\dot\gamma}\ ,\\
\delta q &= i\partial_\nu\lambda_i{}^\alpha\sigma_{\nu\alpha\dot\beta}\bar\epsilon^{i\beta}\quad .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Dabei bilden $\epsilon_i{}^\alpha$ die vierdimensionalen $N = 2$ infinitesimalen Supersymmetrietransformationsparameter.

Das komplexe Supermultipltett $(\Phi, \overline{\Phi})$ reduziert sich auf ein reelles, indem wir eine zusätzliche Bedingung fordern [27]

$$\frac{1}{12}D^\alpha_iD_{\alpha j}D^{\beta i}D^j_\beta\Phi = \Box\overline{\Phi}\ . \tag{4.6}$$

Als Lösung der Bedingungen (4.1) und (4.6) erhalten wir [3]

$$\begin{aligned}
\Phi = {} & \exp\left\{-\frac{i}{2}\theta^\gamma_i\partial\bar\theta^i\right\}\Big[A + \theta^\alpha_i\psi^i_\alpha - \frac{1}{2}\theta^\alpha_i(\sigma_I)^i{}_j\theta^j_\alpha C^I\\
& + \frac{1}{2}\theta^\alpha_i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\theta^i_\beta F^{\mu\nu} - i(\theta^3)^{i\alpha}\tilde\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\bar\psi^{\dot\beta}_i + \theta^4\Box\bar A\Big]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

durch die Komponenten

$$\left(A, \psi^i_\alpha, C^I, F_{\mu\nu}\right) \tag{4.8}$$

[1] Wir definieren $(\theta^3)^{i\alpha} = (\partial/\partial\theta_{i\alpha})\theta^4$, $\theta^4 = \frac{1}{12}\theta^\alpha_i\theta_{\alpha j}\theta^{\beta i}\theta^j_\beta$ und $\theta_{ij} = \theta_i{}^\alpha\theta_{\alpha j}$, $\theta_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha i}\theta_\beta{}^i$.

[2] $\sigma_{\mu\alpha\dot\beta} = (\mathbf{1}, \vec\sigma)_{\alpha\dot\beta}$, $\tilde\sigma_\mu{}^{\dot\alpha\beta} = (\mathbf{1}, -\vec\sigma)^{\dot\alpha\beta}$

[3] $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu - \sigma_\nu\tilde\sigma_\mu)$, $\tilde\sigma_{\mu\nu} = \tilde\sigma_\mu\sigma_\nu - \tilde\sigma_\nu\sigma_\mu$

ausgedrückt. Dabei ist A ein komplexes skalares Feld, ψ^i ist ein vierdimensionales Majorana–Spinor Isodublett, C^I ist ein reeller Isovektor und $F_{\mu\nu}$ ist ein reelles antisymmetrisches Tensorfeld, das der Bedingung

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{4.9}$$

genügt. Die $N = 2$ Supersymmetrietransformationen lauten

$$\begin{aligned}
\delta A &= \epsilon_i \psi^i \ , \\
d\psi_\alpha^{\ i} &= -(\sigma_I)^i{}_j C_I \epsilon_\alpha^{\ j} - i\partial_{\alpha\dot\beta} A \bar\epsilon^{\dot\beta i} + (\sigma_{\mu\nu}\epsilon^i)_\alpha F^{\mu\nu} \ , \\
\delta C_I &= -\frac{i}{2}(\bar\epsilon_i \partial(\sigma_I)^{\ i}\psi^j) - \frac{i}{2}(\epsilon_i \partial(\sigma_I)^{\ i}\bar\psi^j) \ , \\
\delta F_{\mu\nu} &= -\tfrac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}^{\ \ \lambda}\partial_\lambda[(\epsilon_i\sigma_\varrho\bar\psi^i) + (\bar\epsilon_i\tilde\sigma_\varrho\psi^i)] \ \ .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Wegen der Bedingung (4.9) kann der Tensor $\tilde F_{\mu\nu}$, der dual zu $F_{\mu\nu}$ ist, als Feldstärke interpretiert werden. Aus diesem Grund nennt man das Supermultiplett (4.8) auch vierdimensionales $N = 2$ *Vektor*–Multiplett [22, 27, 28, 30].

Um das TM-I Multiplett zu erhalten, müssen wir das Vektor–Multiplett dimensional reduzieren, was mit der Bedingung $\partial_2 = \partial_3 = 0$ realisiert wird. Für die dimensionale Reduktion lautet die konventionelle Darstellung der vierdimensionalen 4×4 Diracmatrizen Γ_μ

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes I_2, \quad \Gamma_{2,3} = \gamma_3 \otimes i\sigma_{1,2} \ \ , \quad \mu = 0, 1 \tag{4.11}$$

mit $\gamma_3 = \gamma_0\gamma_1$. Die γ_μ bezeichnen hierbei die zweidimensionalen 2×2 Dirac–Gamma–Matrizen. Die Ladungskonjugationsmatrizen hängen wie folgt zusammen

$$C_4\Gamma_\mu C_4^{-1} = -\Gamma_\mu^{\ T}, \quad C_2\gamma_\mu C_2^{-1} = \gamma_\mu^{\ T}, \quad C_4 = C_2 \otimes \tau_1 \ \ . \tag{4.12}$$

Dann läßt sich ein vierdimensionaler Isospinor ψ^i auf die Form eines zweidimensionalen Spinors bringen

$$\begin{aligned}
\psi^i &= \begin{pmatrix} \psi^i \\ \tilde\psi^i \end{pmatrix} \ , \\
\tilde\psi^i &\equiv \varepsilon^{ij} C_2 \bar\psi_j^{\mathrm{T}} \ .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Der Constraint (4.9) läßt sich nach der dimensionalen Reduktion leicht lösen [22]

$$\begin{aligned}
F_{01} &= m = \text{const} \ , \quad F_{23} = D \ , \\
F_{\mu 2} &= \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu(B + \overline{B}) \ , \quad F_{\mu 3} = \tfrac{1}{2i}\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu(B - \overline{B}) \ \ .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

D ist ein reeles Skalarfeld und B ist ein komplexer Skalar. Weiterhin tritt eine dimensionsbehaftete Konstante m auf.

Schließlich enden wir beim zweidimensionalen $N = 4$ getwisteten Multiplett TM-I [28]

$$\Big(A, B, \psi^i, C_I, D\Big) \ . \tag{4.15}$$

Es besteht aus den zwei komplexen Skalaren A und B, dem zweidimensionalen Dirac–Spinor Isodublett ψ^i und folgenden Hilfsfeldern: dem reellen Isovektor C^I und dem reellen Skalar D.

Damit erhalten wir $8_{\mathrm{B}} \oplus 8_{\mathrm{F}}$ Komponenten. Entsprechend der Klassifizierung in [17], nennen wir es TM-I-Hypermultiplett. Die Supersymmetrietransformationen für die Komponenten lauten [28, 29]

$$\begin{aligned}
\delta A &= \bar{\varepsilon}_i \tfrac{1}{2}(1+\gamma_3)\psi^i + \bar{\psi}^i \tfrac{1}{2}(1+\gamma_3)\varepsilon_i \ , \\
\delta B &= -\bar{\varepsilon}_i \gamma_3 \tilde{\psi}^i \ , \\
\delta \psi^i &= -(\sigma_I)^i{}_j C_I \gamma_3 \varepsilon^j - \tfrac{1}{2}(1+\gamma_3) i\tilde{\partial} A \varepsilon^i + \tfrac{1}{2}(1-\gamma_3) i\tilde{\partial}\overline{A}\varepsilon^i \\
& \quad -iD\varepsilon^i - 2m\gamma_3\varepsilon^i + i\tilde{\partial}\tilde{\varepsilon}^i \overline{B} \ , \\
\delta C^I &= -\tfrac{1}{2}\bar{\varepsilon}_i \tilde{\partial}(\tau^I)_j{}^i \psi^j + \text{h.c.} \ , \\
\delta D &= -\tfrac{1}{2}\bar{\varepsilon}_i \gamma_3 \tilde{\partial}\psi^i + \text{h.c.} \ ,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

dabei sind ε^i die 2d infinitesimalen (4,4) Supersymmetrietransformationsparameter, die ein Dirac–Spinor Isodublett bilden, und $\tilde{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$.

Die dimensionsbehaftete Größe erzeugt die spontane Brechung der (4,4) Supersymmetrie. Sie folgt direkt aus den (4,4) Supersymmetrietransformationen für das Spinorfeld ψ^i in Gleichung (4.16), da die rechte Seite den Goldstone–Term enthält.

4.2 TM-II Multiplett

Das TM-II Multiplett erhalten wir, indem wir das vierdimensionale $N = 2$ Tensor Multiplett dimensional reduzieren. Bevor wir uns mit dem Tensor–Multiplett beschäftigen, wollen wir uns die Struktur der N=2 Supergravitation anschauen [18]. Der Feldinhalt der N=2 konformen Supergravitation besteht aus den Eichfeldern der superkonformen Symmetrie vergrößert durch Materie–Felder. Die Eichfelder sind $e_\mu{}^a$, $\omega_\mu{}^{ab}$, b_μ, $f_\mu{}^a$, $\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j$, A_μ, $\psi_\mu{}^i$ und ϕ^i_μ, die den allgemeinen Koordinatentransformationen P_a, den Lorentztransformationen M_{ab}, der Dilatation D, den speziellen konformen Boots K_a, den chiralen $SU(2)$ und $U(1)$ Transformationen und der Q und S Supersymmetrie entsprechen. Die Materiefelder, die das Multiplett vervollständigen sind ein Lorentz–Tensor, ein Spinor und ein Skalarfeld ${T_{ab}}^{ij}$, $\xi^{\ i}$, D. Dabei bezeichnen wir mit $a, b, ...$ die Lorentz–Indizes, mit $\mu, \nu, ...$ die Weltebenen–Indizes und $i, j, ...$ sind die $SO(2)$–Indizes. Die Eigenschaften der Felder wollen wir in einer Tabelle zusammenstellen.

Feld	Typ	Eigenschaft
${e_\mu}^a$	bosonisch	P_a-Eichfeld
${\omega_\mu}^{ab}$	bosonisch	M_{ab}-Eichfeld, nichtunabhängig
b_μ	bosonisch	D-Eichfeld
${f_\mu}^a$	bosonisch	K_a-Eichfeld nicht unabhängig
${\mathcal{V}_\mu}^{i}{}_{j}$	bosonisch	$SU(2)$-Eichfled $\mathcal{V}_{\mu}{}_{i}^{\ j} \equiv ({\mathcal{V}_\mu}^{i}{}_{j})^* = -{\mathcal{V}_\mu}^{j}{}_{i}$ ${\mathcal{V}_\mu}^{i}{}_{i} = 0$
A_μ	bosonisch	U(1)-Eichfeld
${\psi_\mu}^i$	fermionisch	Q-Eichfeld $\Gamma_5 {\psi_\mu}^i = {\psi_\mu}^i$
${\phi_\mu}^i$	fermionisch	S–Eichfeld, nichtunabhängig $\gamma_5 {\phi_\mu}^i = -{\phi_\mu}^i$
${T_{ab}}^{ij}$	bosonisch	${T_{ab}}^{ij} = -{T_{ba}}^{ij} = -{T_{ab}}^{ji} = {\tilde{T}_{ab}}{}^{ij}$
$\xi^{\ i}$	fermionisch	$\gamma\xi^{\ i} = \xi^{\ i}$
D	bosonisch	

Die Generatoren P_a, M_{ab}, D, K_a, chirale $SU(2)$ und $U(1)$, S und Q bilden die N=2 superkonforme Gruppe. Die 15–parametrige konforme Gruppe besteht aus der 10 parametrigen Poincare Gruppe mit dem Translationsgenerator P_a und den Rotationen M_{ab}, der Dilatation D und den speziellen konformen Transformationen K_a. Die Algebra ist durch die Kommutatorrelationen [4]

$$\begin{aligned}
[D, P_a] &= iP_a \ , \\
[D, K_a] &= -iK_a \ , \\
[M_{ab}, M_{cd}] &= -i(\eta_{ac}M_{bd} + \eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{bc}M_{ad}) \ , \\
[M_{ab}, P_c] &= i(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b) \ , \\
[P_a, K_b] &= 2i(\eta_{ab}D - M_{ab})
\end{aligned} \tag{4.17}$$

gegeben. Um die N = 2 superkonforme Gruppe zu erhalten, führen wir zwei Supersymmetrien Q_α^i mit $i = 1, 2$ ein. Der Kommutator $[K, Q]$ erzeugt weitere spezielle

[4] $\eta_{ab} = (+, -, -, -)$, $\sigma_{ab} = \frac{1}{4}(\sigma_a\tilde{\sigma}_b - \sigma_b\tilde{\sigma}_a)$

Supersymmetrien $S_a{}^i$. Die Jacobi–Identitäten verlangen, daß $\{Q_\alpha, S_\beta\}$ neben D,M_{ab} einen $SU(2)$ und einen $U(1)$ Generator enthält. Die zusätzlichen Antikommutatoren lauten daher [5]

$$
\begin{aligned}
[D, Q_\alpha{}^i] &= -\tfrac{i}{2} Q_\alpha{}^i \ , \\
[D, S_{\alpha i}] &= \tfrac{i}{2} S_{\alpha i} \ , \\
[M_{ab}, Q_\alpha{}^i] &= -\tfrac{1}{2} (\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta Q_\beta{}^i \ , \\
[SU(2)^i{}_j, Q_\alpha{}^k] &= (\delta_j{}^k Q_\alpha{}^i - \tfrac{1}{2} \delta_i{}^j Q_\alpha{}^k) \ , \\
[U(1), Q_\alpha{}^i] &= Q_\alpha{}^i \ , \\
[U(1), \bar{S}_{\dot\alpha}{}^i] &= \bar{S}_{\dot\alpha}{}^i \ , \\
\{Q_\alpha{}^i, \bar{Q}_{\dot\beta j}\} &= 2\sigma^a_{\alpha\beta} P_a \delta_j{}^i \ , \\
\{S_{\alpha i}, \bar{S}_{\dot\beta}{}^j\} &= 2\sigma^a_{\alpha\beta} K_a \delta_j{}^i \ , \\
\{Q_\alpha{}^i, S_j^\beta\} &= (2\delta_\alpha{}^\beta D + \tfrac{1}{2}(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta M_{ab} - \tfrac{1}{2} i \delta_\alpha{}^\beta U(1))\delta_j{}^i + 2i SU(2)^i{}_j \delta_\alpha{}^\beta \ , \\
[P_a, S_{\alpha i}] &= -i\sigma_{a\alpha\dot\alpha} \bar{Q}_i^{\dot\alpha} \ , \\
[K_a, \bar{Q}_{\dot\alpha i}] &= -i\sigma_{a\alpha\dot\alpha} S_i{}^\alpha \ , \\
[SU(2)^i{}_j, SU(2)^k_l] &= \tfrac{1}{2} SU(2)^i{}_l \delta^k_j - \tfrac{1}{2} SU(2)^k{}_j \delta^i{}_l \quad .
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Für die nichtunabhängigen Felder bekommen wir

$$
\begin{aligned}
\omega_\mu{}^{ab} &= -e^\nu{}_{[a}(\partial_\mu e_{b]\ \nu} - \partial_\nu e_{b]\ \mu}) - e_{[a}{}^\rho e_{b]}{}^\sigma (\partial_\sigma e_{c\rho}) e_\mu{}^c \\
&\quad -\tfrac{1}{2}(\bar\psi_\mu{}^i \gamma_{[a}\psi_{b]\ i} + \bar\psi_a{}^i \gamma_\mu \psi_{bi} + \text{h.c.}) \ , \\
\phi_\mu{}^i &= \tfrac{1}{2}\gamma_\mu \xi^i + (\sigma^{\rho\sigma}\gamma_\mu - \tfrac{1}{3}\gamma_\mu\sigma^{\rho\sigma})(D_\rho \psi_\sigma{}^i - \tfrac{1}{8}\sigma \cdot T^{ij}\gamma_\rho \psi \sigma j) \ , \\
f_\mu{}^\mu &= -D + \tfrac{1}{4}(\bar\psi^i \cdot \gamma \xi_i - \tfrac{1}{3}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar\psi_\mu{}^i \gamma_\nu D_\rho \psi_{\sigma i} + h.c.) \quad .
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Das Tensor Multiplett besteht aus einem reellen $SU(2)$ Triplett L_{ij}, einem Tensoreichfeld $\mathrm{E}_{\mu\nu}$, einem Dublett von Majorana–Spinoren φ und einem komplexen Skalar G

$$
\Big(\mathrm{L}_{ij}, \phi^{\ i}, \mathrm{E}_{\mu\nu}, G\Big) \quad . \tag{4.20}
$$

Dabei ist L_{ij} symmetrisch $\mathrm{L}_{ij} = L_{ji}$ und erfüllt die Realitätsbedingung

$$
L^{ij} = (\mathrm{L}_{ij})^* = \epsilon^{ik}\epsilon^{jl} L_{kl} \quad . \tag{4.21}
$$

Die Feldstärke E_μ für den antisymmetrischen Tensor lautet

$$
\mathrm{E}^\mu = \tfrac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} D_\nu \mathrm{E}_{\rho\sigma} \quad . \tag{4.22}
$$

[5] $D_\rho = \partial_\rho - \delta_l(\omega_{\rho ab})$

Das Multiplett mit den Komponenten

$$\left(\mathrm{L}_{ij}, \varphi^i, \mathrm{E}_\mu, G\right) \tag{4.23}$$

nennt man auch *lineares*–Multiplett. Die Transformationen unter der S und Q Supersymmetrie lauten für das Tensor–Multiplett (4.20)

$$\begin{aligned}
\delta \mathrm{L}_{ij} &= \bar{\epsilon}_{(i}\varphi_{j)} + \epsilon_{ik}\epsilon_{jl}\bar{\epsilon}^{(k}\varphi^{l)} \ , \\
\delta \varphi^i &= \gamma_a D_a L^{ij}\epsilon_j + \gamma_a \mathrm{E}_a \epsilon ij \epsilon_j - G\epsilon^i + 2\mathrm{L}^{ij}\eta_j \ , \\
\delta G &= -2\bar{\epsilon}_i \gamma_a D_a \varphi^i - \bar{\epsilon}_i(6\xi_j \mathrm{L}^{ij} + \tfrac{1}{2}\sigma \cdot T^{+}_{jk}\varphi_l \epsilon^{ij}\epsilon^{kl}) + 2\bar{\eta}_i\varphi^i \ , \\
\delta \mathrm{E}_{\mu\nu} &= 2i\bar{\epsilon}^i \sigma_{\mu\nu}\varphi^j \epsilon_{ij} + \mathrm{L}_{ij}\epsilon^{jk}\bar{\epsilon}^i \gamma_{[\nu}\psi_{\nu]k} + \text{h.c.} \ .
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Dabei sind ϵ^iund η^i die Q-beziehungsweise S–Transformationsparameter und D_a bezeichnet die superkonforme kovariante Ableitung. Indem wir das Tensor–Multiplett dimensional reduzieren, bekommen wir das TM-II Multiplett. Die dimensionale Reduktion wird wieder mit der Bedingung $\partial_2 = \partial_3 = 0$ realisiert. Damit läßt sich die Bedingung (4.22) leicht lösen

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_\mu &= \tfrac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{E}_{\rho\sigma} \\
&= i\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu \mathrm{E}_{34} \equiv \epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu \mathrm{P} \ .
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Wir bekommen daher als physikalische Felder ein $SU(2)$ Triplett L_{ij}, ein $SU(2)$ Singlett P und ein Dublett von Majorana Spinoren χ^i. Dieses Multiplett nennt man entsprechend der Klassifizierung von [17] TM-II Multiplett

$$\left(\ L_{ij} \ , P \ , \chi^i \ \right) \ . \tag{4.26}$$

Die Hilfsfelder sowie die lokalen und globalen Supersymmetrietransformationen werden im nächsten Kapitel angegeben.

Kapitel 5

TM-I und TM-II im gekrümmten (4,4) Superraum

In Kapitel 4 haben wir die Hypermultipletts TM-I und TM-II konstruiert, indem wir das N=2 Vektor– beziehungsweise Tensor–Multiplett dimensional reduziert haben. In diesem Kapitel untersuchen wir die Supersymmetrietransformationen in Anwesenheit der (4,4) Supergravitation. Am Ende geben wir die globalen Supersymmetrietransformationen an. Wir werden dabei sehen, daß sich eine Dualtitätsabbildung definieren läßt, die die physikalischen Spin-0 Felder des einen Multipletts durch die Hilfsfelder des anderen ausdrückt.

5.1 Supersymmetrietransformationen für TM-I

Die Zwangsbedingungen, die das TM-I Multiplett definieren, wurden bereits erwähnt

$$\nabla_{\stackrel{\bullet}{\pm} i} B \;=\; 0 \;, \quad \nabla_{\pm i} B \;=\; \pm 2\, \nabla_{\stackrel{\bullet}{\pm} i} F \;, \quad \nabla_{\pm i} F \;=\; \pm\; i\, \nabla_{\pm i} G \;, \tag{5.1}$$

$$[\nabla_+{}^i, \nabla_{+i}]B = [\nabla_-{}^i, \nabla_{-i}]B = 0 \;. \tag{5.2}$$

Dabei bezeichnen wir mit B das komplexe skalare Superfeld und die reellen Felder werden mit G und H bezeichnet. Zusätzlich haben wir die Realitätsbedingung

$$\left(\nabla_{+i} \nabla_{\stackrel{\bullet}{-} j} F\right)^* = \nabla_+{}^i \nabla_{\stackrel{\bullet}{-}}{}^j F \tag{5.3}$$

gefordert. Als unabhängige Komponenten des TM-I Multiplett wählen wir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dim}-0: &&B \;, \quad B^* \;, \quad F \;, \quad G \;, &&(4_{\mathrm{B}})\\
&\mathrm{dim}-\tfrac{1}{2}: &&\nabla_{\pm i} F = \lambda_{\pm i} \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}_{\stackrel{\bullet}{\pm} i} \;, &&(8_{\mathrm{F}})\\
&\mathrm{dim}-1: &&\nabla_{\stackrel{\bullet}{+} i} \lambda_{-j} = A_{ij} = A_{(ij)} + \mathcal{C}_{ij} A \;, &&(4_{\mathrm{B}})
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Dabei erfüllt $\{A_{(ij)}\}^* = A^{(ij)}$ und A ist reell. Wir bekommen also $8_{\mathbf{B}} \otimes 8_{\mathbf{F}}$ unabhängige Komponenten.

