Stringtheorie mit kommutierenden Spinorkoordinaten

Marc Wattenberg

Diplomarbeit
am
Institut für Theoretische Physik
der Universität Hannover

und

an der
Fakultät für Physik
der Universität Bielefeld

November 1999

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit einer möglichen Green-Schwarz-Formulierung des N=2 fermionischen Neveu-Schwarz-Ramond-Strings, unter Nutzung *kommutierender* Spinorkoordinaten.

Nach einer Einleitung zur Erläuterung der grundlegenden Ideen dieser Arbeit wird in Kapitel 2 die *Hyper-Poincaré-Algebra*, eine *gerade* Alternative zur Super-Poincaré-Algebra, eingeführt und ein Überblick über die notwendigen Konventionen in einer Raumzeit mit 2+2 Dimensionen gegeben.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem relativistischen *Hyperteilchen*, welches in Kapitel 4 auf den *Hyperstring* verallgemeinert wird. Im Gegensatz zum Green-Schwarz-Superstring wird es jedoch nicht möglich sein, zusätzlich zur *Hypersymmetrie* die für eine Quantisierung des Hyperstrings benötigte κ-Symmetrie zu erhalten. Aus diesem Grund wird in Kapitel 5 mit Hilfe der *Fierz-Identitäten* untersucht, ob κ-Symmetrie-Invarianz in höheren Dimensionen möglich ist.

Kapital 6 definiert die *chirale Hypersymmetrie*, deren Anwendung auf das relativistische Punktteilchen in Kapitel 7 und auf den Hyperstring in Kapitel 8 besprochen wird.

Kapitel 9 enthält die Zusammenfassung der Ergebnisse und abschließende Bemerkungen.

Kapitel 1

Einleitung

Superstrings lassen sich durch zwei verschiedene Formulierungen beschreiben [1, 2].

> Die erste Möglichkeit ist das *Neveu-Schwarz-Ramond (NSR)-Modell.* Die Superpartner lassen sich hier durch zweidimensionale antikommutierende Majorana-Spinoren auf der String-Weltfläche, welche gleichzeitig Vektoren in der D-dimensionalen Raumzeit darstellen, beschreiben. Dieses Modell besitzt Supersymmetrie auf der Weltfläche.

> Die zweite Möglichkeit ist das *Green-Schwarz (GS)-Modell.* Im Gegensatz zum NSR-Modell werden die Superpartner nun durch antikommutierende Raumzeit-Spinoren, die sich wie Skalare auf der Weltfläche verhalten, repräsentiert. Es handelt sich um eine Superstring-Theorie mit Raumzeit-Supersymmetrie.

Beide Modelle liefern das gleiche Spektrum physikalischer Zustände, nachdem im NSR-Modell eine GSO-Projektion [3] durchgeführt wurde. Diese Äquivalenz gilt jedoch bislang nur für den $N{=}1$ NSR-String, d.h. einem String mit einem Superpartner.

Der $N{=}2$ NSR-String ist phänomenologisch weniger interessant [1, 4], denn die kritische Dimension beträgt aufgrund der komplexen Struktur seines Targetraums 4+0 oder 2+2 [4]. Ein wesentlicher Vorteil liegt jedoch im Verschwinden aller Oszillator-Moden des Strings, so daß lediglich ein skalares masseloses Teilchen im Spektrum übrig bleibt [1, 4]. Es existiert also keine Supersymmetrie in der Raumzeit. Eine GSO-Projektion ist hier sinnlos. Die vielfältigen Raumzeit-Symmetrien dieser Stringtheorie jedoch lassen sich in natürlicher Weise mit Hilfe von zusätzlichen *kommutierenden* spinoriellen Raumzeit-Koordinaten formulieren [5]. Daher stellt sich die Frage, ob es möglich ist, ein Modell mit einer erweiterten Raumzeit-Symmetrie, ähnlich dem GS-Modell, zu konstruieren. Dieses Modell dürfte jedoch nicht supersymmetrisch sein, um das Spektrum des $N{=}2$ NSR-Modell zu reproduzieren.

Durch die Artikel von C. Devchand und O. Lechtenfeld [5] motiviert, soll in dieser Arbeit versucht werden, ein Modell zu konstruieren, das an Stelle von antikommutierenden *kommutierende* Raumzeit-Spinoren als zusätzliche String-Freiheitsgrade verwendet. Ausgangspunkt wird eine Modifikation der $N=1$ Super-Poincaré-Algebra sein, die durch Wechsel der Statistik von Grassmann-ungeraden (fermionischen) zu Grassmann-geraden (bosonischen) Generatoren realisiert wird. Diese *gerade* Alternative zur Supersymmetrie soll mit *Hypersymmetrie* bezeichnet werden.

Ausgehend von der entsprechenden *Hyper-Poincaré-Algebra*, soll zuerst eine Wirkung für das *relativistische Hyperteilchen* konstruiert werden, welche unter den durch die Generatoren der Hypersymmetrie erzeugten Transformationen invariant ist. Anschließend wird versucht, ein dem GS-Modell analoges *Hyperstring*-Modell zu formulieren, welches das Anregungsspektrum des $N=2$ NSR-Strings, mitsamt den versteckten *kommutierenden* Spinor-Freiheitsgraden liefern soll.

Um dieses Modell zu quantisieren, benötigt man eine sogenannte κ-Symmetrie, damit in der *Lichtkegel-Eichung* die Bewegungsgleichungen linear werden[1, 2]. Dieses wird sich jedoch in 2+2 Dimensionen für *kommutierende* Spinoren als nicht möglich herausstellen.

In Kapitel 5 wird daraufhin unter Verwendung der *Fierz-Identitäten* untersucht, ob es möglich ist, Hyper- und κ-Symmetrie in 4, 6, 8, 10 oder 12 Dimensionen zu erhalten. Kapitel 6 definiert schließlich eine *chirale Hyper-Poincaré-Algebra*. Das entsprechende chirale Hyperstring-Modell wird dann, anstatt 2+2 Dimensionen, nur eine skalare Dimension mit einem chiralen Spinor beschreiben. Die Bewegungsgleichungen werden sich dadurch derart vereinfachen, daß es möglich sein wird, sie zu lösen.

Kapitel 2

Die Hypersymmetrie

2.1 Einleitende Bemerkungen

Eine N=2 Weltflächen-Supersymmetrie verlangt eine komplexe Struktur des Targetraums. Ist die Raumzeit-Metrik reell und sollen lichtartige Richtungen existieren, dann ist das nur möglich, wenn die Metrik die Signatur $(2,2)$ hat [4]. Die Koordinaten X^μ des flachen Targetraums mit Signatur $(2,2)$ lassen sich in der van-der-Waerden-Notation als Bispinoren

$$X_{\alpha\dot{\alpha}} = (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} X^\mu = \begin{pmatrix} X^0 + X^3 & X^1 + X^2 \\ X^1 - X^2 & X^0 - X^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \{1,2\} \ \dot{\alpha} \in \{\dot{1},\dot{2}\} \tag{2.1}$$

ausdrücken, d.h. die $SO(2,2)$ Vektorindizes μ werden in zwei $SL(2,\mathbb{R})$ Spinorindizes aufgespalten[1]. Die σ_μ, $\mu = 0,1,2,3$ bilden einen Satz von erweiterten Paulimatrizen. Aus diesen kann dann ein Satz von Gamma-Matrizen

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

aufgebaut werden. Diese genügen der Clifford-Algebra $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1}$, wobei hier die Raumzeit-Metrik mit der Signatur $(2,2)$ als $\eta_{\mu\nu} = diag(-+-+)$ gewählt ist. Einen zweiten Satz erweiterter Paulimatrizen $\tilde{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha}$ erhält man durch Anwendung des total antisymmetrischen ϵ-Tensors[2]

$$(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\sigma_\mu)_{\beta\dot{\beta}} \quad . \tag{2.3}$$

Dieser hat für die Spinorindizes die gleiche Funktion, wie die Metrik bei den Vektorindizes.

[1] Auf diese Weise lassen sich auch Größen mit zwei Vektorindizes in solche mit vier Spinorindizes aufspalten (siehe Anhang A).

[2] Die explizite Form sowie einige nützliche Identitäten dieser Größen sind in Anhang A aufgelistet.

Kommutierende chirale Spinoren werden mit θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ bezeichnet. Die Spinorindizes lassen sich, wie schon bei den erweiterten Paulimatrizen, mit dem ϵ-Tensor hoch- und runterziehen. Im Targetraum mit Signatur $(2,2)$ können die chiralen Spinoren zusätzlich die Majorana-Bedingung erfüllen, so daß sowohl $(\theta_\alpha)^* = \theta_\alpha$ als auch $(\bar{\theta}_{\dot{\alpha}})^* = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ reell gewählt werden kann[3], es handelt sich also um Majorana-Weyl-Spinoren.