Als Supersymmetrietransformationen für die fermionischen Komponenten des TM-I Hypermultipletts finden wir

$$
\begin{aligned}
\nabla_{+i}\lambda_{+j} &= \nabla_{+i}\nabla_{+j}F = \tfrac{1}{2}\nabla_{+i}\nabla_{\underset{+j}{\bullet}}B^* \\
&= \tfrac{1}{2}\{\nabla_{+i}, \nabla_{\underset{+j}{\bullet}}\}B^* + \tfrac{1}{2}[\nabla_{+i}, \nabla_{\underset{+j}{\bullet}}]B^* = \tfrac{i}{2}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{\ddagger}B^* \ , \\
\nabla_{-i}\lambda_{+j} &= \tfrac{1}{2}\nabla_{-i}\nabla_{\underset{+j}{\bullet}}B^* = \tfrac{1}{2}\{\nabla_{-i}, \nabla_{\underset{+j}{\bullet}}\}B^* + \tfrac{1}{2}[\nabla_{-i}, \nabla_{\underset{+j}{\bullet}}]B^* \\
&= -\tfrac{i}{4}(S+iT)(\mathcal{C}_{ij}\mathcal{M} + \mathcal{Y}_{ij})B^* = 0 \ , \\
\nabla_{\underset{+i}{\bullet}}\lambda_{+j} &= \tfrac{1}{2}\nabla_{\underset{+i}{\bullet}}\nabla_{\underset{+j}{\bullet}}B^* = \tfrac{1}{2}\nabla_{\underset{+(i}{\bullet}}\nabla_{\underset{+j)}{\bullet}}B^* + \tfrac{1}{2}\nabla_{\underset{+[i}{\bullet}}\nabla_{\underset{+j]}{\bullet}}B^* \\
&= -\tfrac{1}{4}\mathcal{C}_{ij}\nabla^{\overset{\bullet}{+}k}\nabla_{\underset{+k}{\bullet}}B^* = -\tfrac{1}{8}\mathcal{C}_{ij}([\nabla^{\overset{\bullet}{+}k}, \nabla_{\underset{+k}{\bullet}}] + \{\nabla^{\overset{\bullet}{+}k}, \nabla_{\underset{+k}{\bullet}}\})B^* \\
&= -\tfrac{1}{4}\mathcal{C}_{ij}\{\nabla^{\overset{\bullet}{+}k}, \nabla_{+k}\}F = -\tfrac{i}{2}\mathcal{C}_{\underset{ij}{}}\nabla_{\ddagger}F \ , \\
\nabla_{\underset{-i}{\bullet}}\lambda_{\underset{+j}{}} &= \tfrac{1}{2}\nabla_{\underset{-i}{\bullet}}\nabla_{\underset{+j}{\bullet}}B^* \\
&= (\tfrac{1}{2}(S-iT)(\mathcal{C}_{ij}\mathcal{M} + \mathcal{Y}_{ij})F) - A_{ij} = -A_{\underset{ji}{}} \ .
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Ananlog erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\nabla_{-i}\lambda_{-j} &= -\tfrac{i}{2}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{=}B^* \ , \\
\nabla_{+i}\lambda_{-j} &= 0 \ , \\
\nabla_{\underset{-i}{\bullet}}\lambda_{\underset{-j}{}} &= -\tfrac{i}{2}\mathcal{C}_{\underset{ij}{}}\nabla_{=}F \ , \\
\nabla_{\underset{+i}{\bullet}}\lambda_{\underset{-j}{}} &= A_{\underset{ij}{}} \ .
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Die Supersymmetrietransformationen von A nehmen folgende Gestalt an

$$
\begin{aligned}
\nabla_{+k}A &= -\tfrac{i}{2}\nabla_{+k}(\nabla_{\underset{+}{\bullet}}{}^{i}\nabla_{-i}F) = \tfrac{i}{4}\nabla_{+k}\nabla_{\underset{+}{\bullet}}{}^{i}\nabla_{\underset{-i}{\bullet}}B^* \\
&= -\tfrac{1}{4}\nabla_{\ddagger}(\nabla_{\underset{-k}{\bullet}}B^*) - \tfrac{i}{4}\nabla_{\underset{+}{\bullet}}{}^{i}\{\nabla_{+k}, \nabla_{\underset{-i}{\bullet}}\}B^* \\
&= \tfrac{1}{2}\nabla_{\ddagger}(\nabla_{-k}F) - \tfrac{i}{4}\nabla_{\underset{+}{\bullet}}{}^{i}\left(-\tfrac{i}{2}(S-iT)(\mathcal{C}_{ki}\mathcal{M} - \mathcal{Y}_{ki})B^*\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\nabla_{\ddagger}(\nabla_{-k}F) - \tfrac{1}{4}(\nabla_{\underset{+}{\bullet}}{}^{i}S)(\mathcal{C}_{ki}\mathcal{M} - \mathcal{Y}_{ki})B^* \\
&\quad + \tfrac{1}{4}(S-iT)(\nabla_{+k}F) - \tfrac{1}{2}(S-iT)(\mathcal{C}_{ki}\mathcal{M} - \mathcal{Y}_{ki})(\nabla_{+}{}^{i}F) \\
&= \tfrac{1}{2}\nabla_{\ddagger}\lambda_{+k} + \tfrac{1}{4}(S-iT)\lambda_{+k} - \tfrac{1}{4}(S-iT)\mathcal{C}_{ki}\lambda_{+}{}^{i} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(S-iT)(\delta_{i}{}^{k}\lambda_{+i} - \tfrac{1}{2}\delta_{k}{}^{i}\lambda_{+i}) \\
&= \tfrac{1}{2}\nabla_{\ddagger}\lambda_{-k} + \tfrac{1}{4}(S-iT)\lambda_{+k} \ .
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Eine analoge Rechnung liefert

$$
\nabla_{-k}A = \tfrac{1}{2}\nabla_{=}\lambda_{+k} + \tfrac{1}{4}(S+iT)\lambda_{-k} \ . \tag{5.8}
$$

Als Transformationsverhalten von A_{ij} finden wir

$$
\begin{aligned}
\nabla_{+k}A_{(ij)} &= \tfrac{1}{2}\nabla_{+k}\left(\nabla_{\dot{+}j}\nabla_{-i}+\nabla_{-i}\nabla_{\dot{+}j}\right)F \\
&= -\tfrac{1}{4}\left(\nabla_{+k}\nabla_{\dot{+}j}\nabla_{\dot{-}i}B^{*}+(i\leftrightarrow j)\right) \\
&= -\tfrac{1}{4}\left(i\mathcal{C}_{kj}\nabla_{\ddagger}(\nabla_{\dot{-}i}B^{*})-\nabla_{\dot{+}j}\{\nabla_{+k},\nabla_{\dot{-}i}\}B^{*}\right)+(i\leftrightarrow j) \\
&= -\tfrac{1}{4}\left(-2i\mathcal{C}_{kj}\nabla_{\ddagger}\lambda_{-i}-\nabla_{\dot{+}j}(-\tfrac{i}{2}(S-iT)(\mathcal{C}_{ki}\mathcal{M}-\mathcal{Y}_{ki})B^{*})+(i\leftrightarrow j)\right) \\
&= -\tfrac{1}{4}\Big(-2i\mathcal{C}_{kj}\nabla_{\ddagger}\lambda_{-i}+i(\nabla_{\dot{+}j}S)(\mathcal{C}_{ki}\mathcal{M}-\mathcal{Y}_{ki})B^{*} \\
&\quad +\tfrac{i}{2}(S-iT)\mathcal{C}_{jk}(\nabla_{\dot{+}i}B^{*})+i(S-iT)(\mathcal{C}_{ki}\mathcal{M}-\mathcal{Y}_{ki})(\nabla_{\dot{+}j}B^{*})\Big)+(i\leftrightarrow j) \\
&= i\mathcal{C}_{k(i}\nabla_{\ddagger}\lambda_{-j)}-\tfrac{i}{2}(S-iT)\mathcal{C}_{k(i}\lambda_{+j)}\ ,
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

und

$$
\nabla_{-k}A_{(ij)} \;=\; -i\mathcal{C}_{k(i}\nabla_{=}\lambda_{+j)}-\tfrac{i}{2}(S+iT)\mathcal{C}_{k(i}\lambda_{-j)}\ . \tag{5.10}
$$

Zusammen mit dem komplex Konjugierten und den definierenden Relationen (5.2) und (5.3) vervollständigen diese Gleichungen die lokalen Supersymmetrietransformationen des TM-I Multipletts.

5.2 Supersymmetrietransformationen für TM-II

Wir haben in Kapitel 4 das TM-II Multiplett aus dem N=2 Tensor–Multiplett mittels dimensionaler Reduktion ableiten können. Wir endeten mit den physikalischen Feldern

$$
(L_{ij},P,\chi_{\pm i})\quad . \tag{5.11}
$$

Dabei unterliegt das $SU(2)$ Triplett L_{ij} der Zwangsbedingung

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\pm k}L_{ij} &= \pm\,\tfrac{i}{2}\left(\mathcal{C}_{ik}\nabla_{\pm j}+\mathcal{C}_{jk}\nabla_{\pm i}\right)P\ , \\
[\nabla_{\dot{+}}{}^{i},\nabla_{+}{}^{j}]L_{ij} &= [\nabla_{\dot{-}}{}^{i},\nabla_{-}{}^{j}]L_{ij}\;=\;0\quad .
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Das Superfeld L_{ij} erfüllt weiterhin

$$
L_{ij}=L_{ji}\qquad L_{i}{}^{i}=0\quad . \tag{5.13}
$$

Zusätzlich fordern wir die Realitätsbedingung

$$
(L_{ij})^{*}=L^{ij}\ ,\qquad P^{*}=P\quad . \tag{5.14}
$$

Die obigen Gleichungen definieren das TM-II Hypermultiplett im (4,4) Superraum. Die unabhängigen Komponenten des TM-II-Multipletts können wir wie folgt wählen

$$
\begin{array}{llr}
\dim - 0: & P\ , \qquad L_i{}^j\ , & (4_{\mathrm{B}}) \\
\dim - \frac{1}{2}: & \pm\frac{3i}{2}\nabla_{\pm i}P = \chi_{\pm i} \quad \text{und} \quad \bar{\chi}_{\overset{\bullet}{\pm} i}\ , & (8_{\mathrm{F}}) \\
\dim - 1: & \nabla_+{}^i\nabla_-{}^j L_{ij} = U\ , \quad \text{und} \quad \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^i\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^j L_{ij} = U^*\ , & \\
& \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^i\nabla_-{}^j L_{ij} = M + iN\ , \quad \text{und} \quad \nabla_+{}^i\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^j L_{ij} = M - iN\ . & (4_{\mathrm{B}})(5.15)
\end{array}
$$

Dabei sind U, M und N ein komplexes und zwei reelle Hilfsfelder. Wir enden also mit $8_{\mathbf{B}} \otimes 8_{\mathbf{F}}$ unabhängigen Komponenten.

Wir wollen jetzt die Supersymmetrietransformationen von $\chi_{\pm j}$ berechnen. Dazu betrachten wir zuerst die Transformationen mit kontrahierten $SU(2)$ Indizes. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\nabla_+{}^i\chi_{+i} &= \nabla_+{}^i\nabla_+{}^j L_{ij} \\
&= \nabla_+{}^{(i}\nabla_+{}^{j)} L_{ij} = \{\nabla_+{}^i, \nabla_+{}^j\} L_{ij} = 0\ , \\
\nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^i\chi_{+i} &= \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^i\nabla_+{}^j L_{ij} = \tfrac{1}{2}[\nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^i, \nabla_+{}^j] L_{ij} + \tfrac{1}{2}\{\nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^i, \nabla_+{}^j\} L_{ij} \\
&= \tfrac{1}{2}\{\nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^i, \nabla_+{}^j\} L_{ij} = \tfrac{1}{2}\mathcal{C}^{ij}\nabla_{\ddagger} L_{ij} = 0\ , \\
\nabla_-{}^i\chi_{+i} &= \nabla_-{}^i\nabla_+{}^j L_{ij} = \{\nabla_-{}^i, \nabla_+{}^j\} L_{ij} - \nabla_+{}^j\nabla_-{}^i L_{ij} \\
&= \{\nabla_-{}^i, \nabla_+{}^j\} L_{ij} - U \\
&= \tfrac{i}{2}R^*\mathcal{Y}^{ij} L_{ij} - U = -U\ , \\
\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^i\chi_{+i} &= \nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^i\nabla_+{}^j L_{ij} \\
&= \{\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^i, \nabla_+{}^j\} L_{ij} - \nabla_+{}^j\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{+i} L_{ij} \\
&= \tfrac{i}{2}(S - iT)\mathcal{Y}^{ij} L_{ij} - (M - iN) = -(M - iN)\ \ . \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

Analog erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\nabla_+{}^i\chi_{-i} &= U\ , \\
\nabla_-{}^i\chi_{-i} &= 0\ , \\
\nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^i\chi_{-i} &= M + iN\ , \\
\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^i\chi_{-i} &= 0\ . \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Für die nicht kontrahierten Transformationen bekommen wir für χ_{+i}

$$
\begin{aligned}
\nabla_{+i}\chi_{+j} &= \nabla_{+i}\nabla_+{}^k L_{kj} \\
&= \{\nabla_{+i}, \nabla_+{}^k\} L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_+{}^k(\mathcal{C}_{ki}\chi_{+j} + \mathcal{C}_{ji}\chi_{+k}) \\
&= -\tfrac{1}{3}\nabla_{+i}\chi_{+j} - \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}\nabla_+{}^k\chi_{+k} \\
&= 0\ . \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

Wenn wir das Transformationsverhalten von $\nabla_{-i}\chi_{+j}$ berechnen

$$
\begin{aligned}
\nabla_{-i}\chi_{+j} &= \nabla_{-i}\nabla_{+}{}^{k}L_{kj} \\
&= \{\nabla_{-i},\nabla_{+}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_{+}{}^{k}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{-j} + \mathcal{C}_{ji}\chi_{-k}) \\
&= \{\nabla_{-i},\nabla_{+}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_{+i}\chi_{-j} - \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}\nabla_{+}{}^{k}\chi_{-k} \\
&= \{\nabla_{-i},\nabla_{+}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_{+i}\chi_{-j} - \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}U\ ,
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

stellen wir fest, daß wir dazu den entsprechenden Ausdruck für $\nabla_{+i}\chi_{-j}$ brauchen

$$
\begin{aligned}
\nabla_{+i}\chi_{-j} &= \nabla_{+i}\nabla_{-}{}^{k}L_{kj} = \{\nabla_{+i},\nabla_{-}{}^{k}\}L_{kj} - \nabla_{-}{}^{k}\nabla_{+i}L_{kj} \\
&= \{\nabla_{+i},\nabla_{-}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_{-}{}^{k}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{+j} + \mathcal{C}_{ji}\chi_{+k}) \\
&= \{\nabla_{+i},\nabla_{-}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_{-i}\chi_{+j} - \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}(-U)\ .
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Wir erhalten dann die zwei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\nabla_{-i}\chi_{+j} + \tfrac{1}{3}\nabla_{+i}\chi_{-j} &= \{\nabla_{-i},\nabla_{+}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}U\ , \\
\nabla_{+i}\chi_{-j} + \tfrac{1}{3}\nabla_{-i}\chi_{+j} &= \{\nabla_{+i},\nabla_{-}{}^{k}\}L_{kj} + \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}U\ ,
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

die uns

$$
\begin{aligned}
\nabla_{-i}\chi_{+j} &= \tfrac{9}{8}\{\nabla_{-i},\nabla_{+}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{3}{8}\{\nabla_{+i},\nabla_{-}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ji}U \\
&= \tfrac{3i}{4}R^{*}\mathcal{M}L_{ij} + \tfrac{3i}{8}R^{*}\mathcal{Y}^{k}_{\ i}L_{kj} - \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ji}U \\
&= \tfrac{3i}{4}R^{*}L_{ij} + \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ij}U
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

liefern. Als nächtes wollen wir $\nabla_{\dot{+}i}\chi_{+j}$ berechnen. Dazu betrachten wir zuerst

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\dot{+}(i}\chi_{+j)} &= \tfrac{1}{2}(\nabla_{\dot{+}i}\chi_{+j} + \nabla_{\dot{+}j}\chi_{+i}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\nabla_{\dot{+}i}\nabla_{+}{}^{k}L_{kj} + \nabla_{\dot{+}j}\nabla_{+}{}^{k}L_{ki}) \\
&= \tfrac{1}{2}\{\nabla_{\dot{+}i},\nabla_{+}{}^{k}\}L_{kj} + \tfrac{1}{2}\{\nabla_{\dot{+}j},\nabla_{+}{}^{k}\}L_{ki} \\
&\quad -\tfrac{1}{6}\nabla_{+}{}^{k}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{\dot{+}j} + \mathcal{C}_{kj}\chi_{\dot{+}}\,i) \\
&= -i\nabla_{\ddagger}L_{ij} - \tfrac{1}{3}\nabla_{+(i}\chi_{\dot{+}j)}\ , \\
\nabla_{+(i}\chi_{\dot{+}j)} &= \tfrac{1}{2}(\nabla_{+i}\nabla_{\dot{+}}{}^{k}L_{kj} + \nabla_{+j}\nabla_{\dot{+}}{}^{k}L_{ki}) \\
&= \tfrac{1}{2}\{\nabla_{+i},\nabla_{\dot{+}}{}^{k}\}L_{kj} + \tfrac{1}{2}\{\nabla_{+j},\nabla_{\dot{+}}{}^{k}\}L_{ki} \\
&\quad -\tfrac{1}{6}\nabla_{\dot{+}}{}^{k}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{+j} + \mathcal{C}_{kj}\chi_{+i}) \\
&= i\nabla_{\ddagger}L_{ij} - \tfrac{1}{3}\nabla_{\dot{+}(i}\nabla_{+j)}\ ,
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

woraus wir

$$\nabla_{\overset{\bullet}{+}(i}\chi_{+j)} = -\tfrac{3i}{2}\nabla_{\ddagger}L_{ij} \tag{5.24}$$

erhalten. Für $\nabla_{\overset{\bullet}{+}[i}\chi_{+j]}$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overset{\bullet}{+}[i}\chi_{+j]} &= \tfrac{3i}{2}\nabla_{\overset{\bullet}{+}[i}\nabla_{+j]}P \\
&= -\tfrac{3i}{8}\mathcal{C}_{ij}\{\nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^{k}, \nabla_{+k}\}P = -\tfrac{3i}{8}\mathcal{C}_{ij}\mathcal{C}^{kl}(i\mathcal{C}_{kl}\nabla_{\ddagger}P) \\
&= \tfrac{3}{4}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{\ddagger}P \quad .
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Beide Resultate zusammengefaßt liefern

$$\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}\chi_{+j} = -\tfrac{3i}{2}\nabla_{\ddagger}L_{ij} + \tfrac{3}{4}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{\ddagger}P \quad . \tag{5.26}$$

Bleibt noch die Supersymmetrietransformation von $\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\chi_{+j}$ zu untersuchen. Wir gehen dabei wie bei $\nabla_{-i}\chi_{+j}$ vor.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\chi_{+j} &= \nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\nabla_{+}{}^{k}L_{kj} = \{\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}, \nabla_{+}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_{+}{}^{k}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{\overset{\bullet}{-}j} + \mathcal{C}_{ji}\chi_{\overset{\bullet}{-}k}) \\
&= \{\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}, \nabla_{+}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_{+i}\chi_{\overset{\bullet}{-}j} - \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}(M - iN) \ .
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\nabla_{+i}\chi_{\overset{\bullet}{-}j} &= \nabla_{+i}\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{k}L_{kj} \\
&= \{\nabla_{+i}, \nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{k}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{+j} + \mathcal{C}_{ji}\chi_{+k}) \\
&= \{\nabla_{+i}, \nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\chi_{+j} - \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}(-(M - iN))
\end{aligned} \tag{5.28}$$

erhalten wir zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\chi_{+j} + \tfrac{1}{3}\nabla_{+i}\chi_{\overset{\bullet}{-}j} &= \{\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}, \nabla_{+}{}^{k}\}L_{kj} - \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}(M - iN) \\
\nabla_{+i}\chi_{\overset{\bullet}{-}j} + \tfrac{1}{3}\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\chi_{+j} &= \{\nabla_{+i}, \nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{k}\}L_{kj} + \tfrac{1}{3}\mathcal{C}_{ji}(M - iN),
\end{aligned} \tag{5.29}$$

die

$$\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\chi_{+j} = \tfrac{3i}{4}(S - iT)L_{ij} + \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ij}(M - iN) \tag{5.30}$$

liefern. Für die Superymmetrietransformationen von χ_{-j} bekommen wir analog

$$\begin{aligned}
\nabla_{+i}\chi_{-j} &= \tfrac{3i}{4}R^{*}L_{ij} - \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ij}U \ , \\
\nabla_{-i}\chi_{-j} &= 0 \ , \\
\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}\chi_{-j} &= -\tfrac{3i}{4}(S + iT)L_{ij} - \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ij}(M + iN) \ , \\
\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\chi_{-j} &= -\tfrac{3i}{2}\nabla_{=}L_{ij} - \tfrac{3}{4}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{=}P \quad .
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Im weiteren Verlauf der Kapitels untersuchen wir das Transformationsverhalten der Hilfsfelder U, M, N.

Für $\nabla_{\pm i} U$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\nabla_{+i} U &= \nabla_{+i} \nabla_+{}^k \nabla_-{}^l L_{kl} \\
&= -\nabla_+{}^k \{\nabla_{+i}, \nabla_-{}^l\} L_{kl} + \tfrac{1}{3} \nabla_+{}^k \nabla_-{}^l (\mathcal{C}_{ki} \chi_{+l} + \mathcal{C}_{li} \chi_{+k}) \\
&= -\nabla_+{}^k \{\nabla_{+i}, \nabla_-{}^l\} L_{kl} + \tfrac{1}{3} \nabla_{+i}(-U) + \tfrac{1}{3} \{\nabla_+{}^k, \nabla_{-i}\} \chi_{+k} \\
\tfrac{4}{3} \nabla_{+i} U &= -\nabla_+{}^k \mathcal{C}^{lm} (-\tfrac{i}{2} R^* (\mathcal{C}_{im} \mathcal{M} - \mathcal{Y}_{im}) L_{kl} \\
&\quad -\tfrac{i}{6} \mathcal{C}^{kl} R^* (\chi_{li} \mathcal{M} - \mathcal{Y}_{li}) \chi_{+k} \\
&= -\tfrac{2i}{3} R^* \chi_{+i} \\
\nabla_{+i} U &= -\tfrac{i}{2} R^* \chi_{+i}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

und

$$\begin{aligned}
\nabla_{-i} U &= \nabla_{-i} \nabla_+{}^k \nabla_-{}^l L_{kl} \\
&= \{\nabla_{-i}, \nabla_+{}^k\} \chi_{-k} + \tfrac{1}{3} \nabla_+{}^k \nabla_-{}^l (\mathcal{C}_{ki} \chi_{-l} + \mathcal{C}_{li} \chi_{-k}) \\
\tfrac{4}{3} \nabla_{-i} U &= \{\nabla_{-i}, \nabla_+{}^k\} \chi_{-k} + \tfrac{1}{3} \{\nabla_+^k, \nabla_{-i}\} \chi_{-k} \\
\nabla_{-i} U &= \tfrac{i}{2} R^* \chi_{-i} \\
&= \tfrac{i}{2} R^* \chi_{-i} \quad .
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Berechnen wir $\nabla_{\overset{\bullet}{+}i} U$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overset{\bullet}{+}i} U &= \nabla_{\overset{\bullet}{+}i} \nabla_+{}^l \nabla_-{}^k L_{kl} \\
&= \{\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}, \nabla_+{}^k\} \chi_{-k} - \nabla_+{}^l \{\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}, \nabla_-{}^k\} L_{kl} \\
&\quad + \tfrac{1}{3} \nabla_+{}^l \nabla_-{}^k (\mathcal{C}_{ki} \chi_{\overset{\bullet}{-}l} + \mathcal{C}_{li} \chi_{\overset{\bullet}{+}k}) \\
&= \{\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}, \nabla_+{}^k\} \chi_{-k} - \nabla_+{}^l \{\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}, \nabla_-{}^k\} L_{kl} \\
&\quad + \tfrac{1}{3} \{\nabla_+{}^l, \nabla_{-i}\} \chi_{\overset{\bullet}{+}l} - \tfrac{1}{3} \nabla_{+i} (M + iN) \quad ,
\end{aligned} \tag{5.34}$$

dann brauchen wir $\nabla_{+i}(M + iN)$

$$\begin{aligned}
\nabla_{+i}(M + iN) &= \nabla_{+i} \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^l \nabla_-{}^k L_{kl} \\
&= \{\nabla_{+i}, \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^k\} \chi_{-k} - \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^l \{\nabla_{+i}, \nabla_-{}^k\} L_{kl} \\
&\quad + \tfrac{1}{3} \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^l \nabla_-{}^k (\mathcal{C}_{ki} \chi_{+l} + \mathcal{C}_{li} \chi_{+k}) \\
&= \{\nabla_{+i}, \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^k\} \chi_{-k} - \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^l \{\nabla_{+i}, \nabla_-{}^k\} L_{kl} \\
&\quad + \tfrac{1}{3} \{\nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^k, \nabla_{-i}\} \chi_{+k} - \tfrac{1}{3} \nabla_{\overset{\bullet}{+}i} U \quad .
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Damit enden wir mit den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}U + \tfrac{1}{3}\nabla_{+i}(M+iN) &= \{\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}, \nabla_{+}{}^{k}\}\chi_{-k} - \nabla_{+}{}^{l}\{\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}, \nabla_{-}{}^{k}\}L_{kl} + \tfrac{1}{3}\{\nabla_{+}{}^{l}, \nabla_{-i}\}\chi_{\overset{\bullet}{+}l} \;, \\
\tfrac{1}{3}\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}U + \nabla_{+i}(M+iN) &= \{\nabla_{+i}, \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^{k}\}\chi_{-k} - \nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^{l}\{\nabla_{+i}, \nabla_{-}{}^{k}\}L_{kl} + \tfrac{1}{3}\{\nabla_{\overset{\bullet}{+}}{}^{k}, \nabla_{-i}\}\chi_{+k} \;,
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

was

$$
\nabla_{\overset{\bullet}{+}i}U = -\tfrac{3i}{2}\nabla_{+\!\!\!+}\chi_{-i} + 3i(\nabla_{+}^{j}S)L_{ij} + \tfrac{5i}{4}(S+iT)\chi_{+i} + \tfrac{3i}{4}R^{*}\chi_{\overset{\bullet}{+}i} \tag{5.37}
$$

und

$$
\nabla_{+i}(M+iN) = \tfrac{3i}{2}\nabla_{+\!\!\!+}\chi_{-i} - 3i(\nabla_{+}{}^{j}S)L_{ij} - \tfrac{5i}{4}R^{*}\chi_{+i} - \tfrac{3i}{4}(S+iT)\chi_{+i} \tag{5.38}
$$

liefert. Analog bekommen wir $\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}U$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}U &= \nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\nabla_{+}{}^{l}\nabla_{-}{}^{k}L_{kl} \\
&= \{\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}, \nabla_{+}{}^{k}\}\chi_{-k} - \nabla_{+}{}^{l}\{\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}, \nabla_{-}{}^{k}\}L_{lk} \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\nabla\;\;{}^{l}\nabla_{-}{}^{k}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{\overset{\bullet}{-}l} + \mathcal{C}_{li}\chi_{\overset{\bullet}{-}k}) \\
&= \{\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}, \nabla_{+}{}^{k}\}\chi_{-k} - \nabla_{+}{}^{l}\{\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}, \nabla_{-}{}^{k}\}L_{lk} \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\{\nabla_{+}{}^{k}, \nabla_{-i}\}\chi_{\overset{\bullet}{-}k} - \tfrac{1}{3}\nabla_{-i}(M-iN) \;,
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

und $\nabla_{-i}(M-iN)$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{-i}(M-iN) &= \nabla_{-i}\nabla_{+}{}^{k}\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{l}L_{kl} \\
&= \{\nabla_{-i}, \nabla_{+}{}^{k}\}\chi_{\overset{\bullet}{-}k} - \nabla_{+}{}^{k}\{\nabla_{-i}, \nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{l}\}L_{kl} \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\nabla_{+}{}^{k}\nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{l}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{-l} + \mathcal{C}_{li}\chi_{-k}) \\
&= \{\nabla_{-i}, \nabla_{+}{}^{k}\}\chi_{\overset{\bullet}{-}k} - \nabla_{+}{}^{k}\{\nabla_{-i}, \nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{l}\}L_{kl} \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\{\nabla_{+}{}^{k}, \nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\}\chi_{-k} - \tfrac{1}{3}\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}U \;,
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

so daß wir mit den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}U + \tfrac{1}{3}\nabla_{-i}(M-iN) &= \{\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}, \nabla_{+}{}^{k}\}\chi_{-k} - \nabla_{+}{}^{l}\{\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}, \nabla_{-}{}^{k}\}L_{lk} + \tfrac{1}{3}\{\nabla_{+}{}^{k}, \nabla_{-i}\}\chi_{\overset{\bullet}{-}k} \\
\nabla_{-i}(M-iN) + \tfrac{1}{3}\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}U &= \{\nabla_{-i}, \nabla_{+}{}^{k}\}\chi_{\overset{\bullet}{-}k} - \nabla_{+}{}^{k}\{\nabla_{-i}, \nabla_{\overset{\bullet}{-}}{}^{l}\}L_{kl} + \tfrac{1}{3}\{\nabla_{+}{}^{k}, \nabla_{\overset{\bullet}{-}i}\}\chi_{-k}
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

enden. Diese liefern

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\overset{\bullet}{-}i}U &= -\tfrac{3i}{2}\nabla_{=}\chi_{+i} + 3i(\nabla_{-}{}^{j}S)L_{ij} + \tfrac{5i}{4}(S-iT)\chi_{-i} - \tfrac{3i}{4}R^{*}\chi_{\overset{\bullet}{-}i} \;, \\
\nabla_{-i}(M-iN) &= \tfrac{3i}{2}\nabla_{=}\chi_{+i} - 3i(\nabla_{-}{}^{j}S)L_{ij} + \tfrac{5i}{4}R^{*}\chi_{-i} - \tfrac{3i}{4}(S-iT)\chi_{-i} \;.
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Bleibt noch $\nabla_{+i}(M-iN)$ zu berechnen

$$\begin{aligned}
\nabla_{+i}(M-iN) &= \nabla_{+i}\nabla_{+}{}^{k}\nabla_{\dot -}{}^{l}L_{kl} \\
&= -\nabla_{+}{}^{k}\{\nabla_{+i},\nabla_{\dot -}{}^{l}\}L_{kl} \\
&\quad +\tfrac{1}{3}\nabla_{+}{}^{k}\nabla_{\dot -}{}^{l}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{+l}+\mathcal{C}_{li}\chi_{+k}) \\
&= -\nabla_{+k}\{\nabla_{+i},\nabla_{\dot -}{}^{l}\}L_{kl}-\tfrac{1}{3}\nabla_{+i}(M-iN)+\tfrac{1}{3}\{\nabla_{+}{}^{k},\nabla_{\dot - i}\}\chi_{+k} \\
&= -\tfrac{i}{2}(S-iT)\chi_{+i}\quad . \qquad (5.43)
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir $\nabla_{-i}(M+iN)$

$$\begin{aligned}
\nabla_{-i}(M+iN) &= \nabla_{-i}\nabla_{\dot +}{}^{k}\nabla_{-}{}^{l}L_{kl} \\
&= \{\nabla_{-i},\nabla_{\dot +}{}^{k}\}\chi_{-k} \\
&\quad +\tfrac{1}{3}\nabla_{\dot +}{}^{k}\nabla_{-}{}^{l}(\mathcal{C}_{ki}\chi_{-l}+\mathcal{C}_{li}\chi_{-k}) \\
\tfrac{4}{3}\nabla_{-i}(M+iN) &= \{\nabla_{-k},\nabla_{\dot +}{}^{k}\}\chi_{-k}+\tfrac{1}{3}\{\nabla_{\dot +}{}^{k},\nabla_{-i}\}\chi_{-k} \\
\nabla_{-i}(M+iN) &= -\tfrac{i}{2}(S+iT)\chi_{-k}\quad . \qquad (5.44)
\end{aligned}$$

Zusammen mit dem komplex Konjugierten und den definierenden Zwangsbedingungen (5.12) und (5.15) bilden sie die lokalen (4,4) Supersymmetrietransformationen des TM-II Multipletts.

Im globalen Fall finden wir für das TM-I Multiplett

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot \pm i}B &= 0,\quad \nabla_{\pm i}B=\pm 2\nabla_{\dot \pm i}F=\pm 2\lambda_{\dot \pm}\ ,\quad \nabla_{\pm i}F = \pm\ i\ \nabla_{\pm i}G\ , \\
\nabla_{+i}\lambda_{+j} &= \tfrac{i}{2}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{\ddagger}B^{*}\ ,\qquad \nabla_{-i}\lambda_{+j}=0\ , \\
\nabla_{\dot + i}\lambda_{\dot + j} &= -\tfrac{i}{2}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{\ddagger}F\ ,\qquad \nabla_{\dot - i}\lambda_{\dot + j}=-A_{ji}\ , \\
\nabla_{-i}\lambda_{-j} &= -\tfrac{i}{2}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{=}B^{*}\ ,\quad \nabla_{+i}\lambda_{-j}=0\ , \\
\nabla_{\dot - i}\lambda_{\dot - j} &= -\tfrac{i}{2}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{=}F\ ,\qquad \nabla_{\dot + i}\lambda_{\dot - j}=A_{ij}\ , \\
\nabla_{+k}A &= \tfrac{1}{2}\nabla_{\ddagger}\lambda_{-k},\qquad \nabla_{-k}A=\tfrac{1}{2}\nabla_{=}\lambda_{+k} \\
\nabla_{+k}A_{(ij)} &= i\mathcal{C}_{k(i}\nabla_{\ddagger}\lambda_{-j)}\ , \\
\nabla_{-k}A_{(ij)} &= -i\mathcal{C}_{k(i}\nabla_{=}\lambda_{+j)}\ . \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

und für das TM-II Multiplett

$$\nabla_{\pm i}P = \mp\tfrac{2i}{3}\chi_{\pm i}\ ,$$

$$\nabla_{+}{}^{i}\nabla_{-}{}^{j}L_{ij}=U\ ,\qquad \nabla_{\dot +}{}^{i}\nabla_{\dot -}{}^{j}L_{ij}=U^{*}\ ,$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\underset{+}{\bullet}}{}^{i}\nabla_{-}{}^{j}L_{ij} &= M + iN \ , &\qquad \nabla_{+}{}^{i}\nabla_{\underset{-}{\bullet}}{}^{j}L_{ij} &= M - iN \ , \\
\nabla_{+i}\chi_{+j} &= 0 \ , & \nabla_{-i}\chi_{-j} &= 0 \ , \\
\nabla_{+i}\chi_{-j} &= \tfrac{3i}{4}R^{*}L_{ij} - \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ij}U \ , & \nabla_{-i}\chi_{+j} &= \tfrac{3i}{4}R^{*}L_{ij} + \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ij}U \ , \\
\nabla_{\underset{+i}{\bullet}}\chi_{+j} &= -\tfrac{3i}{2}\nabla_{\ddagger}L_{ij} + \tfrac{3}{4}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{\ddagger}P \ , & \nabla_{\underset{-i}{\bullet}}\chi_{-j} &= -\tfrac{3i}{2}\nabla_{=}L_{ij} + \tfrac{3}{4}\mathcal{C}_{ij}\nabla_{=}P \ , \\
\nabla_{\underset{-i}{\bullet}}\chi_{+j} &= \tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ij}(M - iN) \ , & \nabla_{\underset{+i}{\bullet}}\chi_{-j} &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{C}_{ij}(M + iN) \ , \\
\nabla_{\pm i}U &= 0 \ , \\
\nabla_{\underset{+i}{\bullet}}U &= -\tfrac{3i}{2}\nabla_{\ddagger}\chi_{-i} \ , & \nabla_{\underset{-i}{\bullet}}U &= -\tfrac{3i}{2}\nabla_{=}\chi_{+i} \ , \\
\nabla_{+i}(M + iN) &= \tfrac{3i}{2}\nabla_{\ddagger}\chi_{-i} \ , & \nabla_{-i}(M - iN) &= \tfrac{3i}{2}\nabla_{=}\chi_{+i} \ , \\
\nabla_{+i}(M - iN) &= 0 \ , & \nabla_{-i}(M + iN) &= 0 \ .
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

Die beiden Multipletts besitzen in diesem Fall eine 'Dualitäts'–Relation, die wir an folgenden Gleichungen demonstrieren

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\pm i}B \pm\ 2\, i\nabla_{\underset{\pm}{\bullet}}G &= 0 \ , &\qquad \nabla_{\underset{\pm}{\bullet}}B = 0 \ , &\qquad \nabla_{\pm i}F \mp\ i\nabla_{\pm i}G = 0 \ , \\
\nabla_{\underset{\pm i}{\bullet}}U \pm\ 2\, i\nabla_{\pm}N &= 0 \ , & \nabla_{\pm}U = 0 \ , && \nabla_{\pm i}M \mp\ i\nabla_{\pm i}N = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

Die Struktur der Gleichungen definiert uns eine Dualitätsabbildung, die die physikalischen Spin-0–Felder des einen Multipletts mit den Spin-0 Hilfsfelder des anderen Multipletts und umgekehrt vertauscht.

Kapitel 6

(4,4) Zwangsbedingungen

6.1 Lösen der Zwangsbedingungen

In diesem Kapitel wollen wir die Zwangsbedingungen (3.14) in Termen von Präpotentialen lösen. Wir verfahren dabei analog zum Fall der zweidimensionalen nichtminimalen (2,2) Supergravitation, mit der wir uns im Kapitel 2 beschäftigt haben. Die Schwierigkeiten, auf die wir dabei stoßen werden, stammen von der $SU(2)$ Konnektion. Wir werden sehen, daß sich die gekrümmten Supervielbeine $E_{\pm i}$ und die Konnektionen $\Omega_{\pm i}$ und $\Gamma_{\pm i}{}^{l}{}_{j}$ durch die flachen Vielbeine $\hat{E}_{\pm i}$, die $SU(2)$ Singlett und Triplett Superfelder P und L_{ij} und die vektoriellen $SU(2)$–Tensor Superfelder $A_{\pm i}{}^{\mp j}$ ausdrücken lassen. Dabei sind die $A_{\pm i}{}^{\mp j}$ Superfelder analog zu den A's in der (2,2) Supergravitation Funktionen der allgemeinen (4,4) Vektor Superfelder H^m, die uneingeschränkt sind. Im Gegensatz zur (2,2) Supergravitation bekommen wir hier aber noch zusätzliche quadratische und differentielle Gleichungen, denen die Präpotentiale unterliegen. In [22] wurde gezeigt, daß das allgemeine (4,4) Vektor Superfeld H^m anders als sein N=2 Gegenstück überzählige supersymmetrische Freiheitsgrade enthält und daß . nur ein irreduzibles (4,4) Superfeld das N=4 superkonforme Supergravitationsmultiplett beschreibt. Das relevante irreduzible Superfeld läßt sich nach [22] in der linearen Approximation identifizieren. Eine intuitive Verallgemeinerung des flachen (2,2) Superdifferentialoperators lautet

$$\hat{E}_{\pm i} = e^{-\mathcal{H}} D_{\pm i} e^{\mathcal{H}} \ . \tag{6.1}$$

Dabei hat der Oprator $\mathcal{H}$ nur einen imaginären 'Raum–Zeit' Anteil, $\mathcal{H} = iH^m\partial_m$ und H^m ist ein relles Vektor Superfeld. Analog zur (2,2) Supergravitation bilden die Operatoren $\hat{E}_{\pm i}$ sowie ihr konjugiertes $\hat{E}_{\underset{\pm}{\bullet} i}$ und $\hat{E}_{\ddagger,=}$ eine konventionelle Basis von

Ableitungsoperatoren und erfüllen eine geschlossene Algebra im Superraum. Nach dem Frobenius–Theorem [3, 4] hängen die Supervielbeinoperatoren mit den flachen über

$$
\begin{aligned}
E_{+i} &= (K_1)_i{}^j \left[\hat{E}_{+j} + A_{+i}{}^{-j}\hat{E}_{-j}\right] \ , \\
E_{-i} &= (K_2)_i{}^j \left[\hat{E}_{-j} + A_{-i}{}^{+j}\hat{E}_{+j}\right]
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

zusammen. Dabei haben wir die skalaren $SU(2)$-Tensor Superfelder $(K_{1,2})_i{}^j$ und die Vektor $SU(2)$-Tensor Superfelder $(A_a)_i{}^j = (A_{+i+}{}^j, A_{-i-}{}^j)$ eingeführt. Wir haben in Gleichung (6.2) angenommen, daß wir die Felder in holomorphe und antiholomorphe Anteile aufspalten können, so daß nur ungepunktete Indizes in (6.2) auftreten. Um die skalaren $SU(2)$-Tensor Superfeld $(K_{1,2})_i{}^j$ in (6.2) näher bestimmen zu können, nutzen wir die Tatsache aus, daß die zweidimensionale (4,4) Supergravitation superkonform flach ist. Dies führt dazu, daß die Beziehung zwischen den flachen und gekrümmten Spinorableitungen die Form einer (4,4) superkonformen Transformation hat. Für die infinitesimalen Super–Weyl–Transformationen läßt sich der Ansatz

$$
\delta\nabla_{\pm i} = \tfrac{1}{2}P\nabla_{\pm i} + a_{\pm}L_i{}^j\nabla_{\pm j} + b_{\pm}(\nabla_{\pm i}P)\mathcal{M} + c_{\pm}i(\nabla_{\pm j}P)\mathcal{Y}_i{}^j \tag{6.3}
$$

machen. Setzen wir diesen in die Zwangsbedingungen (3.14) ein, dann stoßen wir auf Widersprüche bei der Bestimmung des Koeffizienten $b_{\pm}$. Die Koeffizienten $a_{\pm}$ und $c_{\pm}$ lassen sich eindeutig bestimmen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ beim ersten Term ist dadurch festgelegt, daß uns das Feld P als infinitesimaler Skalentransformationsparameter dienen soll. Der Widerspruch bei der Bestimmung der Koeffizienten hindert uns aber nicht daran, die endliche Super–Weyl Transformation für die Supervielbeinkomponente zu berechnen. Wir erhalten für $E_{\pm i}$

$$
\delta E_{\pm i} = \tfrac{1}{2}PE_{\pm i} + L_i{}^j E_{\pm j} \quad . \tag{6.4}
$$

Dies liefert uns

$$
(K_1)_i{}^j = (K_2)_i{}^j \equiv K_i{}^j = \exp(\tfrac{1}{2}P\mathbf{1} + L)_i{}^j \ . \tag{6.5}
$$

Wir sind jetzt in der Lage, die Zwangsbedingungen in (3.14) zu lösen. Dazu setzen wir im folgenden (6.2) mit (6.5) in die Zwangsbedingungen (3.14) ein. Wir verfahren dabei analog zum Fall der zweidimensionalen (2,2) Supergravitation.

Wir fangen mit der Constraint $\{\nabla_{+i}, \nabla_{+j}\} = 0$ an. Setzen wir dort die expliziten Ausdrücke für die kovarianten Spinorableitungen (3.4) ein

$$
\{\nabla_{+i}, \nabla_{+j}\} \;=\; 0
$$

$$
\begin{aligned}
\{E_{+i}+\Omega_{+i}\mathcal{M}+i\Gamma_{+i}\,{}_l^{\,k}\mathcal{Y}_k^{\;l},E_{+j}+\Omega_{+j}\mathcal{M}+i\Gamma_{+j}\,{}_m^{\,n}\mathcal{Y}_n^{\;m}\} &= 0\\
\{E_{+i},E_{+j}\}+\{E_{+i},\Omega_{+j}\mathcal{M}\}+\{E_{+i},i\Gamma_{+j}\,{}_m^{\,n}\mathcal{Y}_n^{\;m}\} &\\
+\{\Omega_{+i}\mathcal{M},E_{+j}\}+\{\Omega_{+i}\mathcal{M},\Omega_{+j}\mathcal{M}\}+\{\Omega_{+i}\mathcal{M},i\Gamma_{+j}\,{}_m^{\,n}\mathcal{Y}_n^{\;m}\} &\\
+\{i\Gamma_{+i}\,{}_l^{\,k}\mathcal{Y}_k^{\;l},E_{+j}\}+\{i\Gamma_{+i}\,{}_l^{\,k}\mathcal{Y}_k^{\;l},\Omega_{+j}\mathcal{M}\}+\{i\Gamma_{+i}\,{}_l^{\,k}\mathcal{Y}_k^{\;l},i\Gamma_{+j}\,{}_m^{\,n}\mathcal{Y}_n^{\;m}\} &= 0\\
\{E_{+i},E_{+j}\}+\tfrac{1}{2}E_{+i}\Omega_{+j}+E_{+i}\Omega_{+j}\mathcal{M}+i\Gamma_{+j}\,{}_m^{\,n}(\delta_i^{\;m}E_{+n}-\tfrac{1}{2}\delta_n^{\;m}E_{+i}) &\\
+iE_{+i}\Gamma_{+j}\,{}_m^{\,n}\mathcal{Y}_n^{\;m}+\tfrac{1}{2}\Omega_{+i}E_{+j}+E_{+j}\Omega_{+i}\mathcal{M}+\tfrac{i}{2}\Omega_{+i}\Gamma_{+j}\mathcal{Y} &\\
+i\Gamma_{+j}\,{}_m^{\,n}(\delta_i^{\;m}\Omega_{+n}-\tfrac{1}{2}\delta_n^{\;m}\Omega_{+i})\mathcal{M}+i\Gamma_{+i}\,{}_l^{\,k}(\delta_j^{\;l}E_{+k}-\tfrac{1}{2}\delta_k^{\;l}E_{+j}) &\\
+iE_{+j}\Gamma_{+i}\mathcal{Y}+\tfrac{i}{2}\Omega_{+j}\Gamma_{+i}\mathcal{Y}-\Gamma_{+i}\,{}_l^{\,k}(\delta_j^{\;l}\Gamma_{+k}\mathcal{Y}-\tfrac{1}{2}\delta_k^{\;l}\Gamma_{+j}\mathcal{Y}) &\\
-\Gamma_{+j}\,{}_l^{\,k}(\delta_i^{\;l}\Gamma_{+k}\mathcal{Y}-\tfrac{1}{2}\delta_k^{\;l}\Gamma_{+i}\mathcal{Y})-\Gamma_{+i}\,{}_r^{\,l}\Gamma_{+j}\,{}_l^{\,s}\mathcal{Y}_s^{\;r}-\Gamma_{+j}\,{}_r^{\,l}\Gamma_{+i}\,{}_l^{\,s}\mathcal{Y}_s^{\;r} &= 0, \quad (6.6)
\end{aligned}
$$

erhalten wir die Bedingungen

$$
\begin{aligned}
E_{+i}E_{+j}+\tfrac{1}{2}\Omega_{+i}E_{+j}+i\;\Gamma_{+i}\,{}_k^{\,l}\left(\delta_j^{\;k}E_{+l}-\tfrac{1}{2}\delta_l^{\;k}E_{+j}\right)\;+\;(i\;\leftrightarrow\;j) &= 0\;,\\
E_{+i}\Omega_{+j}+i\;\Gamma_{+i}\,{}_k^{\,l}\left(\delta_j^{\;k}\Omega_{+l}-\tfrac{1}{2}\delta_l^{\;k}\Omega_{+j}\right)\;+\;(i\;\leftrightarrow\;j) &= 0\;,\\
iE_{+i}\Gamma_{+j}\mathcal{Y}+\tfrac{i}{2}\Omega_{+i}\Gamma_{+j}\mathcal{Y}-\Gamma_{+i}\,{}_k^{\,l}\left(\delta_j^{\;k}\Gamma_{+l}\mathcal{Y}-\tfrac{1}{2}\delta_l^{\;k}\Gamma_{+j}\mathcal{Y}\right) &\\
-\Gamma_{+i}\,{}_r^{\,l}\Gamma_{+j}\,{}_l^{\,s}\mathcal{Y}_s^{\;r}\;+\;(i\;\leftrightarrow\;j) &= 0. \quad (6.7)
\end{aligned}
$$

Setzen wir in die erste Zeile die expliziten Ausdrücke für die Vielbeine (6.2) ein

$$
\begin{aligned}
\{E_{+i},E_{+j}\}+(\tfrac{1}{2}\delta_j^{\;l}\Omega_{+i}+i\;\Gamma_{+i}\,{}_j^{\,l})E_{+l}+(\tfrac{1}{2}\delta_j^{\;l}\Omega_{+i}+i\;\Gamma_{+i}\,{}_j^{\,l})E_{+l} &= 0\\
K_i^{\;k}(\hat{E}_{+k}+A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l})K_j^{\;m}(\hat{E}_{+m}+A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}) &\\
+(\tfrac{1}{2}\delta_j^{\;l}\Omega_{+i}+i\Gamma_{+i}\,{}_l^{\,l})K_l^{\;m}(\hat{E}_{+m}+A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n})+(i\;\leftrightarrow\;j) &= 0\\
K_i^{\;k}(\hat{E}_{+k}K_j^{\;m}+A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}K_j^{\;m})(\hat{E}_{+m}+A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}) &\\
+K_j^{\;k}(\hat{E}_{+k}K_i^{\;m}+A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}K_i^{\;m})(\hat{E}_{+m}+A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}) &\\
+K_i^{\;k}K_j^{\;m}\{\hat{E}_{+k}+A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l},\hat{E}_{+m}+A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}\} &\\
+(\tfrac{1}{2}\delta_j^{\;l}\Omega_{+i}+i\Gamma_{+i}\,{}_j^{\,l})K_l^{\;m}(\hat{E}_{+m}+A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}) &\\
+(\tfrac{1}{2}\delta_i^{\;l}\Omega_{+j}+i\Gamma_{+j}\,{}_i^{\,l})K_l^{\;m}(\hat{E}_{+m}+A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}) &= 0, \quad (6.8)
\end{aligned}
$$

dann liefert sie als Gleichungen für die Konnektionen, da die $\hat{E}_{\pm i}$ linear unabhängig sind,

$$
\tfrac{1}{2}(\Omega_{+i}\delta_j^{\;\;l}+2i\Gamma_{+i}\,{}_j^{\,l})K_l^{\;m}+(i\leftrightarrow j)=-K_i^{\;k}(\hat{E}_{+k}K_j^{\;m}+A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}K_j^{\;m})+(i\leftrightarrow j)\;. \quad (6.9)
$$

Die Koeffizienten $A_{+i}{}^{-j}$ müssen dabei

$$
\hat{E}_{+k}A_{+m}{}^{-n}+A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}A_{+m}{}^{-n}+(k\leftrightarrow m)=0\;. \quad (6.10)
$$

erfüllen.