2.2 Die Hyper-Poincaré-Algebra

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist eine *Lie*-Algebra-Erweiterung der Poincaré-Algebra, diese ist von der Art ähnlich der Erweiterung der Poincaré-Algebra zur Super-Poincaré-Algebra. Der wesentliche Unterschied besteht darin, nur noch *Grassmann-gerade* Größen zuzulassen, woraus die Verwendung der normalen *Lie*-Klammer (Kommutator) folgt. Diese *Lie*-Algebra-Erweiterung soll im folgenden als *Hyper-Poincaré-Algebra* bezeichnet werden und sei gegeben durch die folgende *Lie*-Algebra

$$[Q^A_\alpha, \bar{Q}^B_{\dot{\alpha}}] = 2P_{\alpha\dot{\alpha}}\delta^{AB} \qquad A,B = 1,...,N \quad , \tag{2.4}$$

wobei eine Darstellung, auf dem durch die Koordinaten $(X^{\dot{\alpha}\alpha}, \theta^{\alpha A}, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}A})$ parametrisierten *Hyperraum*, durch die Generatoren

$$\begin{aligned} Q^A_\alpha &= +\partial^A_\alpha - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}A}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \\ \bar{Q}^A_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\partial}^A_{\dot{\alpha}} - \theta^{\alpha A}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

realisiert werden kann[4]. Ähnlich der Supersymmetrie erzeugt hier der *Kommutator* von zwei *geraden* Generatoren eine Translation. Zu bemerken ist, daß die Realisierung mit *reellen* Generatoren deren *Antihermitezität* erfordert, d.h. $(Q^A_\alpha)^\dagger = -Q^A_\alpha$ und $(\bar{Q}^A_{\dot{\alpha}})^\dagger = -\bar{Q}^A_{\dot{\alpha}}$, wobei der Impuls als Generator der Translationen[5] als $P_{\alpha\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial X^{\alpha\dot{\alpha}}}$ definiert ist.

Die Generatoren (2.5) eingesetzt in (2.4) ergeben (für N=1):

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] &= Q_\alpha\bar{Q}_{\dot{\alpha}} - \bar{Q}_{\dot{\alpha}}Q_\alpha \\ &= -\partial_\alpha\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - \partial_\alpha\theta^\beta\partial_{\beta\dot{\alpha}} + \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_{\alpha\dot{\beta}}\theta^\beta\partial_{\beta\dot{\alpha}} \\ &\quad -(-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\partial_\alpha + \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_{\alpha\dot{\beta}} - \theta^\beta\partial_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\alpha + \theta^\beta\partial_{\beta\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_{\alpha\dot{\beta}}) \quad . \end{aligned}$$

[3] Eine ausführlichere Behandlung von $SL(2,\mathbb{R})$ Spinoren befindet sich in Anhang A.

[4] Wie üblich gelten die Abkürzungen: $\partial^A_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha A}}$,$\bar{\partial}^A_{\dot{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}A}}$,$\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\dot{\alpha}}}$. Der Index A bzw. B bezeichnet hier die Anzahl der Hyperpartner. Für den Fall N=1 kann dieser Index und auch δ^{AB} demnach ignoriert werden.

[5] In den Einheiten $\hbar = c = 1$ unterscheidet sich der Generator der Translationen nicht vom Impuls.

Da alle Objekte miteinander kommutieren, bleiben nur die Mischterme über. Umordnen ergibt

$$\begin{aligned}
[Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}] &= -\partial_\alpha \theta^\beta \partial_{\beta\dot\alpha} + \theta^\beta \partial_{\beta\dot\alpha}\partial_\alpha + \bar\theta^{\dot\beta}\partial_{\alpha\dot\beta}\bar\partial_{\dot\alpha} - \bar\partial_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_{\alpha\dot\beta} \\
&= -\partial_{\beta\dot\alpha}(\partial_\alpha\theta^\beta - \theta^\beta\partial_\alpha) + \partial_{\alpha\dot\beta}(\bar\theta^{\dot\beta}\bar\partial_{\dot\alpha} - \bar\partial_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta}) \\
&= -\partial_{\beta\dot\alpha}(\delta_\alpha^{\ \beta} + \theta^\beta\partial_\alpha - \theta^\beta\partial_\alpha) + \partial_{\alpha\dot\beta}(\bar\theta^{\dot\beta}\bar\partial_{\dot\alpha} - \delta_{\dot\alpha}^{\ \dot\beta} - \bar\theta^{\dot\beta}\bar\partial_{\dot\alpha}) \\
&= -\partial_{\beta\dot\alpha}\delta_\alpha^{\ \beta} - \partial_{\alpha\dot\beta}\delta_{\dot\alpha}^{\ \dot\beta} \\
&= -2\partial_{\alpha\dot\alpha} \\
&= 2P_{\alpha\dot\alpha} \quad .
\end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber soll an dieser Stelle noch die komplette Hyper-Poincaré-Algebra angegeben werden (vergl. [6, 7]).