Aus der Zwangsbedingung $\{\nabla_{-i},\nabla_{-j}\}=0$ erhalten wir analog

$$
\begin{aligned}
E_{-i}E_{-j}-\tfrac12\Omega_{-i}E_{-j}+i\,\Gamma_{-i}{}_k{}^l\left(\delta_j{}^kE_{-l}-\tfrac12\delta_l{}^kE_{-j}\right)\ +\ (i\ \leftrightarrow\ j)\ &=\ 0\ ,\\
E_{-i}\Omega_{-j}+i\,\Gamma_{-i}{}_k{}^l\left(\delta_j{}^k\Omega_{-l}-\tfrac12\delta_l{}^k\Omega_{-j}\right)\ +\ (i\ \leftrightarrow\ j)\ &=\ 0\ ,\\
iE_{-i}\Gamma_{-j}\mathcal{Y}-\tfrac{i}{2}\Omega_{-i}\Gamma_{-j}\mathcal{Y}-\Gamma_{-i}{}_k{}^l\left(\delta_j{}^k\Gamma_{-l}\mathcal{Y}-\tfrac12\delta_l{}^k\Gamma_{-j}\mathcal{Y}\right)&\\
-\Gamma_{-i}{}_r{}^l\Gamma_{-j}{}_l{}^s\mathcal{Y}_s{}^r\ +\ (i\ \leftrightarrow\ j)\ &=\ 0\ ,
\end{aligned}
$$

was

$$\tfrac12(\Omega_{-i}\delta_j{}^l-2i\Gamma_{-i}{}_j{}^l)K_l{}^m+(i\leftrightarrow j)=K_i{}^k(\hat E_{-k}K_j{}^m+A_{-k}{}^{+l}\hat E_{+l}K_j{}^m)+(i\leftrightarrow j)\tag{6.11}$$

und

$$\hat E_{-k}A_{-m}{}^{+n}+A_{-k}{}^{+l}\hat E_{+l}A_{-m}{}^{+n}+(k\leftrightarrow m)=0\ .\tag{6.12}$$

liefert.

Als nächstes betrachten wir der Zwangsbedingung $\{\nabla_{+i},\nabla_{\underset{-}{\bullet}}{}^j\}=-\frac{i}{2}\,(S-iT)\,\left(\delta_i{}^j\mathcal{M}-\mathcal{Y}_i{}^j\right)$. Mit (3.4) bekommen wir als Bedingungen

$$
\begin{aligned}
\{E_{+i},E_{\underset{-}{\bullet}}{}^j\}-\tfrac12\Omega_{+i}E_{\underset{-}{\bullet}}{}^j+\tfrac12\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^jE_{+i}&\\
-i\Gamma_{+i}{}_k{}^l(\delta_l{}^jE_{\underset{-}{\bullet}}{}^k-\tfrac12\delta_l{}^kE_{\underset{-}{\bullet}}{}^j)-i\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^j{}_k{}^l\left(\delta_i{}^kE_{+l}-\tfrac12\delta_l{}^kE_{+i}\right)\ &=\ 0\ ,\\
E_{+i}\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^j+E_{\underset{-}{\bullet}}{}^j\Omega_{+i}-\Omega_{+i}\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^j&\\
-i\Gamma_{+i}{}_k{}^l(\delta_l{}^j\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^k-\tfrac12\delta_l{}^k\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^j)-i\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^j{}_k{}^l\left(\delta_i{}^k\Omega_{+l}-\tfrac12\delta_l{}^k\Omega_{+i}\right)\ &=\ -\tfrac{i}{2}(S-iT)\delta_i{}^j\ ,\\
iE_{+i}\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^j\mathcal{Y}-iE_{\underset{-}{\bullet}}{}^j\Gamma_{+i}\mathcal{Y}-\tfrac{i}{2}\Omega_{+i}\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^j\mathcal{Y}-\tfrac{i}{2}\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^j\Gamma_{+i}\mathcal{Y}&\\
+\Gamma_{+i}{}_k{}^l(\delta_l{}^j\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^k\mathcal{Y}-\tfrac12\delta_l{}^k\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^j\mathcal{Y})-\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^j{}_k{}^l\left(\delta_i{}^k\Gamma_{+l}\mathcal{Y}-\tfrac12\delta_l{}^k\Gamma_{+i}\mathcal{Y}\right)&\\
-\Gamma_{+i}{}_r{}^l\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^j{}_l{}^s\mathcal{Y}_s{}^r-\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^j{}_r{}^l\Gamma_{+i}{}_l{}^s\mathcal{Y}_s{}^r\ &=\ -\tfrac{i}{2}(S-iT)\mathcal{Y}_i{}^j\ .
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Auch hier wollen wir zunächst nur die erste Zeile betrachten. Benutzen wir die expliziten Ausdrücke für die Vielbeine (6.2), dann liefert sie

$$
\begin{aligned}
&-K_i{}^k(\hat E_{+k}+A_{+k}{}^{-l}\hat E_{-l})K_m{}^j(\hat E_{\underset{-}{\bullet}}{}^m-A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{+}}{}_n\hat E_{\underset{+}{\bullet}}{}^n)\\
&-K_m{}^j(\hat E_{\underset{-}{\bullet}}{}^m-A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{+}}{}_n\hat E_{\underset{+}{\bullet}}{}^n)K_i{}^k(\hat E_{+k}+A_{+k}{}^{-l}\hat E_{-l})\\
&\quad-\tfrac12(\Omega_{+i}\delta_k{}^j+2i\Gamma_{+i}{}_k{}^j)K_m{}^k(\hat E_{\underset{-}{\bullet}}{}^m-A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{+}}{}_n\hat E_{\underset{+}{\bullet}}{}^n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\tfrac{1}{2}(\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^{j}\delta_i{}^{l} - 2i\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^{j}{}_{i}{}^{l})K_l{}^{k}(\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}) &= 0 \\
-K_i{}^{k}(\hat{E}_{+k}K_m{}^{j} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}K_m{}^{j})(\hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}) & \\
-K_m{}^{j}(\hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}K_i{}^{k} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}K_i{}^{k})(\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}) & \\
-K_i{}^{k}K_m{}^{j}\{\hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}, \hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}\} & \\
-\tfrac{1}{2}(\Omega_{+i}\delta_k{}^{j} + 2i\Gamma_{+i}{}_{k}{}^{j})K_m{}^{k}(\hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}) & \\
+\tfrac{1}{2}(\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^{j}\delta_i{}^{l} - 2i\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^{j}{}_{i}{}^{l})K_l{}^{k}(\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}) &= 0\ . \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

Daraus resultieren konsistente Gleichungen für die Konnektionen

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^{j}\delta_i{}^{l} - 2i\Gamma_{\underset{-}{\bullet}}{}^{j}{}_{i}{}^{l})K_l{}^{k} &= -K_m{}^{j}(\hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}K_i{}^{k} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}K_i{}^{k}) \\
\tfrac{1}{2}(\Omega_{+i}\delta_k{}^{j} + 2i\Gamma_{+i}{}_{k}{}^{j})K_m{}^{k} &= -K_i{}^{k}(\hat{E}_{+k}K_m{}^{j} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}K_m{}^{j})\ . \qquad (6.15)
\end{aligned}
$$

Um die A's bestimmen zu können, müssen wir den Antikommutator in (6.14) berechnen

$$
\begin{aligned}
\{\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}\} &= 0 \\
\{\hat{E}_{+k}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}\} - \{\hat{E}_{+k}, A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}\} & \\
+\{A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}\} - \{A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}, A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}\} &= 0 \\
\{\hat{E}_{+k}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}\} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\{\hat{E}_{+k}, \hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}\} - (\hat{E}_{+k}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n})\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n} + A_{+k}{}^{-l}\{\hat{E}_{-l}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}\} & \\
+(\hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}A_{+k}{}^{-l})\hat{E}_{-l} - A_{+k}{}^{-l}(\hat{E}_{-l}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n})\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n} & \\
-A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}(\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}A_{+k}{}^{-l})\hat{E}_{-l} - A_{+k}{}^{-l}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\{\hat{E}_{-l}, \hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}\} &= 0. \\
& \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir als Bedingungen an die A's als quadratische Gleichung

$$
\{\hat{E}_{+k}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}\} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\{\hat{E}_{+k}, \hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}\} + A_{+k}{}^{-l}\{\hat{E}_{-l}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}\} - A_{+k}{}^{-l}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\{\hat{E}_{-l}, \hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}\} = 0\ , \qquad (6.17)
$$

und als Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_{+k}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n} &= 0\ , \\
\hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m}A_{+k}{}^{-l} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{n}A_{+k}{}^{-l} &= 0\ . \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

Die komplex konjugierte Zwangsbedingung $\{\nabla_{\underset{+}{\bullet}}{}^{i}, \nabla_{-j}\} = -\frac{i}{2}\,(S+iT)\,\left(\delta_j{}^i\mathcal{M} + \mathcal{Y}_j{}^i\right)$ liefert ebenfalls konsistente Gleichungen für die Konnektionen

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\Omega_{\underset{+}{\bullet}}{}^{i}\delta_j{}^l + 2i\Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{i}{}^{l}_{j})K_l{}^k &= -K^i{}_m(\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m}K_j{}^k - A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m\dot{-}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{n}K_i{}^k) \\
\tfrac{1}{2}(\Omega_{-j}\delta_l{}^j + 2i\Gamma_{-j}{}^{i}_{l})K^l{}_m &= -K_j{}^k(\hat{E}_{-k}K^i{}_m + A_{-k}{}^{+l}\hat{E}_{-l}K^i{}_m)\,. \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

Aus der Zwangsbedingung $\{\nabla_{+i}, \nabla_-{}^j\} = -\frac{i}{2}\,\overline{R}\,\left(\delta_i{}^j\mathcal{M} - \mathcal{Y}_i{}^j\right)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\{E_{+i}, E_{-j}\} - \tfrac{1}{2}\Omega_{+i}E_{-j} + \tfrac{1}{2}\Omega_{-j}E_{+i} & \\
+i\,\Gamma_{+i}{}^{l}_{k}\left(\delta_j{}^kE_{-l} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^kE_{-j}\right) + i\,\Gamma_{-j}{}^{l}_{k}\left(\delta_i{}^kE_{+l} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^kE_{+i}\right) &= 0\,, \\
E_{+i}\Omega_{-j} + E_{-j}\Omega_{+i} - \Omega_{+i}\Omega_{-j} & \\
+i\,\Gamma_{+i}{}^{l}_{k}\left(\delta_j{}^k\Omega_{-l} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Omega_{-j}\right) + i\,\Gamma_{-j}{}^{l}_{k}\left(\delta_i{}^k\Omega_{+l} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Omega_{+i}\right) &= -\tfrac{i}{2}\overline{R}C_{ij}\,, \\
iE_{+i}\Gamma_{-j}\mathcal{Y} + iE_{-j}\Gamma_{+i}\mathcal{Y} - \tfrac{i}{2}\Omega_{+i}\Gamma_{-j}\mathcal{Y} + \tfrac{i}{2}\Omega_{-j}\Gamma_{+i}\mathcal{Y} & \\
-\Gamma_{+i}{}^{l}_{k}\left(\delta_j{}^k\Gamma_{-l}\mathcal{Y} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Gamma_{-j}\mathcal{Y}\right) - \Gamma_{-j}{}^{l}_{k}\left(\delta_i{}^k\Gamma_{+l}\mathcal{Y} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Gamma_{+i}\mathcal{Y}\right) & \\
-\Gamma_{+i}{}^{l}_{r}\Gamma_{-j}{}^{s}_{l}\mathcal{Y}_s{}^r - \Gamma_{-j}{}^{l}_{r}\Gamma_{+i}{}^{s}_{l}\mathcal{Y}_s{}^r &= \tfrac{i}{2}\overline{R}\mathcal{Y}_{ij}\,.
\end{aligned}
$$

Setzen wir in die erste Zeile die expliziten Ausdrücke für die Vielbeine (6.2) ein

$$
\begin{aligned}
K_i{}^k(\hat{E}_{+k}K_j{}^m + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}K_j{}^m)(\hat{E}_{-m} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n}) & \\
+K_j{}^m(\hat{E}_{-m}K_i{}^k + A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}K_i{}^k)(\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}) & \\
+K_i{}^kK_j{}^m(\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l})(\hat{E}_{-m} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n}) & \\
+K_i{}^kK_j{}^m(\hat{E}_{-m} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n})(\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}) & \\
+(-\tfrac{1}{2}\Omega_{+i}\delta_j{}^l + i\Gamma_{+i}{}^{l}_{j})K_l{}^m(\hat{E}_{-m} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n}) & \\
+(\tfrac{1}{2}\Omega_{-j}\delta_i{}^l + i\Gamma_{-j}{}^{l}_{i})K_l{}^m(\hat{E}_{+m} + A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}) &= 0 \\
(-\tfrac{1}{2}\Omega_{+i}\delta_j{}^l - i\Gamma_{+i}{}^{l}_{j})K_l{}^m(\hat{E}_{-m} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n}) & \\
+(\tfrac{1}{2}\Omega_{-j}\delta_i{}^l + -i\Gamma_{-j}{}^{l}_{i})K_l{}^m(\hat{E}_{+m} + A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}) & \\
+K_i{}^kK_j{}^m(\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l})(\hat{E}_{-m} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n}) & \\
+K_i{}^kK_j{}^m(\hat{E}_{-m} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n})(\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}) & \\
+(-\tfrac{1}{2}\Omega_{+i}\delta_j{}^l + i\Gamma_{+i}{}^{l}_{j})K_l{}^m(\hat{E}_{-m} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n}) & \\
+(\tfrac{1}{2}\Omega_{-j}\delta_i{}^l + i\Gamma_{-j}{}^{l}_{i})K_l{}^m(\hat{E}_{+m} + A_{+m}{}^{-n}\hat{E}_{-n}) &= 0 \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

und führen analog zu Kapitel 2 die Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_{+i} + A_{+i}{}^{-j}\hat{E}_{-j} = u_i\,, \quad \hat{E}_{-i} + A_{-i}{}^{+j}\hat{E}_{+j} &= v_i\,, \\
\hat{E}_{+i} &= (u - A_+{}^-v)_k(1 - A_+{}^-A_-{}^+)^{-1}{}^{k}{}_{i}\,, \\
\hat{E}_{-i} &= (v - A_-{}^+u)_k(1 - A_-{}^+A_+{}^-)^{-1}{}^{k}{}_{i} \qquad (6.21)
\end{aligned}
$$

ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&-\Omega_{+i}K_j{}^m v_m + \Omega_{-j}K_i{}^m u_m \\
&+K_i{}^k K_j{}^m(\hat{E}_{+k}A_{-m}{}^{+n} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}A_{-m}{}^{+n})(u_r - A_{+r}{}^{-s}v_s)(1-A_+{}^-A_-{}^+)^{-1}{}^r{}_n \\
&+K_i{}^k K_j{}^m(\hat{E}_{-m}A_{+k}{}^{-l} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n}A_{+k}{}^{-l})(v_r - A_{-r}{}^{+s}u_s)(1-A_-{}^+A_+{}^-)^{-1}{}^r{}_l \quad = \quad 0 \; .
\end{aligned}$$

Die Forderung, daß der Koeffizient vor v_s verschwindet, liefert

$$\begin{aligned}
&-\Omega_{+i}K_j{}^m\delta_m^s \\
&-K_i{}^k K_j{}^m(\hat{E}_{+k}A_{-m}{}^{+n} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}A_{-m}{}^{+n})(A_+{}^-)_r{}^s(1-A_+{}^-A_-{}^+)^{-1}{}^r{}_n \\
&+K_i{}^k K_j{}^m(\hat{E}_{-m}A_{+k}{}^{-l} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n}A_{+k}{}^{-l})(1-A_-{}^+A_+{}^-)^{-1}{}^s{}_l = 0 \; .
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Fordern wir, daß der Koeffizient vor u_s verschwindet, dann bekommen wir

$$\begin{aligned}
&\Omega_{-j}K_i{}^m\delta_m^s \\
&+K_i{}^k K_j{}^m(E_{+k}A_{-m}{}^{+n} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}A_{-m}{}^{+n})(1-A_+{}^-A_-{}^+)^{-1}{}^s{}_n \\
&-K_i{}^k K_j{}^m(\hat{E}_{-m}A_{+k}{}^{-l} + A_{-m}{}^{+n}\hat{E}_{+n}A_{+k}{}^{-l})(A_-{}^+)_r{}^s(1-A_-{}^+A_+{}^-)^{-1}{}^r{}_l = 0 \; .
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Mit (6.10) und (6.12) erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}
\Omega_{+i} &= K_i{}^k(\hat{E}_{-n}A_{+k}{}^{-n} - A_{+k}{}^{-m}\hat{E}_{+r}A_{-m}{}^{+r}) \; , \\
\Omega_{-i} &= -K_i{}^k(\hat{E}_{+n}A_{-k}{}^{+n} - A_{-k}{}^{+n}\hat{E}_{-r}A_{+n}{}^{-r}) \; .
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Nun sind wir in der Lage die Konnektionen $\Gamma_{\pm i}{}^l{}_j$ zu berechnen. Dazu berechnen wir zuerst

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{\pm i}(\mathrm{e}^L)_j{}^k &\equiv \hat{E}_{\pm i}B_j{}^k \\
&= B_j{}^r((B^{-1})_r{}^s\hat{E}_{\pm i}B_s{}^k) \\
&= B_j{}^r\hat{U}_{\pm r}{}_i{}^k \; ,
\end{aligned} \tag{6.25}$$

womit wir

$$\hat{E}_{\pm i}K_j{}^l \quad = \quad \tfrac{1}{2}\hat{E}_{\pm i}PK_j{}^l + K_j{}^r\hat{U}_{\pm r}{}_i{}^k \tag{6.26}$$

sowie

$$\begin{aligned}
E_{+i}K_j{}^m &= K_i{}^k(\hat{E}_{+k} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l})K_j{}^m \\
&= \tfrac{1}{2}(E_{+i}P)K_j{}^m + K_i{}^k(K_j{}^r\hat{U}_{+r}{}_k{}^m + A_{+k}{}^{-l}K_j{}^r\hat{U}_{-r}{}_l{}^m) \\
&= \tfrac{1}{2}E_{+i}PK_j{}^m + K_j{}^rU_{+r}{}_i{}^m
\end{aligned} \tag{6.27}$$

erhalten. Dabei haben wir

$$
\begin{aligned}
U_{+i\,j}{}^{k} &= (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}P+L})_j{}^l(\hat{U}_{+il}{}^{k} + A_{+l}{}^{-m}\hat{U}_{-i\,m}{}^{k})\ , \\
U_{-i\,j}{}^{k} &= (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}P+L})_j{}^l(\hat{U}_{-il}{}^{k} + A_{-l}{}^{+m}\hat{U}_{+i\,m}{}^{k})
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

definiert. Damit lassen sich die Konnektion $\Gamma_{\pm i\,j}{}^{l}$ zu

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{+i\,j}{}^{l} &= \tfrac{i}{2}\Omega_{+i}\delta_j{}^l + \tfrac{i}{2}E_{+i}P\delta_j{}^l + iK_j{}^rU_{+r\,i}{}^{m}(K^{-1})_m^{\,l} \\
\Gamma_{-i\,j}{}^{l} &= \tfrac{i}{2}\Omega_{-i}\delta_j{}^l - \tfrac{i}{2}E_{-i}P\delta_j{}^l - iK_j{}^rU_{-r\,i}{}^{m}(K^{-1})_m^{\,l}
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

berechnen. In Matrixschreibweise lauten sie

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{+i} &= \tfrac{i}{2}\ \Omega_{+i} + \tfrac{i}{2}E_{+i}P + ie^{L}U_{+i}e^{-L} \\
\Gamma_{-i} &= \tfrac{i}{2}\Omega_{-i} - \tfrac{i}{2}E_{-i}P - i\mathrm{e}^{L}U_{+i}\mathrm{e}^{-L}\ .
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

Die verbleibende Zwangsbedingung $\{\nabla_{+i}, \nabla_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}\} \ = \ i\delta_i{}^j\nabla_{\ddagger}$ liefert

$$
\begin{aligned}
\{E_{+i}, E_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}\} + \tfrac{1}{2}\Omega_{+i}E_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j} + \tfrac{1}{2}\Omega_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}E_{+i}& \\
+i\ \Gamma_{+i\ k}{}^{l}(-\delta_l{}^jE_{\underset{+}{\bullet}}{}^{k} + \tfrac{1}{2}\delta_l{}^kE_{\underset{-}{\bullet}}{}^{j}) - i\ \Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}{}_{k}{}^{l}(\delta_i{}^kE_{+l} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^kE_{+i}) &= i\delta_i{}^j\nabla_{\ddagger}, \\
E_{+i}\Omega_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j} + E_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}\Omega_{+i}& \\
-i\ \Gamma_{+i\ k}{}^{l}(\delta_l{}^j\Omega_{\underset{-}{\bullet}}{}^{k} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Omega_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}) - i\ \Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}{}_{k}{}^{l}(\delta_i{}^k\Omega_{+l} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Omega_{+i}) &= 0\ , \\
-iE_{+i}\Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}\mathcal{Y} + iE_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}\Gamma_{+i}\mathcal{Y} - \tfrac{i}{2}\Omega_{+i}\Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}\mathcal{Y} + \tfrac{i}{2}\Omega_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}\Gamma_{+i}\mathcal{Y}& \\
-\Gamma_{+i\ k}{}^{l}(\delta_l{}^j\Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{k}\mathcal{Y} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}\mathcal{Y}) + \Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}{}_{k}{}^{l}(\delta_i{}^k\Gamma_{+l}\mathcal{Y} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Gamma_{+i}\mathcal{Y})& \\
+\Gamma_{+i\ r}{}^{l}\Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}{}_{l}{}^{s}\mathcal{Y}_s{}^r + \Gamma_{\underset{+}{\bullet}}{}^{j}{}_{r}{}^{l}\Gamma_{+i\ l}{}^{s}\mathcal{Y}_s{}^r &= 0\ .
\end{aligned}
$$

Wenn wir die erste Zeile betrachten, dann finden wir einen bedeutenden Unterschied zum Fall N=2. Wenn $i = j$, dann bestimmt die erste Zeile $\nabla_{\ddagger}$. Wir können aber auch $i \neq j$ wählen, so daß die rechte Seite verschwindet. Diese Möglichkeit hatten wir im Fall von N=2 nicht. Da wir die Konnektionen schon vollständig bestimmt haben, liefert uns diese Zwangsbedingung weitere Bedingungen an die A's. Als quadratische Gleichung erhalten wir

$$
\{\hat{E}_{+k}, \hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m}\} - A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{-}}{}_{n}\{\hat{E}_{+k}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{n}\} + A_{+k}{}^{-l}\{\hat{E}_{-l}, \hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m}\} - A_{+k}{}^{-l}A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{-}}{}_{n}\{\hat{E}_{-l}, \hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{n}\} = 0
\tag{6.31}
$$

und als Differentialgleichugen

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_{+k}A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{-}}{}_{n} + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{-}}{}_{n} &= 0, \\
\hat{E}_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m}A_{+k}{}^{-l} - A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{-}}{}_{n}\hat{E}_{\underset{-}{\bullet}}{}^{n}A_{+k}{}^{-l} &= 0\ .
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

Für die Konnektionen bekommen wir konsistente Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\Omega_{+i}\delta_k{}^j - 2i\Gamma_{+i}{}^j{}_k)K_m{}^k &= -K_i{}^k(\hat{E}_{+k}K_m{}^j + A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l}K_m^j)\ , \\
\tfrac{1}{2}(\Omega_{\dot{+}}{}^j\delta_i{}^l - 2i\Gamma_{\dot{+}}{}^j{}_i{}^l)K_l{}^k &= K_m^j(\hat{E}_{\dot{+}}{}^m K_i{}^k - A_{\dot{+}}{}^{m\dot{-}}{}_n\hat{E}_{\dot{-}}{}^n K_i{}^k)\ . \qquad (6.33)
\end{aligned}
$$

Die letzte Zwangsbedingung in Gleichung (2.8) $\{\nabla_{-i}, \nabla_{\dot{-}}{}^j\} = i\delta_i{}^j\nabla_=$ liefert

$$
\begin{aligned}
&\{E_{-i}, E_{\dot{-}}{}^j\} - \tfrac{1}{2}\Omega_{-i}E_{\dot{-}}{}^j - \tfrac{1}{2}\Omega_{\dot{-}}{}^j E_{-i} \\
&+i\,\Gamma_{-i}{}^l{}_k(-\delta_l{}^j E_{\dot{-}}{}^k + \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k E_{\dot{-}}{}^j) - i\,\Gamma_{\dot{-}}{}^j{}_k{}^l(\delta_i{}^k E_{-l} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k E_{-i}) = i\delta_i{}^j\nabla_=\ , \\
&E_{-i}\Omega_{\dot{-}}{}^j + E_{\dot{-}}{}^j\Omega_{-i} \\
&-i\,\Gamma_{-i}{}^l{}_k(\delta_l{}^j\Omega_{\dot{-}}{}^k - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Omega_{\dot{-}}{}^j) - i\,\Gamma_{\dot{-}}{}^j{}_k{}^l(\delta_i{}^k\Omega_{-l} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Omega_{-i}) = 0\ , \\
&-iE_{-i}\Gamma_{\dot{-}}{}^j\mathcal{Y} + iE_{\dot{-}}{}^j\Gamma_{-i}\mathcal{Y} + \tfrac{i}{2}\Omega_{-i}\Gamma_{\dot{-}}{}^j\mathcal{Y} - \tfrac{i}{2}\Omega_{\dot{-}}{}^j\Gamma_{-i}\mathcal{Y} \\
&+\Gamma_{-i}{}^l{}_k(-\delta_l{}^j\Gamma_{\dot{+}}{}^k\mathcal{Y} + \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Gamma_{\dot{+}}{}^j\mathcal{Y}) + \Gamma_{\dot{-}}{}^j{}_k{}^l(\delta_i{}^k\Gamma_{+l}\mathcal{Y} - \tfrac{1}{2}\delta_l{}^k\Gamma_{+i}\mathcal{Y}) \\
&+\Gamma_{-i}{}^l{}_r\Gamma_{\dot{-}}{}^j{}_l{}^s\mathcal{Y}_s{}^r + \Gamma_{\dot{-}}{}^j{}_r{}^l\Gamma_{-i\,l}{}^s\mathcal{Y}_s{}^r = 0\ .
\end{aligned}
$$

Wenn $i = j$ ist, bestimmt die erste Zeile $\nabla_=$. Für den Fall $i \neq j$ treten auch hier zusätzliche Zwangsbedingungen an die A's auf. Als quadratische Gleichung erhalten wir ein zu (6.31) analoges Resultat

$$
\{\hat{E}_{-k}, \hat{E}_{\dot{-}}{}^m\} - A_{\dot{-}}{}^{m\dot{+}}{}_n\{\hat{E}_{-k}, \hat{E}_{\dot{+}}{}^n\} - A_{-k}{}^{+l}A_{\dot{-}}{}^{m\dot{+}}{}_n\{\hat{E}_{+l}, \hat{E}_{\dot{+}}{}^n\} + A_{-k}{}^{+l}\{\hat{E}_{+l}, \hat{E}_{\dot{+}}{}^n\} = 0\ , \qquad (6.34)
$$

und als Differentialgleichungen bekommen wir analog zu (6.32)

$$
\begin{aligned}
\hat{E}_{-k}A_{\dot{-}}{}^{m\dot{+}}{}_n + A_{-}{}^{+l}\hat{E}_{+l}A_{\dot{-}}{}^{m\dot{+}}{}_n &= 0\ , \\
\hat{E}_{\dot{-}}{}^m A_{-k}{}^{+l} - A_{\dot{-}}{}^{m\dot{+}}{}_n\hat{E}_{\dot{+}}{}^n A_{-k}{}^{+l} = 0\ . & \qquad (6.35)
\end{aligned}
$$

Für die Konnektionen bekommen wir auch hier konsistente Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\Omega_{-i}\delta_l{}^j + i\Gamma_{-i}{}^j{}_l)K_m{}^l &= -K_i{}^k(\hat{E}_{-k}K^j{}_m + A_{-k}{}^{+l}\hat{E}_{-l}K^j{}_m \\
\tfrac{1}{2}(\Omega_{\dot{-}}{}^j\delta_i{}^l + i\Gamma_{\dot{-}}{}^j{}_i{}^l)K_l{}^k &= K^j{}_m(\hat{E}_{\dot{-}}{}^m K_i{}^k - A_{\dot{-}}{}^{m\dot{+}}{}_n\hat{E}_{\dot{+}}{}^n K_i{}^k)\ . \qquad (6.36)
\end{aligned}
$$

Bisher haben wir immer nur die erste Zeile der Bedingungen (6.7), (6.11), (6.31) und (6.34) betrachtet. Wir müssen noch zeigen, daß die restlichen Bedingungen in (6.7), (6.11), (6.31) und (6.34) erfüllt sind. Um dies zeigen zu können, brauchen wir die zu (2.23) und (2.26) analogen Beziehungen, die sich aufgrund der $SU(2)$ nicht so selbstverständlich ergeben wie im Fall der nichtminimalen zweidimensionalen (2,2) Supergravitation.

6.2 Bestimmung der A's

In diesem Abschnitt wollen wir die Superfeldkonnektionen $A_{+i}{}^{-j}$ und $A_{-i}{}^{+j}$ als Funktionen der Präpotentiale bestimmen. Wir werden hier nicht wie im Fall N=2 mit quadratischen Gleichungen für die A's enden. Die zusätzlichen Bediungungen aus $\{\nabla_+, \nabla_{\underset{+}{\bullet}}\}$ und $\{\nabla_-, \nabla_{\underset{-}{\bullet}}\}$ sorgen dafür, daß wir einfache Ausdrücke für die A's bekommen. Da wir aber mehr Gleichungen haben als zur Bestimmung von A nötig sind, erhalten wir Bedingungen an die Präpotentiale. Weiterhin werden wir sehen, daß die A's ihre Differentialgleichungen (6.10), (6.12), (6.18), (6.32) und (6.35) nicht identisch erfüllen wie im Fall N=2, was zu weiteren Bedingungen an die Präpotentiale führt. Zuerst können wir jedoch analog zum Fall N=2 verfahren.

Wir definieren uns zuerst

$$\hat E_{\ddagger} \equiv \tfrac{i}{2}\{\hat E_+{}^i, \hat E_{\underset{+}{\bullet}i}\}\ , \qquad \hat E_{=} \equiv \tfrac{i}{2}\{\hat E_-{}^i, \hat E_{\underset{-}{\bullet}i}\}\ . \tag{6.37}$$

Aus der Struktur der flachen Vielbeine ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \{\hat E_{+i}, \hat E_{\underset{-}{\bullet}}{}^j\} &= \hat G_{+i\overset{\bullet}{-}}{}^{j\ddagger}\hat E_{\ddagger} + \hat G_{+i\overset{\bullet}{-}}{}^{j=}\hat E_{=}\ , \\ \{\hat E_{-i}, \hat E_{\underset{+}{\bullet}}{}^j\} &= \hat G_{-i\overset{\bullet}{+}}{}^{j\ddagger}\hat E_{\ddagger} + \hat G_{-i\overset{\bullet}{+}}{}^{j=}\hat E_{=}\ . \end{aligned} \tag{6.38}$$

Damit zerfällt Gleichung (6.17) in zwei Gleichungen:

$$\hat G_{+k\overset{\bullet}{-}}{}^{m\ddagger} - iA_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{+}}{}_k - A_{+k}{}^{-l}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{+}}{}_n\hat G_{-l\overset{\bullet}{+}}{}^{n\ddagger} = 0\ , \tag{6.39}$$

$$\hat G_{+k\overset{\bullet}{-}}{}^{m=} + iA_{+k}{}^{-m} - A_{+k}{}^{-l}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{+}}{}_n\hat G_{-l\overset{\bullet}{+}}{}^{n=} = 0\ . \tag{6.40}$$

Und (6.31) zerfällt in

$$i\delta_k^m + A_{+k}{}^{-l}\hat G_{-l\overset{\bullet}{+}}{}^{m\ddagger} - A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{-}}{}_n\hat G_{+k\overset{\bullet}{-}}{}^{n\ddagger} = 0\ , \tag{6.41}$$

$$-iA_{+k}{}^{-l}A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{-}}{}_l + A_{+k}{}^{-l}\hat G_{-l\overset{\bullet}{+}}{}^{m=} - A_{\underset{+}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{-}}{}_n\hat G_{+k\overset{\bullet}{-}}{}^{n=} = 0\ , \tag{6.42}$$

und (6.34) in

$$i\delta_k^m + A_{-k}{}^{+l}\hat G_{+l\overset{\bullet}{-}}{}^{m=} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{+}}{}_n\hat G_{-k\overset{\bullet}{+}}{}^{n=} = 0\ , \tag{6.43}$$

$$-iA_{-k}{}^{+l}A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{+}}{}_l + A_{-k}{}^{+l}\hat G_{+l\overset{\bullet}{-}}{}^{m\ddagger} - A_{\underset{-}{\bullet}}{}^{m\overset{\bullet}{+}}{}_n\hat G_{-k\overset{\bullet}{+}}{}^{n\ddagger} = 0\ . \tag{6.44}$$

Von $\{\nabla_{\dot{+}}{}^{i}, \nabla^{j}_{-}\}$ erhalten wir die zu (6.39) und (6.40) analogen Gleichungen

$$\hat{G}_{-m\dot{+}}{}^{k\ddagger} + iA_{-m}{}^{+k} - A_{\dot{+}}{}^{k\dot{-}}{}_{l}\,A_{-m}{}^{+n}\hat{G}_{+n\dot{-}}{}^{l\ddagger} \;=\; 0\;, \tag{6.45}$$

$$\hat{G}_{-m\dot{+}}{}^{k=} - iA_{\dot{+}}{}^{k\dot{-}}{}_{m} - A_{\dot{+}}{}^{k\dot{-}}{}_{l}\,A_{-m}{}^{+n}\hat{G}_{+n\dot{-}}{}^{l=} \;=\; 0\;. \tag{6.46}$$

Setzen wir in (6.45) den Ausdruck

$$(A_{-}{}^{+})_{i}{}^{j} = (A_{+}{}^{-}\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger})_{i}{}^{l}((\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{=})^{-1})_{l}{}^{j} \tag{6.47}$$

für $(A_{-}{}^{+})_{i}{}^{j}$ ein, so erhalten wir (6.39). Ebenso erhalten wir (6.40), wenn wir in Gleichung (6.46) folgenden Ausdruck für $(A_{\dot{+}}{}^{\dot{-}})^{j}{}_{i}$ einsetzen

$$(A_{\dot{+}}{}^{\dot{-}})^{j}{}_{i} = (A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}}\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{=})_{i}{}^{k}((\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{\ddagger})^{-1})_{k}{}^{j}\;. \tag{6.48}$$

Schauen wir uns die Gleichungen (6.39)-(6.46) an, dann stellen wir fest, daß die Gleichungen (6.41) und (6.43) einen linearen Zusammenhang zwischen den gepunkteten und ungepunkteten Vektorsuperfeldern A liefern. Diese Relationen führen dazu, daß wir ein lineares Gleichungssystem für die A's und kein quadratisches wie im Fall N=2 bekommen. Aus (6.41) bekommen wir

$$A_{\dot{+}}{}^{m\dot{-}}{}_{n}\,\hat{G}_{+k\dot{-}}{}^{n\ddagger} = i\delta_{k}{}^{m} + A_{+k}{}^{-l}\hat{G}_{-l\dot{+}}{}^{m\ddagger} \quad , \tag{6.49}$$

was in (6.45) eingesetzt

$$\begin{aligned} \hat{G}_{-m\dot{+}}{}^{k\ddagger} + iA_{-m}{}^{+k} - A_{-m}{}^{+n}A_{\dot{+}}{}^{k\dot{-}}{}_{l}\,\hat{G}_{+n\dot{-}}{}^{l\ddagger} &= 0 \\ \hat{G}_{-m\dot{+}}{}^{k\ddagger} + iA_{-m}{}^{+k} - A_{-m}{}^{+n}(i\delta_{n}{}^{k} + A_{+n}{}^{-l}\hat{G}_{-l\dot{+}}{}^{k\ddagger}) &= 0 \\ \hat{G}_{-m\dot{+}}{}^{k\ddagger} - A_{-m}{}^{+n}A_{+n}{}^{-l}\hat{G}_{-l\dot{+}}{}^{k\ddagger} &= 0 \end{aligned} \tag{6.50}$$

liefert. Benutzen wir (6.47), so erhalten wir

$$(A_{-}{}^{+})_{i}{}^{j} = (\sqrt{(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{=})^{-1}})_{i}{}^{j}\;, \tag{6.51}$$

und als komplex Konjugiertes

$$(A_{\dot{-}}{}^{\dot{+}})^{i}{}_{j} = (\sqrt{(\hat{G}_{\dot{-}+}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\dot{+}-}{}^{=})^{-1}})^{i}{}_{j}\;. \tag{6.52}$$

Aus Gleichung (6.43) bekommen wir

$$A_{\dot{-}}{}^{m\dot{-}}{}_{n}\,\hat{G}_{-k\dot{+}}{}^{n=} = i\delta^{m}_{k} + A_{-k}{}^{+l}\hat{G}_{+l\dot{-}}{}^{m=}\;, \tag{6.53}$$

was wir in (6.40) einsetzen

$$
\begin{aligned}
\hat{G}_{+k\dot{-}}{}^{m=} + iA_{+k}{}^{-m} - A_{+k}{}^{-l}A_{\dot{-}}{}^{m\dot{+}}{}_{n}\,\hat{G}_{-l\dot{+}}{}^{n=} &= 0\\
\hat{G}_{+k\dot{-}}{}^{m=} + iA_{+k}{}^{-m} - A_{+k}{}^{-l}(i\delta^m_l + A_{-l}{}^{+n}\hat{G}_{+n\dot{-}}{}^{m=}) &= 0\\
\hat{G}_{+k\dot{-}}{}^{m=} - A_{+k}{}^{-l}A_{-l}{}^{+n}\hat{G}_{+n\dot{-}}{}^{m=} &= 0. \qquad (6.54)
\end{aligned}
$$

Mit (6.47) erhalten wir

$$
(A_+{}^-)_i{}^j = \left(\sqrt{(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{=})(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_i{}^j \qquad (6.55)
$$

und als kompex Konjugiertes

$$
(A_{\dot{+}}{}^{\dot{-}})^i_j = \left(\sqrt{(\hat{G}_{\dot{+}-}{}^{=})(\hat{G}_{\dot{-}+}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)^i_j\ . \qquad (6.56)
$$

Wir haben bisher noch nicht die Gleichungen (6.39), (6.42) und (6.44) benutzt. Da wir die Konnektionen aber schon bestimmt haben, geben uns diese Gleichungen Bedingungen an die G's und damit an die Präpotentiale. Setzen wir die Ausdrücke für die Konnektionen $(A_+{}^-)_i{}^j$ und $(A_-{}^+)_i{}^j$ in (6.39) ein, dann erhalten wir als quadratische Bedingung an die G's

$$
\begin{aligned}
&(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{\ddagger})_k{}^m - i\left(\sqrt{(\hat{G}_{\dot{-}+}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\dot{+}-}{}^{=})^{-1}}\right)^m_k\\
&-\left(\sqrt{(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{=})(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l\left(\sqrt{(\hat{G}_{\dot{-}+}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\dot{+}-}{}^{=})^{-1}}\right)^m_n(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger})_l{}^n = 0\ , \qquad (6.57)
\end{aligned}
$$

Setzen wir die expliziten Ausdrücke für die Konnektionen in (6.42) ein, dann bekommen wir

$$
\begin{aligned}
&-i\left(\sqrt{(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{=})(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l\left(\sqrt{(\hat{G}_{\dot{+}-}{}^{=})(\hat{G}_{\dot{-}+}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)^m_l\\
&+\left(\sqrt{(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{=})(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{=})_l{}^m - \left(\sqrt{(\hat{G}_{\dot{+}-}{}^{=})(\hat{G}_{\dot{-}+}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)^m_l(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{=})_k{}^n = 0\ ,
\end{aligned}
\qquad (6.58)
$$

und (6.44) liefert

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{=})^{-1}}\right)_k{}^l\left(\sqrt{(\hat{G}_{\dot{-}+}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\dot{+}-}{}^{=})^{-1}}\right)^m_l\\
&+\left(\sqrt{(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{=})^{-1}}\right)_k{}^l(\hat{G}_{+\dot{-}}{}^{\ddagger})_l{}^m - \left(\sqrt{(\hat{G}_{\dot{-}+}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\dot{+}-}{}^{=})^{-1}}\right)^m_n(\hat{G}_{-\dot{+}}{}^{\ddagger}) = 0\ .
\end{aligned}
\qquad (6.59)
$$

Bleibt noch zu zeigen, daß die A's ihre Differentialgleichungen (6.10), (6.12), (6.18), (6.32) und (6.35) erfüllen. Wir wollen dabei wie im Fall N=2 vorgehen. Wir berechnen also zuerst den Kommutator von (6.17) mit $\hat{E}_{+i}$ und dann mit $\hat{E}_{-i}$ und wollen die Lösungen der Differentialgleichungen der letzten beiden zu denen der ersten beiden proportional setzen. Aufgrund der $SU(2)$ Struktur ist uns dies aber nicht möglich. Wir bekommen daher zusätzliche Bedingungen an die $\hat{G}$'s. Neben den bereits erwähnten Gleichungen müssen die $\hat{G}$'s noch die Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
&\hat{E}_{+k}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_m{}^n \\
&+\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l \hat{E}_{-l}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})-1}\right)_m{}^n + (k \leftrightarrow m) = 0 \\
&\hat{E}_{-k}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})^{-1}}\right)_m{}^n \\
&+\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})^{-1}}\right)_k{}^l \hat{E}_{+l}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})^{-1}}\right)_m{}^n + (k \leftrightarrow m) = 0 \\
&\hat{E}_{+k}\left(\sqrt{(\hat{G}^{\bullet}{}_{-+}{}^{\ddagger})(\hat{G}^{\bullet}{}_{+-}{}^{=})^{-1}}\right)^m{}_n \\
&+\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l \hat{E}_{-l}\left(\sqrt{(\hat{G}^{\bullet}{}_{-+}{}^{\ddagger})(\hat{G}^{\bullet}{}_{+-}{}^{=})^{-1}}\right)^m{}_n = 0 \\
&\hat{E}^{\bullet}{}_{-}{}^{m}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l \\
&-\left(\sqrt{(\hat{G}^{\bullet}{}_{-+}{}^{\ddagger})(\hat{G}^{\bullet}{}_{+-}{}^{=})^{-1}}\right)^m{}_n \hat{E}^{\bullet}{}_{+}{}^{n}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l = 0 \\
&\hat{E}_{+k}\left(\sqrt{(\hat{G}^{\bullet}{}_{+-}{}^{=})(\hat{G}^{\bullet}{}_{-+}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)^m{}_n \\
&+\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l \hat{E}_{-l}\left(\sqrt{(\hat{G}^{\bullet}{}_{+-}{}^{=})(\hat{G}^{\bullet}{}_{-+}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)^m{}_n = 0 \\
&\hat{E}^{\bullet}{}_{+}{}^{m}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l \\
&-\left(\sqrt{(\hat{G}^{\bullet}{}_{+-}{}^{=})(\hat{G}^{\bullet}{}_{-+}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)^m{}_n \hat{E}^{\bullet}{}_{-}{}^{n}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})^{-1}}\right)_k{}^l = 0 \\
&\hat{E}_{-k}\left(\sqrt{(\hat{G}^{\bullet}{}_{-+}{}^{\ddagger})(\hat{G}^{\bullet}{}_{+-}{}^{=})^{-1}}\right)^m{}_n \\
&+\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})^{-1}}\right)_k{}^l \hat{E}_{-l}\left(\sqrt{(\hat{G}^{\bullet}{}_{-+}{}^{\ddagger})(\hat{G}^{\bullet}{}_{+-}{}^{=})^{-1}}\right)^m{}_n = 0 \\
&\hat{E}^{\bullet}{}_{-}{}^{m}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})^{-1}}\right)_k{}^l \\
&-\left(\sqrt{(\hat{G}^{\bullet}{}_{-+}{}^{\ddagger})(\hat{G}^{\bullet}{}_{+-}{}^{=})^{-1}}\right)^m{}_n \hat{E}^{\bullet}{}_{+}{}^{n}\left(\sqrt{(\hat{G}_{\underset{-+}{\bullet}}{}^{\ddagger})(\hat{G}_{\underset{+-}{\bullet}}{}^{=})^{-1}}\right)_k{}^l = 0
\end{aligned}
\tag{6.60}
$$

erfüllen.

Wir haben in diesem Kapitel Fortschritte bei dem Unternehmen gemacht, die Zwangsbedingungen der minimalen zweidimensionalen (4,4) Supergravitation in Termen von Präpotentialen zu lösen. Nach dem Frobenius–Theorem konnten wir die gekrümmten Supervielbeine mit den flachen in Beziehung setzen. Die skalaren $SU(2)$ Tensor Superfelder $(K_{1,2})_i{}^j$ ließen sich aufgrund der Tatsache, daß die zweidimensionale Supergravitation superkonform flach ist, näher bestimmen. Die Beziehung zwischen den flachen und gekrümmten Spinorableitungen nimmt dann die Form einer (4,4) superkonformen Transformation an. Damit ist es uns gelungen, das gekrümmte Supervielbein und die Konnektionen durch uneingeschränkte Superfelder auszudrücken. Der bedeutende Unterschied zur nichtminimalen zweidimensionalen (2,2) Supergravitation besteht darin, daß die Zwangsbedingungen $\{\nabla_\pm, \nabla_{\dot{\pm}}\}$ zusätzliche Bedingungen liefern. Wir erhalten daher quadratische und differentielle Gleichungen, denen das Vektor Superfeld H^m unterliegt. Diese Gleichungen haben wir hier nur angegeben, ihre Konsequenzen aber noch nicht weiter untersucht. In der Referenz [22] wird gezeigt, daß das Vektor Superfeld H^m anders als sein N=2 Gegenstück überzählige Freiheitsgrade hat und daß das off-shell N=4 superkonforme Supergravitationsmultiplett nur von einem irreduziblen Superfeld beschrieben wird. Dieses läßt sich nach [22] in der linearen Approximation identifizieren. Auf diesen Sachverhalt wollen wir hier aber nicht näher eingehen.

Kapitel 7

Super-Weyl Transformationen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Super–Weyl Transformationen. Die Super–Weyl Transformationen sind die residuelle Symmetrie der N=4 Supergravitation. Die Zwangsbedingungen (3.14) sind invariant unter ihnen. Wir hatten bereits erwähnt, daß wir Probleme bei der Berechnung der infinitesimalen Transformationen hatten. Setzt man den Ansatz

$$\delta\nabla_{\pm i} = \tfrac{1}{2}P\nabla_{\pm i} + a_{\pm}L_i{}^j\nabla_{\pm j} + b_{\pm}(\nabla_{\pm i}P)\mathcal{M} + c_{\pm}i(\nabla_{\pm j}P)\mathcal{Y}_i{}^j \qquad (7.1)$$

in die Zwangsbedingungen (3.14) ein, dann stößt man auf Widersprüche bei der der Bestimmung des Koeffizienten $b_{\pm}$. Unserer Meinung nach ist der Ansatz (7.1) der allgemeinste und wir konnten bisher dieses Problem nicht lösen. Auf dieselben Probleme stoßen wir, wenn wir die endlichen Super-Weyl Transformationen über den Ansatz

$$(\nabla_{\pm i})_{S.W.} = K_i{}^k(\nabla_{\pm k} + w_{\pm}(\nabla_{\pm k}P)\mathcal{M} - 2\hat{U}_{\pm r}{}_l{}^r\mathcal{Y}_k{}^l) \qquad (7.2)$$

berechnen. Hier bekommen wir widersprüchliche Ergebnisse für den Koeffizienten $w_{\pm}$. Wir wollen uns jetzt die Super–Weyl Transformationen analog zur zweidimensionalen (2,2) Supergravitation überlegen. Neben dem skalaren Transformationsparameter S für das $SU(2)$ Singlett Superfeld P, führen wir für die $SU(2)$ Struktur einen Transformationsparameter $U_i{}^j$ ein. Als Transformationsverhalten für die Superfelder P, $\hat{E}_{\pm i}$, $(\mathrm{e}^L)_i{}^j$ und $A_{+i}{}^{-j}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
P &\rightarrow P + S \\
\hat{E}_{\pm i} &\rightarrow U_i{}^j\hat{E}_{\pm j} \\
B_i^j &= (\mathrm{e}^L)_i{}^j \rightarrow U_i{}^l B_l{}^m((U)^{-1})_m^j \\
A_{+i}{}^{-j} &\rightarrow U_i{}^k A_{+k}{}^{-l}((U)^{-1})_m^k \ .
\end{aligned} \qquad (7.3)$$

Um das Transformationsverhalten für die Konnektionen zu berechnen, setzen wir (7.3) in die expliziten Ausdrücke für die gekrümmten Supervielbeine (6.2) und die Konnektionen (6.24) und (6.29) ein. Zuerst betrachten wir die gekrümmten Supervielbeine und zerlegen sie

$$\begin{aligned} E_{\pm i} &= \mathrm{e}^{P/2}\; B_i{}^j\; (\hat{E}_{+j} + A_{+j}{}^{-k}\hat{E}_{-k})\;, \\ &= \mathrm{e}^{P/2}\; B_i{}^j F_{\pm j} \quad . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Als Transformationsverhalten für $F_{\pm j}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} F_{+i} &= \hat{E}_{+i} + A_{+i}{}^{-j}\hat{E}_{-j} \\ &\to U_i{}^k\hat{E}_{+k} + U_i^k A_{+k}{}^{-l}(U^{-1})_l{}^k U_k{}^n\hat{E}_{-n} \\ &= U_i{}^k\hat{E}_{+k} + U_i{}^k A_{+k}{}^{-l}\hat{E}_{-l} \\ &= U_i{}^k F_{+k} \quad . \end{aligned} \tag{7.5}$$

Für F_{-i} ergibt sich eine analoge Relation. Damit folgt das Transformationsverhalten von $E_{\pm i}$ zu

$$\begin{aligned} E_{\pm i} &= \mathrm{e}^{P/2}\; B_i{}^j F_{\pm j} \\ &\to \mathrm{e}^{(P+S)/2}\; U_i{}^l B_l{}^k((U)^{-1})_k{}^j U_j{}^m F_{\pm m} \\ &= \mathrm{e}^{(P+S)/2}\; U_i{}^l B_l{}^k F_{\pm k} \\ &= \mathrm{e}^{S/2} U_i{}^k E_{\pm k} \quad . \end{aligned} \tag{7.6}$$

Um das Transformationsverhalten der Konnektion $\Omega_{\pm i}$ zu berechnen, zerlegen wir $\Omega_{\pm i}$ entsprechend

$$\begin{aligned} \Omega_{+i} &= K_i{}^k(\hat{E}_{-n}A_{+k}{}^{-n} - A_{+k}{}^{-m}\hat{E}_{+r}A_{-m}{}^{+r}) \\ &= K_i{}^k G_{+k} \quad , \end{aligned} \tag{7.7}$$

und erhalten als Transformationsverhalten für G_{+i}

$$\begin{aligned} G_{+i} &= \hat{E}_{-j}A_{+i}{}^{-j} - A_{+i}{}^{-j}\hat{E}_{+k}A_{-j}{}^{+k} \\ &\to U_j{}^m\hat{E}_{-m}U_i{}^l A_{+l}{}^{-r}((U)\;{}^{-1})_r{}^j \\ &\quad -U_i{}^l A_{+l}{}^{-u}((U)^{-1})_u{}^m U_r{}^s\hat{E}_{+s}U_m{}^n A_{-n}{}^{+t}((U)^{-1})_t{}^r \\ &\to U_i{}^l G_{+l} + (\hat{E}_{-r}U_i{}^l)A_{+l}{}^{-r} + U_n{}^m U_i{}^l A_{+l}{}^{-r}\hat{E}_{-m}((U)^{-1})r^{\;n} \\ &\quad -U_k{}^l A_{+l}{}^{-u}((U)^{-1})_u{}^m(\hat{E}_{+t}U_m{}^n)A_{-n}{}^{+t} \\ &\quad -U_k{}^l A_{+l}{}^{-u}((U)^{-1})_u{}^m U_r{}^s U_m{}^n A_{-n}{}^{+t}\hat{E}_{+s}((U)^{-1})_t{}^r \\ &= U_i{}^l\hat{G}_{+l} + R_{+i} \quad , \end{aligned} \tag{7.8}$$

was in (7.7) eingesetzt

$$\begin{aligned}\Omega_{\pm i} &\rightarrow e^{S/2}\, U_i{}^j\, \Omega_{\pm j} + e^{S/2}\, U_i{}^j K_j{}^m ((U)^{-1})_m^{\ k} R_{\pm k}, \\ &= e^{S/2}\, U_i{}^j\, \Omega_{\pm j} + e^{S/2}\, U_i{}^j N_{\pm j} \end{aligned} \tag{7.9}$$

liefert, wobei wir

$$\begin{aligned} R_{+i} &= \hat{E}_{-j}\, U_i{}^k\, A_{+k}{}^{-j} + U_n{}^m U_i{}^l A_{+l}{}^{-r} \hat{E}_{-m} ((U)^{-1})_r^{\ n} \\ &\quad - U_i{}^j\, A_{+j}{}^{-k}\, ((U)^{-1})_k^{\ l} \hat{E}_{+m} U_l{}^n A_{-n}{}^{+m} - U_i{}^l A_{+l}{}^{-n} U_r{}^s A_{-n}{}^{+t} \hat{E}_{+t} ((U)^{-1})_t^{\ r}\ , \\ R_{-i} &= \hat{E}_{+j}\, U_i{}^k\, A_{-k}{}^{+j} + U_n{}^m U_i{}^l A_{-l}{}^{+r} \hat{E}_{+m} ((U)^{-1})_r^{\ n} \\ &\quad - U_i{}^j\, A_{-j}{}^{+k}\, ((U)^{-1})_k^{\ l} (\hat{E}_{-m} U_l{}^n) A_{+n}{}^{-m} - U_k{}^l A_{-l}{}^{+n} U_r{}^s A_{+n}{}^{-t} \hat{E}_{-s} ((U)^{-1}) t^{\ r} \end{aligned} \tag{7.10}$$

definiert haben. Als nächstes schauen wir uns das Transformationsverhalten von

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm i\ j}{}^l &= \frac{i}{2}\Omega_{\pm i}\delta_j{}^l \pm \frac{i}{2} E_{\pm i} P \delta_j{}^l \pm i B_j{}^r U_{\pm r\ i}{}^m ((B)^{-1})_m^{\ l} \\ &= \frac{i}{2}\Omega_{\pm i}\delta_j{}^l \pm \frac{i}{2} E_{\pm i} P \delta_j{}^l \pm i E_{\pm i} B_j{}^m ((B)^{-1})_m^{\ l} \end{aligned} \tag{7.11}$$

an. Dazu wollen wir zuerst zeigen, wie sich $E_{\pm i} B_j{}^m ((B)^{-1})_m^{\ l}$ verhält.

$$\begin{aligned} E_{\pm i} B_j{}^m ((B)^{-1})_m^{\ l} &\rightarrow e^{S/2} U_i{}^k E_{\pm k} (UBU^{-1})_j{}^m (UB^{-1}U^{-1})_m^{\ l} \\ &= e^{S/2} U_i{}^k E_{\pm k} ([U,B]U^{-1} + B)_j{}^m (U[B^{-1},U^{-1}] + B^{-1})_m^{\ l} \\ &= e^{S/2} U_i{}^k E_{\pm k} B_j{}^m ((B)^{-1})_m^{\ l} + e^{S/2} U_i{}^k E_{\pm k} B_j{}^m V_j{}^l\ , \end{aligned} \tag{7.12}$$

wobei wir

$$V_j{}^l = ([U,B]U^{-1})_j{}^m (UB^{-1}U^{-1})_m^{\ l} + B_j{}^m (U[B^{-1},U^{-1}])_m^{\ l} \tag{7.13}$$

definiert haben. Damit erhalten wir für $\Gamma_{\pm i\ j}{}^l$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm i\ j}{}^l &= \frac{i}{2}\Omega_{\pm i}\delta_j{}^l \pm \frac{i}{2} E_{\pm i} P \delta_j{}^l \pm i B_j{}^r U_{\pm r\ i}{}^m ((B)^{-1})_m^{\ l} \\ &= \frac{i}{2}\Omega_{\pm i}\delta_j{}^l \pm \frac{i}{2} E_{\pm i} P \delta_j{}^l \pm i E_{\pm i} B_j{}^m ((B)^{-1})_m^{\ l} \\ &\rightarrow \frac{i}{2} e^{S/2} U_i{}^k \Omega_{\pm k} \delta_j{}^l \\ &\quad + \tfrac{i}{2}\delta_j{}^l e^{S/2} U_i{}^k K_k{}^m ((U)^{-1})_m^{\ n} R_{\pm n} \\ &\quad \pm \frac{i}{2} e^{S/2} U_i{}^k E_{\pm k} (P+S) \delta_j{}^l \\ &\quad \pm i e^{S/2} U_i{}^k B_j{}^r U_{\pm r\ k}{}^m ((B)^{-1})_m^{\ l} \\ &\quad \pm i e^{S/2} U_i{}^k E_{\pm k} V_j{}^l \\ &= e^{S/2}\, U_i{}^k \Gamma_{\pm k\ j}{}^l + W_{\pm i\ j}{}^l \end{aligned} \tag{7.14}$$

mit

$$W_{\pm i\ j}{}^{l} = \tfrac{i}{2}\delta_j{}^l \mathrm{e}^{S/2}\ U_i{}^k K_k{}^m (U_m{}^n)^{-1} R_{\pm n} \pm \tfrac{i}{2}\delta_j{}^l \mathrm{e}^{S/2}\ U_i{}^k\ E_{\pm k} S \pm i\mathrm{e}^{S/2} U_i{}^k E_{\pm k} V_j{}^l \quad . \tag{7.15}$$

Setzen wir diese Transformationsgesetze in die Gleichung für $\bar{R}$ ein, dann erhalten wir als Transformationesverhalten

$$\bar{R} \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^S\ U^j{}_l U_j{}^l \bar{R} + Rest \quad . \tag{7.16}$$

Dabei ist der Ausdruck $Rest$ gegeben durch

$$\begin{aligned} Rest \quad = \quad & -i\mathrm{e}^{S/2} U^{jk} E_{+k}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L} U_j{}^l)\Omega_{-l} - i\mathrm{e}^{S/2} U_j{}^l E_{-l}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L} U^{jk})\Omega_{+k} \\ & -i\mathrm{e}^{S/2} U^{jk} E_{+k}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L} U_j{}^l N_{-l}) - i\mathrm{e}^{S/2} U_j{}^l E_{-l}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}L} U^{jk}) N_{+k} \\ & +iU^{jk} U_j{}^l (\Omega_{+k} N_{-l} + N_{+k}\Omega_{-l} + N_{+k} N_{-l}) \\ & +\mathrm{e}^{S/2} U^{jk} [\Gamma_{+k}, U]_j{}^m \Omega_{-m} + \mathrm{e}^{S/2} U^{jk} [G_{-k}, U]_j{}^m \Omega_{-} + m \\ & +\mathrm{e}^{S/2} U^{jk} \Gamma_{+k}{}^{l}{}_{j} U_l{}^m N_{-m} + \mathrm{e}^{S/2} U^{jk} \Gamma_{-k}{}^{l}{}_{j} U_l{}^m N_{+m} \\ & +W_{+}{}^{j}{}_{j}{}^{l} (\mathrm{e}^{S/2} U_l{}^m \Omega_{-m} + \mathrm{e}^{S/2} U_l{}^m N_{-m}) \\ & +W_{-}{}^{j}{}_{j}{}^{l} (\mathrm{e}^{S/2} U_l{}^m \Omega_{+m} + \mathrm{e}^{S/2} U_l{}^m N_{+m}) \quad . \end{aligned} \tag{7.17}$$

Als infinitesimales Transformationsverhalten bekommen wir

$$\delta \bar{R} = S\bar{R} \quad . \tag{7.18}$$

Für $S - iT$ bekommen wir durch eine analoge Rechnung

$$(S - iT) \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^S U^{ik} U_{ik} (S - iT) + Rest \quad . \tag{7.19}$$

Dabei ist $Rest$ durch

$$\begin{aligned} Rest \quad = \quad & -i\mathrm{e}^{S/2} U_i{}^k E_{+k}(\mathrm{e}^{S/2} U^i{}_l)\Omega_{\underline{\bullet}}{}^l - i\mathrm{e}^{S/2} U^i{}_l E_{\underline{\bullet}}{}^l(\mathrm{e}^{S/2} U^i{}_k)\Omega_{+k} \\ & -i\mathrm{e}^{S/2} U_i{}^k E_{+k}(\mathrm{e}^{S/2} U^i{}_l N_{\underline{\bullet}}{}^l) - i\mathrm{e}^{S/2} U^i{}_l E_{\underline{\bullet}}{}^l(\mathrm{e}^{S/2} U^i{}_k N_{+k}) \\ & +i\mathrm{e}^{S/2} U_i{}^k U^i{}_l (N_{+k}\Omega_{\underline{\bullet}}{}^l + \Omega_{+k} N_{\underline{\bullet}}{}^l + N_{+k} N_{\underline{\bullet}}{}^l) \\ & -\mathrm{e}^S U_i{}^k [\Gamma_{+k}, U]^i{}_r \Omega_{\underline{\bullet}}{}^r + \mathrm{e}^S U^i{}_l [\Gamma_{\underline{\bullet}}{}^l, U]_i{}^r \Omega_{+r} \\ & -\mathrm{e}^S U_i{}^k \Gamma_{+k}{}^{j}{}_{l} U^l{}_r N_{\underline{\bullet}}{}^r + \mathrm{e}^S U^i{}_l \Gamma_{\underline{\bullet}}{}^{l}{}_{i}{}^{k} U_k{}^r \Omega_{+r} \\ & -W_{+i}{}^{i}{}_{l} (\mathrm{e}^{S/2} U^l\ r\Omega_{\underline{\bullet}}{}^r + \mathrm{e}^{S/2} U^l{}_r N_{\underline{\bullet}}{}^r) \\ & +W_{\underline{\bullet}}{}^{i}{}_{i}{}^{k} (\mathrm{e}^{S/2} U_k{}^r \Omega_{+r} + \mathrm{e}^{S/2} U_k{}^r N_{+r}) \end{aligned} \tag{7.20}$$

gegeben. Wir erhalten hier für den infinitesimalen Fall

$$\delta(S - iT) = S(S - iT) \quad . \tag{7.21}$$

Wir haben in diesem Kapitel die Super–Weyl Transformationen analog zu Grisaru und Wehlau im Fall der nichtminimalen (2,2) Supergravitation berechnet. Der Unterschied ist der, daß wir aufgrund der $SU(2)$ Struktur einen zusätzlichen $SU(2)$ Transformationsparameter $U_i{}^j$ eingeführt haben. Wir konnten damit das Transformationsverhalten der uneingeschränkten Superfelder berechnen (7.3). Indem wir (7.3) in die Gleichungen für die gekrümmten Supervielbeine und in die Konnektionen eingesetzt haben, erhielten wir das Transformationsverhalten der Superfelder des Supergravitationsmultipletts.

Kapitel 8

Kopplung an Materie in der (4,4) Supergravitation

In diesem Kapitel wollen wir die (4,4) supersymmetrische Materie repräsentiert durch das TM-I und TM-II Multiplett behandeln. Ihre Selbstwechselwirkung und die Kopplung an die (4,4) Supergravitation lassen sich wie im Fall für vier Dimensionen [19, 20, 31] im Superraum leicht konstruieren [30].

Die zweidimensionale lokale (4,4) supersymmetrische Wirkung, die quadratisch in den TM-I Materie Superfeldern ist, läßt sich nach [15] durch die TM-I Präpotentiale $(V, V_i{}^j)$ ausdrücken:

$$I = \int d^2 z d^8\theta \, E^{-1} \left[VA + V_i{}^j A_j{}^i \right] \ . \tag{8.1}$$

Dabei bezeichnen wir mit E^{-1} die gesamte Supervielbein Superdeterminante. A und $A_j{}^i$ sind die TM-I Hilfsfelder in niedrigster Ordnung der θ–Entwicklung. Die Wirkung (8.1) ist invariant unter den folgenden Eichtransformationen der Präpotentiale [32]:

$$\begin{aligned} \delta V &= \nabla^{i\alpha}\Lambda_{i\alpha} + \text{h.c.} \ , \\ \delta V_i{}^j &= \tfrac{i}{3}(\gamma_3)_\alpha{}^\beta \nabla_\beta^k \left[\delta_k^j \Lambda_i^\alpha - \tfrac{1}{2}\delta_i^j \Lambda_k^\alpha + \mathcal{C}^{jl}\Lambda^\alpha_{(ikl)} \right] \ , \end{aligned} \tag{8.2}$$

und kann im chiralen Superraum auf die Form

$$I = \frac{1}{2}\int d^2 z d^4\theta \, \mathcal{E}^{-1}\Phi^2 + \text{h.c.} \tag{8.3}$$

gebracht werden. Dabei haben wir die chirale Superraumdichte $\mathcal{E}$ eingeführt. Φ ist das dimensional reduzierte, reelle, chirale Superfeld, was wir in Gleichung (4.7) angegeben haben. Die Wirkung (8.3) läßt sich zu

$$I_V = \frac{1}{2}\int d^2 z d^4\theta \, \mathcal{E}^{-1} V(\Phi) + \text{h.c.} \tag{8.4}$$

verallgemeinern. $V(\Phi)$ ist eine homogene Funktion vom Grad zwei, die alle (4,4) superkonformen Symmetrien beibehält. (8.4) ähnelt der Standard–Kopplung des N=2 Vektor–Multipletts an die N=2 Supergravitation in vier Dimensionen, die in [20] konstruiert wurde.

Die geometrische Bedeutung von (8.4) sieht man am besten, wenn man sie auf die Form der konventionellen (2,2) Superfelder in zwei Dimensionen bringt. Die resultierende Wirkung ist dann ein Spezialfall des allgemeinen N=2 supersymmetrischen *nicht–linearen Sigma–Modells* (NLSM) gekoppelt an die N=2 Supergravitation, das von Antoniadis, Bachas und Kounnas in [33] angegeben wurde.

$$I_{N=2} = \int d^2x \left\{ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} E^{-1} K(\phi,\bar{\phi}) - \int d^2\theta \mathcal{E}^{-1} W(\phi) - \int d^2\theta \mathcal{E}^{-1} R\Upsilon(\phi) + \text{h.c.} \right\} \quad (8.5)$$

Dabei haben wir das (2,2) Kähler Potential $K(\phi^a\phi^{\bar{b}})$, das Superpotential $W(\phi^a)$ und das Dilatations–Feld $\Upsilon(\phi^a)$ als Funktionen der (2,2) chiralen Superfeld Stringkoordinaten ϕ^a $a = 1, 2$, welche die (2,2) Materie repräsentieren, eingeführt. Weiterhin haben wir die (2,2) chirale Dichte $\mathcal{E}(x,\theta)$ und die Supervielbein Determinante $E(x,\theta,\bar{\theta})$ eingeführt und mit R bezeichnen wir die (2,2) chirale Superfeldstärke der (2,2) Supergravitaton aus (2.9). Im (2,2) Fall sind off-shell alle Funktionen K, W und Υ unabhängig und W und Υ sind holomorph. On-shell hängen sie nach Eliminierung der Hilfsfelder folgendermaßen zusammen [33, 34]

$$W = \left[\frac{\partial^2 K}{\partial\phi^a \partial\bar{\phi}^b} \right]^{-1} \frac{\partial\Upsilon^*}{\partial\bar{\phi}^b} \left(\frac{\partial W}{\partial\phi^a} + H \frac{\partial\Upsilon}{\partial\phi^a} \right) . \quad (8.6)$$

Dabei haben wir das komplexe Hilfsfeld $H = R|$ des (2,2) Supergravitationmultipletts eingeführt. Im Fall eines *einzelnen* Superfeldes ϕ ist es möglich das Dilatationsfeld per Feldredefinition zu linearisieren $\Upsilon = Q\phi$. Dann zwingt (8.6) die Kähler–Metrik flach zu sein $K = \bar{\phi}\phi$ und dies liefert das *Liouville* Potential $W(\phi) = \mu e^{\phi} + H$ [33, 34].

$$I_{N=2} = \int d^2x \left\{ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} E^{-1} \phi\bar{\phi} - \int d^2\theta \mathcal{E}^{-1} (\mu e^{\phi} + H) - Q \int d^2\theta \mathcal{E}^{-1} R\phi + \text{h.c.} \right\} \quad (8.7)$$

Dies ist die (2,2) lokale supersymmetrische Verallgemeinerung der zweidimensionalen bosonischen Liouville –Wirkung

$$I_0 = \tfrac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \left\{ g^{\alpha\beta} \partial_\alpha\phi \partial_\beta\phi + QR\phi - \mu^2 e^{\phi} \right\} . \quad (8.8)$$

mit Q als Hintergrundsladung.

Für die Theorien der TM-II Materie im gekrümmten Superraum der (4,4) Supergravitation wurde bisher keine Wirkung konstruiert. In Kapitel 5 hatten wir auf eine Dualitätsabbildung [17] zwischen dem TM-I und TM-II Multiplett hingewiesen (5.47).

Die Hilfsfelder des TM-II Multiplett können als die führenden Komponenten des sogenannten *kinetischen* (4,4) Multipletts, das das TM-I definiert, betrachtet werden. In [17, 38, 39, 40] wurde eine lokale (4,4) supersymmetrische Invariante in Form des Produktes von TM-I und TM-II konstruiert. In [34] lautet sie im gekrümmten Superraum

$$I_{\mathrm{I-II}} = \int d^2x d^4\theta d^4\bar{\theta} E^{-1}(\Pi S + \Xi T) + \left[\int d^2x d^4\theta\, \mathcal{E}^{-1} \Lambda R + \mathrm{h.c.}\right] \ . \tag{8.9}$$

Dabei haben wir die Superfeld Präpotentiale Π und Ξ und das chirale Superfeld Präpotential Λ des TM-II eingeführt.

Die globale (4,4) supersymmetrische Invariante, die die freie TM-II Wirkung beschreibt und quadratisch in den Feldern ist, wurde in [17] angegeben

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{TM-II}} \quad = \quad & \int \delta^2 x \Big\{ \tfrac{1}{2} P \Box P + L_j{}^i \Box L_i{}^j + \chi_i^\alpha (\gamma^c) \partial_c \bar{\chi}^{\beta i} \\ & + \tfrac{1}{8}(M^2 + N^2 + UU^*) \Big\} \ . \end{aligned} \tag{8.10}$$

Ihre lokale (4,4) supersymmetrische Verallgemeinerung ist jedoch unbekannt. Im Vergleich zur globalen (4,4) Supersymmetrie ist die erlaubte Kopplung an Materie in (4,4) konformer Supergravitation eingeschränkt. Sofern es das TM-II in zwei Dimensionen betrifft, existiert dieses Problem nur vordergründig, da es eine improved zweidimensionale Wirkung [34] gibt. Es ist nämlich möglich, das TM-I Multiplett nichtlinear aus den Komponenten von TM-II zu bilden

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{impr.}} \quad &= \quad L^{-1} U^* + \tfrac{4i}{3} \chi_{\underset{+i}{\bullet}} \chi_{\underset{-}{\bullet}}{}^j L_j{}^i L^{-3} \ , \\ S_{\mathrm{impr.}} \quad &= \quad \tfrac{1}{4}\ L^{-1} M - \tfrac{2i}{3} \left(\chi_{\underset{+i}{\bullet}} \chi_-{}^j - \chi_{\underset{-}{\bullet}}{}^j \chi_{+i} \right) L_j{}^i L^{-3} \ , \\ T_{\mathrm{impr.}} \quad &= \quad \tfrac{1}{4}\ L^{-1} N + \tfrac{2}{3} \left(\chi_{\underset{+i}{\bullet}} \chi_-{}^j + \chi_{\underset{-}{\bullet}}{}^j \chi_{+i} \right) L_j{}^i L^{-3} \ . \end{aligned} \tag{8.11}$$

Dabei haben wir

$$L \equiv \sqrt{L_i{}^j (L_i{}^j)^*} \tag{8.12}$$

eingeführt. Die Zwangsbedingungen (3.14), die den N=4 Superraum definieren, sind invariant unter den Super–Weyl Transformationen. Die Supergravitationsfeldstärken werden durch TM-I repräsentiert und TM-II tritt als Skalenkompensator auf. Die nichtlineare Realisierung von TM-I (8.11) läßt sich aus den *endlichen* Super-Weyl Transformationen ableiten. Man findet (8.11) entweder in niedrigster Ordnung der Entwicklung der endlichen Super–Weyl Transformationen nach TM-I Feldern oder in der superkonformen flachen Eichung, wo die TM-I Felder zu null gesetzt werden. Mit (8.9) läßt sich eine invariante Kopplung des improved TM-II Multipletts an (4,4) Supergravitation in der Form

$$I_{\mathrm{impr.}} = \int d^2x d^4\theta d^4\bar{\theta} E^{-1}(\Pi S_{\mathrm{impr.}} + \Xi T_{\mathrm{impr.}}) + \left[\int d^2x d^4\theta \mathcal{E}^{-1} \Lambda R_{\mathrm{impr.}} + \mathrm{h.c.}\right] \quad (8.13)$$

konstruieren. Das improved TM-II Multiplett ist eine direkte Konsequenz aus der Existenz des Improved N=2 Tensor–Multipletts in vier Dimensionen [19], da sie über die dimensionale Reduktion zusammenhängen. Im Gegensatz zum 4d improved N=2 Tensor–Multiplett hat sein 2d Analogon keine Eichfreiheiten, die es zulassen, daß die (4,4) lokalen supersymmetrischen Komponenten–Wirkung eine $SU(2)$ interne Symmetrie hat.

Um eine weitere (4,4) lokale supersymmetrisch invariante Wirkung zu bilden, addiert man einen zusätzlichen Term, den sogenannten *Fayet-Iliopoulos* (FI) Term, der nach [34] im gekrümmten (4,4) Superraum folgende Struktur hat

$$I_{\mathrm{FI}} = -2\mu \int d^2x d^4\theta d^4\bar{\theta} E^{-1} \Pi \ . \quad (8.14)$$

In der Wirkung

$$I_{\mathrm{L}} = I_{\mathrm{impr.}} + I_{\mathrm{FI}} \quad (8.15)$$

tritt das Hilfsfeld M des improved TM-II Multipletts in der Kombination $e^{-\phi}M^2 - 2\mu M$ auf. Eliminiert man dieses Hilfsfeld durch die Bewegungsgleichungen, dann entsteht das *Liouville* Potential $-\mu^2 e^{\phi}$. Die Wirkung (8.15) ist daher die (4,4) lokale supersymmetrische Liouville Wirkung.

Kapitel 9

(4,4) Supergravitation in Komponenten

In diesem Kapitel behandeln wir die (4,4) Supergravitation in Komponenten. Bisher haben wir immer im Superraum gerechnet. Um diese Arbeit abzurunden, wollen wir hier auf die Formulierung in Komponenten eingehen.

Wir hatten bereits in Kapitel 3 erwähnt, daß das Supergravitations-Multiplett aus $8_{\mathbf{B}} \oplus 8_{\mathbf{F}}$ unabhängigen off-shell Freiheitsgraden besteht. Dort haben wir auch die Komponenten in niedrigster Ordnung der θ–Entwicklung des Supervielbeins und der $SU(2)$ Superkonnektion angegeben.

Das Multiplett der zweidimensionalen N=4 Poincare-Supergravitation besteht also aus dem Graviton $e_\mu{}^a$, vier Gravitini $\psi_{\mu i}$, einem $SU(2)$ Triplett von Graviphotonen $A_\mu{}^I$, einem komplexen Skalar R, und zwei rellen Skalaren S und T. Die infinitesimalen Transformationen der zweidimensionalen N=4 Poincare–Supergravitation wurden in [15] und [23] angegeben

$$
\begin{aligned}
\delta_Q e_\mu{}^a &= -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}^i \gamma^a \psi_{\mu i} + \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu{}^i \gamma^a \epsilon_i \ , \\
\delta_Q \psi_{\mu i} &= D_\mu \epsilon_i + \gamma_\mu \left[\tfrac{1}{4}(S - i\gamma_3 T)\epsilon_i + \tfrac{i}{2} R \gamma_3 \epsilon^*{}_i\right] \ , \\
\delta_Q A_\mu{}^I &= \tfrac{i}{4}\bar{\epsilon}^i (\sigma^I)_i{}^j \gamma_\mu \gamma_3 \varepsilon^{\rho\sigma} D_\rho \psi_{\sigma j} - \tfrac{i}{4}\bar{\epsilon}^i (\sigma^I)_i{}^j \gamma_\mu \gamma^\rho \left[\tfrac{1}{4}(S - i\gamma_3 T)\psi_{\rho j} + \tfrac{i}{2} R \gamma_3 \psi^*{}_{\rho j}\right] \\
&\quad -\tfrac{i}{4}\bar{\psi}_\nu{}^i \gamma_\mu \gamma^\nu (\sigma^I)_i{}^j \left[\tfrac{1}{4}(S - i\gamma_3 T)\epsilon_j + \tfrac{i}{2} R \gamma_3 \epsilon^*{}_j\right] + \text{h.c.} \ , \\
\delta_Q S &= -\varepsilon^{\mu\nu}\bar{\epsilon}^i \gamma_3 D_\mu \psi_{\nu i} + \bar{\epsilon}^i \gamma^\mu \left[\tfrac{1}{4}(S - i\gamma_3 T)\psi_{\mu i} + \tfrac{i}{2} R \gamma_3 \psi^*{}_{\mu i}\right] + \text{h.c.} \ , \\
\delta_Q T &= i\varepsilon^{\mu\nu}\bar{\epsilon}^i D_\mu \psi_{\nu i} - i\bar{\epsilon}^i \gamma_3 \gamma^\mu \left[\tfrac{1}{4}(S - i\gamma_3 T)\psi_{\mu i} + \tfrac{i}{2} R \gamma_3 \psi^*{}_{\mu i}\right] + \text{h.c.} \ , \\
\delta_Q R &= i\varepsilon^{\mu\nu}\tilde{\epsilon}^i D_\mu \psi_{\nu i} - i\tilde{\epsilon}^i \gamma_3 \gamma^\mu \left[\tfrac{1}{4}(S - i\gamma_3 T)\psi_{\mu i} + \tfrac{i}{2} R \gamma_3 \psi^*{}_{\mu i}\right] \ , \\
\delta_Q R^* &= -i\varepsilon^{\mu\nu}\bar{\epsilon}^i D_\mu \psi^*{}_{\nu i} + i\bar{\epsilon}^i \gamma_3 \gamma^\mu \left[\tfrac{1}{4}(S + i\gamma_3 T)\psi^*{}_{\mu i} + \tfrac{i}{2} R^* \gamma_3 \psi_{\mu i}\right] \ . \qquad (9.1)
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir D_μ als kovarainte Ableitung eingeführt

$$D_\mu \epsilon_i = \partial_\mu \epsilon_i + \tfrac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}(e,\psi)\varepsilon_{ab}\gamma_3\epsilon_i - iA_\mu{}^I(\sigma_I)_i{}^j\epsilon_j \ . \tag{9.2}$$

Die Spin–Konnektion $\omega_\mu{}^{ab}(e,\psi)$ enthält die Gravitini–Torsion

$$\begin{aligned} \omega_\mu{}^{ab}(e,\psi) &= \omega_\mu{}^{ab}(e) - \tfrac{1}{4}(\ \bar\psi_\mu{}^i\gamma^a\psi^b{}_i - \bar\psi_\mu{}^i\gamma^b\psi^a{}_i \\ &\quad + \bar\psi^{ai}\gamma_\mu\psi^b{}_i - \bar\psi^{bi}\gamma^a\psi_{\mu i} + \bar\psi^{ai}\gamma^b\psi_{\mu i} - \bar\psi^{bi}\gamma_\mu\psi^a{}_i\ )\ , \end{aligned} \tag{9.3}$$

$\omega_\mu{}^{ab}(e)$ ist die gewöhnliche torsionsfreie Spin–Konnektion

$$\begin{aligned} \omega_\mu{}^{ab}(e) &= \frac{1}{2}e^{\nu a}(\ \partial_\mu e_\nu{}^b - \partial_\nu e_\mu{}^b\ ) - \frac{1}{2}e^{\nu b}(\ \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a\ ) \\ &\quad - \frac{1}{2}e^{\rho a}e^{\lambda b}(\ \partial_\rho e_{\lambda c} - \partial_\lambda e_{\rho c}\ )e_\mu{}^c\ . \end{aligned} \tag{9.4}$$

Will man die N=4 superkonforme Algebra durch freie Felder realisieren, steht einem ein N=4 'twisted chiral' Multiplett $(B, F, G, \lambda, A, A_i{}^j)$ zur Verfügung, das wir schon in Kapitel 4 und 5 behandelt haben. Es enthält einen komplexen Skalar B, zwei reelle Skalare G und H, einen komplexen Dirac–Spinor λ_i in der $SU(2)$ Dublett–Darstellung und reelle Hilfsfelder A und $A_i{}^j$ in der $SU(2)$ Singlett und $SU(2)$ Triplett Darstellung. Als freie Wirkung, die invaraint unter der globalen Algebra ist, findet man [41]

$$\begin{aligned} I &= \int d^2x\ \Big\{2\ \partial_a B\partial^a B^* + \frac{1}{2}\ \partial_a F\partial^a F + \frac{1}{2}\ \partial_a G\partial^a G - \frac{1}{2}\ A^2 - \frac{1}{16}A_i{}^jA_j{}^i \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_+{}^{*i}\partial_-\lambda_{+i} + \lambda_-{}^{*i}\partial_+\lambda_{-i} + \lambda_+{}^i\partial_-\lambda_+{}^*{}_i + \lambda_-{}^i\partial_+\lambda_-{}^*{}_i\right)\Big\}\ . \end{aligned} \tag{9.5}$$

Um eine lokale N=4 supersymmetrische Wirkung zu bekommen, koppelt man über die Noether–Methode das N=4 Materie–Multiplett an das Multiplett der Supergravitation. Als Ergebnis erhält man on-shell die N=4 fermionische String–Wirkung, die von Pernici und Nieuwenhuizen in [42] angegben wurde

$$\begin{aligned} I &= \int d^2x\ e\ g^{\mu\nu}(\ 2\ \partial_\mu B\partial_\nu B^* + \tfrac{1}{2}\partial_\mu F\partial_\nu F + \tfrac{1}{2}\ \partial_\mu G\partial_\nu G\ ) - e\ \tfrac{1}{2}\ \bar\lambda^i\gamma^\mu\overleftrightarrow{\mathcal{D}_\mu}\lambda_i \\ &\quad + ie\ \bar\lambda^i\gamma^\mu A_\mu{}^I(\sigma_I)_i{}^j\lambda_j \\ &\quad + e\ [\tfrac{1}{2}\bar\psi_\nu{}^i\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu(F - i\gamma_3 G)\lambda_i - \bar\psi_\nu^i\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu B\lambda^*{}_i + h.c.] \\ &\quad + e\ [\tfrac{1}{8}(\bar\psi_\nu^i\gamma^\mu\gamma^\nu\lambda_i)(\bar\psi_\mu{}^j\lambda_j + \bar\lambda^j\psi_{\mu j}) - \tfrac{1}{8}(\bar\psi_\nu{}^i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_3\lambda_i)(\bar\psi_\mu{}^j\gamma_3\lambda_j + \bar\lambda^j\gamma_3\psi_{\mu j}) \\ &\quad - \tfrac{1}{4}(\bar\psi_\nu{}^i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_3\lambda^*{}_i)(\tilde\lambda^j\psi_{\mu j}) + h.c.]\ . \end{aligned} \tag{9.6}$$

Dabei haben wir mit $\mathcal{D}_\mu$ die kovariante Anleitung *ohne* die $SU(2)$-Konnektion bezeichnet, um eine explizite Kopplung an das $SU(2)$ Eichfeld zu verdeutlichen.

$$\mathcal{D}_\mu\epsilon_i = \partial_\mu\epsilon_i + \tfrac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}(e,\psi)\varepsilon_{ab}\gamma_3\epsilon_i\ . \tag{9.7}$$

Alternativ läßt sich die Wirkung in quaternionischer Schreibweise für das Materie und Supergravitationsmultiplett formulieren. Dazu führen wir drei komplexe Strukturen i, j, k ein, für die $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ und $ij = -ji = k$ gilt. Die Felder X lassen sich dann als

$$X = X_1 + iX_2 + jX_3 + kX_4 \tag{9.8}$$

schreiben. Ein quaternionischer Index läßt sich auch als Multiindex (ii') entsprechend der Zerlegung der $SO(4)$ in $SU(2) \otimes SU(2)$ ausdrücken.

Die N=4 String Wirkung (9.6) ist invariant unter folgenden *lokalen* zweidimensionalen Symmetrien:

(i) *2d Invarainz unter Paramerisierung*:

$$\begin{aligned}
\delta B &= \xi^\lambda \partial_\lambda B \ , \quad \delta F = \xi^\lambda \partial_\lambda F \ , \quad \delta G = \xi^\lambda \partial_\lambda G \ , \\
\delta \lambda_i &= \xi^\lambda \partial_\lambda \lambda_i \ , \\
\delta e_\mu{}^a &= \xi^\lambda \partial_\lambda e_\mu{}^a + e_\lambda{}^a \partial_\mu \xi^\lambda \ , \\
\delta \psi_{\mu i} &= \xi^\lambda \partial_\lambda \psi_{\mu i} + \psi_{\lambda i} \partial_\mu \xi^\lambda \ , \\
\delta A_\mu{}^I &= \xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu{}^I + A_\lambda{}^I \partial_\mu \xi^\lambda \ .
\end{aligned} \tag{9.9}$$

(ii) *lokale Lorentz Roationen*:

$$\begin{aligned}
\delta B &= \delta F = \delta G = \delta \lambda_i = 0 \ , \\
\delta e_\mu{}^a &= l \varepsilon^a{}_b e_\mu{}^b \ , \\
\delta \psi_{\mu i} &= -\tfrac{1}{2} l \gamma_3 \psi_{\mu i} \ , \\
\delta A_\mu{}^I &= 0 \ ,
\end{aligned} \tag{9.10}$$

(iii) N=4 *lokale Supersymmetrie*:

$$\begin{aligned}
\delta B &= \tfrac{1}{2} \tilde{\epsilon}^i \lambda_i \ , \quad \delta B^* = -\tfrac{1}{2} \bar{\lambda}^i \epsilon^*{}_i \ , \\
\delta F &= -\tfrac{1}{2} \left(\bar{\epsilon}^i \lambda_i + \bar{\lambda}^i \epsilon_i \right) \ , \\
\delta G &= \tfrac{i}{2} \left(\bar{\epsilon}^i \gamma_3 \lambda_i + \bar{\lambda}^i \gamma_3 \epsilon_i \right) \ , \\
\delta \lambda_i &= \tfrac{1}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \left(F - i \gamma_3 G \right) \epsilon_i - i \gamma^\mu \partial_\mu B \epsilon^*{}_i \\
&\quad + \tfrac{1}{4} \gamma^\mu \epsilon_i (\bar{\psi}_\mu{}^j \lambda_j + \bar{\lambda}^j \psi_{\mu j}) - \tfrac{1}{4} \gamma^\mu \gamma_3 \epsilon_i (\bar{\psi}_\mu{}^j \gamma_3 \lambda_j + \bar{\lambda}^j \gamma_3 \psi_{\mu j}) - \tfrac{1}{2} \gamma^\mu \epsilon^*{}_i (\tilde{\psi}_\mu{}^j \lambda_j) \ , \\
\delta e_\mu{}^a &= -\tfrac{1}{2} \bar{\epsilon}^i \gamma^a \psi_{\mu i} + \tfrac{1}{2} \bar{\psi}_\mu{}^i \gamma^a \epsilon_i \ , \\
\delta \psi_{\mu i} &= D_\mu \epsilon_i \ , \\
\delta A_\mu{}^I &= \tfrac{i}{4} \bar{\epsilon}^i (\sigma^I)_i{}^j \gamma_\mu \gamma_3 \varepsilon^{\rho\sigma} D_\rho \psi_{\sigma j} + \text{h.c.} \ ,
\end{aligned} \tag{9.11}$$

(iv) *Phasen und chirale Eichinvarianz*:

$$\begin{aligned}
\delta B &= \delta F = \delta G = \delta e_\mu{}^a = 0 \ , \\
\delta\lambda_i &= iv^I(\sigma_I)_i{}^j\lambda_j + i\gamma_3 u^I(\sigma_I)_i{}^j\lambda_j \ , \\
\delta\psi_{\mu i} &= iv^I(\sigma_I)_i{}^j\psi_{\mu j} - i\gamma_3 u^I(\sigma_I)_i{}^j\psi_{\mu j} \ , \\
\delta A_\mu{}^I(\sigma_I)_i{}^j &= D_\mu v^I(\sigma_I)_i{}^j + \varepsilon_\mu{}^\nu D_\nu u^I(\sigma_I)_i{}^j \ ,
\end{aligned} \tag{9.12}$$

(v) *Weyl und Super-Weyl Invarianz*:

$$\begin{aligned}
\delta B &= \delta F = \delta G = 0 \ , \\
\delta\lambda_i &= \tfrac{1}{2}\rho\lambda_i \ , \\
\delta e_\mu{}^a &= \rho e_\mu{}^a \\
\delta\psi_{\mu i} &= \tfrac{1}{2}\rho\psi_{\mu i} + \gamma_\mu\Lambda_i \ , \\
\delta A_\mu{}^I &= -\tfrac{i}{4}\ \bar\psi_\nu{}^i(\sigma^I)_i{}^j\gamma_\mu\gamma^\nu\Lambda_j + \text{h.c.} \ .
\end{aligned} \tag{9.13}$$

ξ^μ, l, ϵ_i, v^I, u^I, ρ und Λ_i sind die infinitesimalen Parameter der 2d allgemeinen Koordinaten, 2d Lorentz, N=4 erweiterten Supersymmetrie, Phasen, chiralen, Weyl und Super-Weyl (superkonformen) lokalen Tranformationen.

Zusätzlich zu den kontinuierlichen Symmetrien ist die N=4 String–Wirkung (9.6) invariant unter verschiedenen $\mathbf{Z}_2$ Twists der Felder. Um die inäquivalenten Randbedingungen der String–Koordinaten zu klassifizieren, muß man alle Twists kennen, die mit der String–Wirkung kompatibel sind [43, 44]. Die *diagonalen* Twists bezüglich den $SU(2)$–Spinor–Indizes lauten

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_2 \ : \quad & B \to -B,\ F \to -F,\ G \to -G,\ \lambda_i \to -\lambda_i, \\
& \psi_{\mu i} \to +\psi_{\mu i},\ A_\mu{}^I \to +A_\mu{}^I \ , \\
\mathbf{Z}'_2 \ : \quad & B \to -B,\ F \to +F,\ G \to +G,\ \lambda_i \to +(\sigma_3)_i{}^j\lambda_j, \\
& \psi_{\mu i} \to +(\sigma_3)_i{}^j\psi_{\mu j},\ A_\mu{}^1 \to -A_\mu{}^1\ , A_\mu{}^2 \to -A_\mu{}^2,\ A_\mu{}^3 \to +A_\mu{}^3 \ , \\
\mathbf{Z}''_2 \ : \quad & B \to B^*,\ F \to -F,\ G \to +G,\ \lambda_i \to \lambda^*{}_i, \\
& \psi_{\mu i} \to \psi^*{}_{\mu i},\ A_\mu{}^I \to +A_\mu{}^I \ , \\
\mathbf{Z}'''_2 \ : \quad & B \to +B,\ F \to +F,\ G \to +G,\ \lambda_i \to -\lambda_i, \\
& \psi_{\mu i} \to -\psi_{\mu i},\ A_\mu{}^I \to +A_\mu{}^I \ .
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Um eine Verwechslung mit dem Wertebereich der Raum–Zeit–Indizes zu vermeiden, lassen wir die $SU(2)$ Indizes über $i = 4, 5$ laufen. Die reellen Komponenten des komplexen Skalars R bezeichnen wir mit $R = R^2 + iR^3$ und $R^* = R^2 - iR^3$.

Man sieht leicht, daß die Stringwirkung (9.6) invariant unter den $\mathbf{Z}_2$ und $\mathbf{Z}'''_2$ Twists ist. Unter dem $\mathbf{Z}''_2$ Twist bekommen wir

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_\mu{}^j \lambda_j &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} -\bar{\lambda}^j \psi_{\mu j} \\
\bar{\psi}_\nu{}^i \gamma^\mu \gamma^\nu \lambda_i &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} -\bar{\lambda}^i \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_{\nu i} \\
\bar{\psi}_\mu{}^j \gamma_3 \lambda_j &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} \bar{\lambda}^j \gamma_3 \psi_{\mu j} \\
\bar{\psi}_\nu{}^i \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_3 \lambda_i &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} \bar{\lambda}^i \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_3 \psi_{\nu i} \\
\tilde{\lambda}^j \psi_{\mu j} &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} \bar{\psi}_\mu{}^j \lambda^*{}_j \\
\tilde{\lambda}^i \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_{\nu i} &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} \bar{\psi}_\nu{}^i \gamma^\mu \gamma^\nu \lambda^*{}_i \\
A_\mu{}^I \, \bar{\lambda}^i \gamma^\mu (\sigma_I)_i{}^j \lambda_j &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} \tilde{A}_\mu{}^I \, \bar{\lambda}^l \gamma^\mu \mathcal{C}^{ji} (\sigma_I)_i{}^k \mathcal{C}_{kl} \lambda_j \ .
\end{aligned} \tag{9.15}$$

$\tilde{A}_\mu{}^I$ bezeichnet den Twist der Eich–Felder bezüglich der Identität

$$\mathcal{C}^{ji} (\sigma_I)_i{}^k \mathcal{C}_{kl} = (\sigma_I)_l{}^j \ . \tag{9.16}$$

Für den $\mathbf{Z}'_2$ Twist finden wir

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_\mu{}^j \lambda_j &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} \bar{\psi}_\mu{}^j \lambda_j \\
\tilde{\lambda}^j \psi_{\mu j} &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} -\tilde{\lambda}^j \psi_{\mu j} \\
\tilde{\lambda}^i \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_{\nu i} &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} -\tilde{\lambda}^i \gamma^\nu \gamma^\mu \psi_{\nu i} \\
A_\mu{}^I \, \bar{\lambda}^i \gamma^\mu (\sigma_I)_i{}^j \lambda_j &\stackrel{\text{twist}}{\longrightarrow} \tilde{A}_\mu{}^I \, \bar{\lambda}^l \gamma^\mu (\sigma_3)_l{}^i (\sigma_I)_i{}^k (\sigma_3)_k{}^j \lambda_j \ .
\end{aligned} \tag{9.17}$$

Die Monodromien der rechts–laufenden String–Koordinaten im $\mathbf{Z_2^4}$ getwisteten Sektor für die Ramond (R) - beziehungsweise Neveau–Schwarz (NS) Randbedingungen sind in Tabelle I zusammengestellt.

Tabelle I. Die $\mathbf{Z}_2^4$ Monodromiebedingungen für den getwisteten Sektor der N=4 geschlossenen Strings

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathbf{Z}'''_2$	R	NS	R	NS	R	NS	R	NS	R	NS	R	NS	R	NS	R	NS
R^2	+	+	−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+
R^3	+	+	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−
S	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+
T	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
${\lambda^2}_4$	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−	+
${\lambda^3}_4$	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−
${\lambda^2}_5$	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−
${\lambda^3}_5$	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+
${\psi_\mu{}^2}_4$	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
${\psi_\mu{}^3}_4$	+	−	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+
${\psi_\mu{}^2}_5$	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+
${\psi_\mu{}^3}_5$	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−
A^1_μ	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
A^2_μ	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
A^3_μ	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Neben den diagonalen Twists gibt es die $SU(2)$ Spinor–Rotationen aufgrund der Multiplikation mit den nichtdiagonalen Pauli–Matrizen σ_1 und σ_2.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z}^{\sigma_1}{}_2 \ : \qquad & B \to -B,\ F \to +F,\ G \to +G,\ \lambda_i \to +(\sigma_1)_i{}^j\lambda_j, \\
& \psi_{\mu i} \to +(\sigma_1)_i{}^j\psi_{\mu j},\ A_\mu{}^1 \to +A_\mu{}^1\ , A_\mu{}^2 \to -A_\mu{}^2,\ A_\mu{}^3 \to -A_\mu{}^3\ , \\
\mathbf{Z}^{\sigma_2}{}_2 \ : \qquad & B \to -B,\ F \to +F,\ G \to +G,\ \lambda_i \to +(\sigma_2)_i{}^j\lambda_j, \\
& \psi_{\mu i} \to +(\sigma_2)_i{}^j\psi_{\mu j},\ A_\mu{}^1 \to -A_\mu{}^1\ , A_\mu{}^2 \to +A_\mu{}^2,\ A_\mu{}^3 \to -A_\mu{}^3\ , \qquad (9.18)
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnet A den Twist der Eichfelder. Die Wirkung dieser off-shell Twists auf die N=4 Stringkoordinaten sind in den Tabellen II und III zusammengestellt.

Tabelle II. Die $\mathbf{Z}^{\sigma_1}{}_2$-getwisteten Randbedingungen

#	$\lambda^2{}_4(\pi)$	$\lambda^3{}_4(\pi)$	$\lambda^2{}_5(\pi)$	$\lambda^3{}_5(\pi)$	$\psi_\mu{}^2{}_4(\pi)$	$\lambda_\mu{}^3{}_4(\pi)$	$\psi_\mu{}^2{}_5(\pi)$	$\lambda_\mu{}^3{}_5(\pi)$
$\lambda^2{}_4(0)$			$+$					
$\lambda^3{}_4(0)$				$+$				
$\lambda^2{}_5(0)$	$+$							
$\lambda^3{}_5(0)$		$+$						
$\psi_\mu{}^2{}_4(0)$							$+$	
$\psi_\mu{}^3{}_4(0)$								$+$
$\psi_\mu{}^2{}_5(0)$					$+$			
$\psi_\mu{}^3{}_5(0)$						$+$		

Tabelle III. Die $\mathbf{Z}^{\sigma_2}{}_2$-getwisteten Randbedingungen

#	$\lambda^2{}_4(\pi)$	$\lambda^3{}_4(\pi)$	$\lambda^2{}_5(\pi)$	$\lambda^3{}_5(\pi)$	$\psi_\mu{}^2{}_4(\pi)$	$\lambda_\mu{}^3{}_4(\pi)$	$\psi_\mu{}^2{}_5(\pi)$	$\lambda_\mu{}^3{}_5(\pi)$
$\lambda^2{}_4(0)$				$+$				
$\lambda^3{}_4(0)$			$-$					
$\lambda^2{}_5(0)$		$-$						
$\lambda^3{}_5(0)$	$+$							
$\psi_\mu{}^2{}_4(0)$								$+$
$\psi_\mu{}^3{}_4(0)$							$-$	
$\psi_\mu{}^2{}_5(0)$						$-$		
$\psi_\mu{}^3{}_5(0)$					$+$			

Die Randbedingungen für die anderen Felder bleiben diagonal und sie müssen zu den beiden Tabellen hinzugefügt werden. Diese Klassifikation der off-diagonalen Twists ist nichtvollständig. Weitere Twists, die mit der Stringwirkung (9.6) kompatibel sind, können aus den Angegebenen abgeleitet werden.

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir uns mit der zweidimensionalen off-shell (4,4) Supergravitation befaßt. Wir haben gesehen, daß sie neben den allgemeinen Koordinatentransformationen die $SO(1,1)$ Lorentztransformation und $SU(2)$ Transformationen beinhaltet. Von den Superfeldern des Supergravitationsmultipletts haben wir gefordert, die gleichen Zwangsbedingungen wie die Superfelder des zugehörigen skalaren Multipletts TM-I zu erfüllen. Die Zwangsbedingungen sind invariant unter den Super–Weyl–Transformationen, deren N=4 Superfeldparameter als weiteres Multiplett das TM-II bilden. Um die Zwangsbedingungen der zweidimensionalen (4,4) Supergravitation zu lösen, haben wir Präpotentiale eigeführt. Wir konnten dabei das gekrümmte Supervielbein und die Superkonnektionen als Funktionen des flachen Vielbeins, der TM-II Spin-0 Felder und der Präpotentiale bestimmen. Im Gegensatz zum N=2 Fall fanden wir hier zusätzliche Bedingungen an die Präpotentiale, deren Konsequzen wir noch nicht untersucht haben. Die Probleme, auf die wir in dieser Arbeit gestoßen sind, sind eher von technischer Art, so daß eine Vertiefung in die komplizierte Superraumstruktur der (4,4) Supergravitationstheorie nötig ist. Wir haben in dieser Arbeit nur zwei Multipletts, das TM-I und das TM-II behandelt. Nach der Klassifizierung aus [17] gibt es weitere Hypermultipletts, deren Beschreibung auch von Interesse ist. Weiterhin bilden die nichtkritischen Strings und die nicht linearen Sigma–Modelle Gebiete, die vertieft werden können. Das Konstrukt des konventionellen (4,4) Superraumes scheint nicht geeignet zu sein, die allgemeinste Materie–Kopplung in der (4,4) Supergravitation zu beschreiben. Die Methoden des *harmonischen* Superraumes [45] könnten an dieser Stelle weiterhelfen. Der $SU(2) \times SU(2)$ harmonische (4,4) Superraum wurde von Ivanov und Sutulin in [46, 47] behandelt. Ihre Arbeiten bilden zusätzlichen Nährboden für weitere Untersuchungen.

Anhang A

Notationen und Konventionen

Wir verwenden griechische Buchstaben $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ für die Vektor–Indizes assoziiert mit der zweidimensionalen Raum–Zeit oder der Stringweltebene, und kleine lateinische Buchstaben $a, b, c, \ldots$ für die Vektor–Indizes im zugehörigen Tangentialraum. Die zweidimensionale Minkowski–Metrik ist durch

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

gegeben.

Wenn wir mit ϵ_i einen Dirac Spinor in der fundamentalen Darstellung von $SU(2)$ einführen, dann bezeichnen kleine lateinische Buchstaben die $SU(2)$ Indizes $i = 1, 2$. Die $SU(2)$ Indizes werden kanonisch von rechts oben nach links unten kontrahiert und mit $\mathcal{C}^{ij}$ beziehungsweise $\mathcal{C}_{ij}$ hoch und runtergezogen. Dabei gilt folgende Identität:

$$\epsilon^i \equiv \mathcal{C}^{ij}\epsilon_j \ , \quad \epsilon_i \equiv \epsilon^j\mathcal{C}_{ji} \ , \quad \mathcal{C}^{ik}\mathcal{C}_{kj} = -\delta^i{}_j \ . \tag{A.2}$$

Explizit haben wir

$$\mathcal{C}^{ij} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{A.3}$$

Die kompexe Konjugation wirkt folgendermaßen auf die $SU(2)$ Indizes

$$(\epsilon_i)^* \equiv \epsilon^{*i} \ . \tag{A.4}$$

Davon leiten wir die komplexe Konjugation für $\mathcal{C}_{ij}$ ab

$$\mathcal{C}_{ij} = (\mathcal{C}^{ij})^* \tag{A.5}$$

und

$$(\epsilon^i)^* = (\mathcal{C}^{ik}\epsilon_k)^* = \mathcal{C}_{ik}\epsilon^{*k} = -\epsilon^*{}_i \ . \tag{A.6}$$

Die Majorana und Dirac–Konjugation von Spinoren sind wie folgt definiert:

$$\tilde{\epsilon}^i = (\epsilon^i)^{\mathrm{T}} C \ , \qquad \bar{\epsilon}^i = (\epsilon_i)^{\dagger} C \ . \tag{A.7}$$

Dabei ist $C_{\alpha\beta} = \sigma^2$ die Ladungskonjugationsmatrix, die

$$C = C^{\dagger} \ , \qquad C\gamma^a C^{-1} = -(\gamma^a)^{\mathrm{T}} \tag{A.8}$$

erfüllt. Die Tangentialraum–Koordinaten $x^a = (x^0, x^1)$ fassen wir in Licht–Kegel–Koordinaten zusammen

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 \pm x^1\right) \ . \tag{A.9}$$

Die Index–Werte $a = 0, 1$ sollten nicht mit den gleichen Werten für die Tangentialraum–Indizes verwechselt werden.

Die Licht–Kegel Komponenten $\epsilon_{\pm}$ vom Spinor ϵ definieren die eindimensionale Darstellung der Lorentz Gruppe $SO(1,1)$. Die Felder ϵ_+ (ϵ_-) laufen nach rechts beziehungsweise nach links und haben folgende Transformationseigenschaften unter der Wirkung des $SO(1,1)$ Generators γ_3:

$$\gamma_3\epsilon_- = -\epsilon_- \ , \qquad \gamma_3\epsilon_+ = \epsilon_+ \ . \tag{A.10}$$

Wir identifizieren die Spinor–Komponenten ϵ mit seinen Licht–Kegel– Komponenten $\epsilon_{\pm}$ über

$$\epsilon_i = \begin{pmatrix} \epsilon_{+i} \\ \epsilon_{-i} \end{pmatrix} \ . \tag{A.11}$$

Die zweidimensionalen Gamma–Matrizen erfüllen die Algebra

$$(\gamma^a)_{\alpha}{}^{\delta}(\gamma^b)_{\delta}{}^{\beta} = \eta^{ab}\delta_{\alpha}{}^{\beta} + \varepsilon^{ab}(\gamma_3)_{\alpha}{}^{\beta} \ , \tag{A.12}$$

mit $\varepsilon^{01} = 1$. Explizit wählen wir

$$(\gamma_0)_{\alpha}{}^{\beta} = \sigma^2 \qquad (\gamma_1)_{\alpha}{}^{\beta} = -i\sigma^1 \tag{A.13}$$

und

$$(\gamma_3)_{\alpha}{}^{\beta} = (\gamma^0\gamma^1)_{\alpha}{}^{\beta} = \sigma^3 \ , \tag{A.14}$$

oder äquivalent

$$(\gamma_0)_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad (\gamma_1)_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad (\gamma_3)_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{A.15}$$

In unseren Komponenten–Gleichungen in Kapitel 9 vernachlässigen wir alle Spinor–Indizes. Zusätzlich gelten die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned} \{\gamma^a, \gamma^b\} &= 2\eta^{ab} , \\ [\gamma^a, \gamma^b] &= 2\varepsilon^{ab}\gamma_3 , \\ \varepsilon^{ab}\varepsilon_{cd} &= -(\delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c) , \\ \gamma_3\gamma_a &= \varepsilon_{ab}\gamma^b . \end{aligned} \tag{A.16}$$

Soweit es die gekrümmte zweidimensionale Raum–Zeit oder Stringweltebene betrifft, haben wir folgende Relationen für die Gamma –Matrizen

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu}\gamma_3 . \tag{A.17}$$

Dabei ist e die Determinante der Zweibeins $e_\mu{}^a$, und $e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu}$ ist die Levi-Civita Tensordichte.

Die Pauli Matrizen $(\sigma^I)_i{}^j$ erfüllen die Algebra

$$\begin{aligned} (\sigma^I\ \sigma^J)_i{}^j &= \delta^{IJ}\delta_i^j + i\varepsilon^{IJK}(\sigma^K)_i{}^j , \\ (\sigma^I)_{ij} &\equiv (\sigma^I)_i{}^k\mathcal{C}_{kj} = (\sigma^I)_{ji} \end{aligned} \tag{A.18}$$

und haben die übliche Form

$$(\sigma^1)_i{}^j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\sigma^2)_i{}^j = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad (\sigma^3)_i{}^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{A.19}$$

Die Berechnung der Spinor–Bilinear-Formen in der N=4 Supersymmetrie ähnelt der für den N=1 oder N=2 Fall. Aber wir bekommen hier zusätzliche Eigenschaften aufgrund der $SU(2)$ Struktur.

Wir finden

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}^i\psi_i &= (\epsilon^i)^T C\psi_i = (\mathcal{C}^{ij}\epsilon_j)^T C\psi_i = (\mathcal{C}^{ij})^T\epsilon_j{}^\alpha C_{\alpha\beta}\psi_i{}^\beta = \psi_i{}^\beta C_{\beta\alpha}(\mathcal{C}^{ij})^T\epsilon^{j\alpha} \\ &= (\mathcal{C}^{ij}\psi_i)^T C\epsilon_j = -(\psi^i)^T C\epsilon_i = -\tilde{\psi}^i\epsilon_i . \end{aligned} \tag{A.20}$$

Gleichung (A.20) impliziert $\tilde{\psi}^i\psi_i = 0$. Soweit es die Spinor–Blinearen mit Pauli–Matrizen betrifft, finden wir

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}^i(\sigma^I)_i{}^j\psi_j &= (\mathcal{C}^{ik}\epsilon_k)^T C(\sigma^I)_i{}^j\psi_j = (\epsilon_k)^T C\mathcal{C}^{ki}(\sigma^I)_i{}^j\psi_j = \epsilon_k{}^\alpha C_{\alpha\beta}(\sigma^I)^{kj}\psi_j{}^\beta \\ &= \psi_j{}^\beta C_{\beta\alpha}(\sigma^I)^{jk}\epsilon_k{}^\alpha = (\psi_j)^T C\mathcal{C}^{ji}(\sigma^I)_i{}^k\epsilon_k = (\mathcal{C}^{ij}\psi_j)^T C(\sigma^I)_i{}^k\epsilon_k \\ &= \tilde{\psi}^i(\sigma^I)_i{}^k\epsilon_k \ . \end{aligned} \quad (A.21)$$

Wegen der Relation $C\gamma^a C^{-1} = -(\gamma^a)^{\mathrm{T}}$ liefert die Kontraktion der Spinor–Indizes über eine Gamma–Matrix

$$\tilde{\epsilon}^i\gamma_a\psi_i = \tilde{\psi}^i\gamma_a\epsilon_i \ . \quad (A.22)$$

In unseren vierdimensionalen Gleichungen in Kapitel 4 benutzen wir folgende Notationen. Unsere Wahl für die Raum–Zeit –Signatur und das Levi–Civita–Symbol sind

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= diag(+---) \\ \epsilon_{0123} &= 1 \ . \end{aligned} \quad (A.23)$$

Unsere Konvention für die 4×4 Dirac Gamma Matrizen lauten

$$\begin{aligned}\{\Gamma_\mu,\Gamma_\nu\} &= 2\eta_{\mu\nu} \\ \Gamma_5 &= \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \quad {\Gamma_5}^2 = 1 \\ \Sigma_{\mu\nu} &= \tfrac{i}{2}[\Gamma_\mu,\Gamma_\nu] \\ C\Gamma_\mu C^{-1} &= -{\Gamma_\mu}^T \quad C^T = -C, \end{aligned} \quad (A.24)$$

wobei C die Ladungskonjugationsmatrix in vier Raum–Zeit Dimensionen ist. Die konventionelle Realisierung der Gamma–Matrizen, die sich für den zwei Komponenten Formalismus eignet, lautet

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \Gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix} , \\ i\Gamma_5 &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (A.25)$$

Dabei bezeichnen wir mit σ_a, $a = 1,2,3$ die üblichen Pauli–Matrizen. Der zwei–Komponenten–Formalismus wird wie folgt eingeführt

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} , \\ \psi &= \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \qquad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \psi^\alpha, & \bar{\psi}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \quad (A.26)$$

Dabei ist ψ ein Majorana–Spinor in vier Dimensionen: $\psi = \mathcal{C}\bar{\psi}^T$. Explizit haben wir

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mu\alpha\dot{\beta}} &= (1,\vec{\sigma})_{\alpha\dot{\beta}} \quad \tilde{\sigma}_{\mu}^{\dot{\alpha}\beta} = (1,-\vec{\sigma})^{\dot{\alpha}\beta}; \quad \alpha = 1,2 \\
\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\sigma_\mu &= 2\eta_{\mu\nu} \\
\tilde{\sigma}_\mu\sigma\nu + \tilde{\sigma}_\nu\sigma_\mu &= 2\eta_{\mu\nu} \\
\partial_{\alpha\dot{\alpha}} &\equiv \sigma_\mu\partial_\mu \quad \partial^{\dot{\alpha}\alpha} \equiv \tilde{\sigma}_\mu\partial_\mu.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Für die 4×4 $\Sigma_{\mu\nu}$ Matrix und $\mathcal{C}$ finden wir

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \\
\mathcal{C} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Dabei haben wir die Notation

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{4}(\sigma_\mu\tilde{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu) \\
\tilde{\sigma}_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{4}(\tilde{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \tilde{\sigma}_\nu\sigma_\mu)
\end{aligned} \tag{A.29}$$

eingeführt.

Literaturverzeichnis

[1] J. Wess und B. Zumino, Phys. Lett. **66B** (1977) 361.

[2] J. Bagger und J. Wess, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton: Princeton University Press, 1983.

[3] S. J. Gates Jr., M. T. Grisaru, M. Roček und W. Siegel, *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, Benjamin-Cummings Publ. Company Inc., Reading MA, 1983.

[4] I. L. Buchbinder und S. M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity: A Walk through Superspace*, IOP Publishing Ltd., Bristol and Philadelphia, 1995.

[5] W. Siegel, Nucl. Phys. **B142** (1978) 301.

[6] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky und E. Sokatchev, Class. and Quantum Grav. **1** (1984) 469; *ibid.* **2** (1985) 601; *ibid.* **2** (1985) 617.

[7] S. J. Gates Jr., und W. Siegel, Nucl. Phys. **B147** (1979) 77; *ibid.* **187** (1981) 389; *ibid.* **189** (1981) 295; *ibid.* **195** (1982) 39.

[8] S. V. Ketov, Sov. Phys. Journ. **29** (1986) 416; *ibid.* **29** (1986) 800.

[9] S. J. Gates Jr., M. T. Grisaru, M. Roček und P. K. Townsend, Nucl. Phys. **B286** (1987) 1.

[10] S. J. Gates Jr., und H. Nishino, Class. and Quantum Grav. **3** (1986) 134.

[11] M. Evans und B. A. Ovrut, Phys. Lett. **186B** (1987) 134.

[12] A. Alnowaiser, Class. and Quantum Grav. **7** (1990) 1033.

[13] M. T. Grisaru und M. E. Wehlau, Int. Journ. Mod. Phys. **A10** (1995) 753.

[14] M. T. Grisaru und M. E. Wehlau, Nucl. Phys. **B457** (1995) 219.

[15] S. J. Gates Jr., L. Lu und R. Oerter, Phys. Lett. **218B** (1989) 33.

[16] S.J. Gates, C.M. Hull und M. Roček, Nucl. Phys. **B248** (1984) 157

[17] S. J. Gates, Jr., und S. V. Ketov, DESY, Hannover and Maryland preprint, DESY–95–082, ITP–UH–15/95 and UMDEPP 95–116, April 1995; hep-th/9504007.

[18] B.de Wit, J.W.van Holten und A. van Proeyen, Nucl. Phys. **B184** (1981) 77

[19] B. de Wit, R.Philippe und A.van Proeyen, Nucl. Phys. **B219** (1983) 143

[20] B. de Wit und A. van Proeyen, Nucl. Phys. **B245** (1984) 89.

[21] A. van Proeyen in: Supersymmetry and Supergravity, 1983, ed. B. Milewski (World Scientific Publ. Co.) 93 (1983)

[22] S. V. Ketov, Fortschr. Phys. **36** (1988) 361.

[23] S. J. Gates Jr., S. J. Hassoun und P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. **B317** (1989) 302.

[24] P. S. Howe und G. Papadopoulos, Class. and Quantum Grav. **4** (1987) 33.

[25] N. Dragon, Z. Phys. **C2** (1979) 29.

[26] S. V. Ketov und S.-O. Moch, Class. and Quantum Grav. **10** (1994) 11.

[27] J. Wess, Acta Physica Austriaca, **41** (1975) 409.

[28] S. J. Gates, Jr., Nucl. Phys. **B238** (1984) 349.

[29] S. V. Ketov und I. V. Tyutin, Sov. J. Nucl. Phys. **44** (1986) 169.

[30] A. van Proeyen, Leuven preprint KUL-TF-95/39, November 1995; hep-th/9512139.

[31] S. Samuel, Nucl. Phys. **B245** (1984) 127.

[32] W. Siegel, Class. and Quantum Grav. **2** (1985) L41.

[33] I. Antoniadis, C. Bachas und C. Kounnas, Phys. Lett. **242B** (1990) 185.

[34] S. V. Ketov, Hannover preprint ITP-UH-01/96, February 1996; hep-th/9602038; to appear in Phys. Lett. B (1996).

[35] S. V. Ketov und I. V. Tyutin, JETP Lett. **39** (1984) 703.

[36] B. de Wit und P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. **B312** (1989) 58.

[37] S. V. Ketov und S. J. Gates Jr., Phys. Rev. **D52** (1995) 2278.

[38] E. A. Ivanov und S. O. Krivonos, J. Phys. A: Math. Gen. **17** (1984) L671.

[39] E. A. Ivanov und S. O. Krivonos and V. M. Leviant, Nucl. Phys. **B304** (1988) 601.

[40] O. Gorovoy und E. A. Ivanov, Nucl. Phys. **B381** (1992) 394.

[41] M. Ademollo, L. Brink, A. d'Adda, R. d'Auria, E. Napolitano, S. Sciuto, E. del Giudice, P. di Vecchia, S. Ferrara, F. Gliozzi, R. Musto und R. Pettorino, Nucl. Phys. **B114** (1976) 297.

[42] M. Pernici und P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. **169B** (1986) 381.

[43] S. V. Ketov, Class. and Quantum Grav. **10** (1993) 1689.

[44] S. V.Ketov, O. Lechtenfeld und A. Parkes, Phys. Rev. **D51** (1995) 2872.

[45] A. A. Galperin, E. A. Ivanov, S. Kalitzin, V. I. Ogievetsky und E. Sokatchev, Class. and Quantum Grav. **1** (1984) 469; *ibid.* **2** (1985) 601; *ibid.* **2** (1985) 617.

[46] E. A. Ivanov und A. A. Sutulin, Nucl. Phys. **B432** (1994) 246.

[47] E. A. Ivanov, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **49** (1996) 350.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die aufgeführten Hilfsmittel verwendet zu haben.

Hannover, den 30.September 1996

Danksagung

Ich danke Herrn Dr. S. Ketov und Herrn Prof. Dr. O. Lechtenfeld für die Vergabe des Themas und die Betreuung.
Ebenso möchte ich Sven Moch und Marc Grisaru für die ständige Ansprechbarkeit und hilfreichen Diskussionen danken.