$$\begin{aligned}
[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} + \epsilon_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} + \epsilon_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} + \epsilon_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma}) \\
[\bar M_{\dot\alpha\dot\beta}, \bar M_{\dot\gamma\dot\delta}] &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\bar M_{\dot\beta\dot\delta} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\delta}\bar M_{\dot\beta\dot\gamma} + \epsilon_{\dot\beta\dot\gamma}\bar M_{\dot\alpha\dot\delta} + \epsilon_{\dot\beta\dot\delta}\bar M_{\dot\alpha\dot\gamma}) \\
[M_{\alpha\beta}, \bar M_{\dot\alpha\dot\beta}] &= 0 \\
[P_{\alpha\dot\alpha}, M_{\beta\gamma}] &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\beta}P_{\gamma\dot\alpha} + \epsilon_{\alpha\gamma}P_{\beta\dot\alpha}) \\
[P_{\alpha\dot\alpha}, \bar M_{\dot\beta\dot\gamma}] &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}P_{\alpha\dot\gamma} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}P_{\alpha\dot\beta}) \\
[P_{\alpha\dot\alpha}, P_{\beta\dot\beta}] &= 0 \\
[Q^A_\alpha, \bar Q^B_{\dot\alpha}] &= 2P_{\alpha\dot\alpha}\delta^{AB} \\
[Q^A_\alpha, Q^B_\beta] &= 0 \\
[\bar Q^A_{\dot\alpha}, \bar Q^B_{\dot\beta}] &= 0 \\
[\bar Q^A_{\dot\alpha}, P_{\beta\dot\beta}] &= 0 \\
[Q^A_\alpha, P_{\beta\dot\beta}] &= 0 \\
[\bar Q^A_{\dot\alpha}, M_{\beta\gamma}] &= 0 \\
[\bar Q^A_{\dot\alpha}, \bar M_{\dot\beta\dot\gamma}] &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar Q^A_{\dot\gamma} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\bar Q^A_{\dot\beta}) \\
[Q^A_\alpha, M_{\beta\gamma}] &= \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\beta}Q^A_\gamma + \epsilon_{\alpha\gamma}Q^A_\beta) \\
[Q^A_\alpha, \bar M_{\dot\beta\dot\gamma}] &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Lorentzgeneratoren sind im Hyperraum dargestellt durch[6]

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta} &= x_{\alpha\dot\alpha}\partial_\beta^{\dot\alpha} + x_{\beta\dot\alpha}\partial_\alpha^{\dot\alpha} \\
M_{\dot\alpha\dot\beta} &= x_{\dot\alpha}^{\alpha}\partial_{\alpha\dot\beta} + x_{\dot\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} \quad .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

[6] Zu bemerken ist an dieser Stelle, daß die Lorentz-Generatoren $M_{\alpha\beta}$ bzw. $\bar M_{\dot\alpha\dot\beta}$ symmetrisch in den Spinorindizes sind. Benutzt man anstatt der Spinorindizes $\alpha, \dot\alpha$ Vektorindizes μ, dann ist $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ antisymmetrisch.

Das explizite infinitesimale Transformationsverhalten der im folgenden verwendeten Spinoren und Bispinoren unter Hypersymmetrie erhält man als

$$\delta(Feld) = (\eta^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}})(Feld) \quad . \tag{2.8}$$

η_α bzw. $\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}$ sind hier infinitesimale τ- bzw. auch σ-unabhängige[7], *kommutierende* Parameter der Hypersymmetrie-Transformation.

2.3 Die Super-Poincaré-Algebra

Um in den nachfolgenden Kapiteln den Vergleich zur Supersymmetrie herstellen zu können, befindet sich hier ein kurzer Abriß der *Super-Poincaré-Algebra* sowie deren Realisierung auf dem *Superraum* [8] $(X^\mu, \theta^{\alpha A}, \bar{\theta}^{\dot{\alpha} A})$,

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \\
[P_\mu, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \\
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
\{q^A_\alpha, \bar{q}^B_{\dot{\beta}}\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu\delta^{AB} \\
\{q^A_\alpha, q^B_\beta\} &= 0 \\
\{\bar{q}^A_{\dot{\alpha}}, \bar{q}^B_{\dot{\beta}}\} &= 0 \\
[\bar{q}^A_{\dot{\alpha}}, P_\mu] &= 0 \\
[q^A_\alpha, P_\mu] &= 0 \\
[q^A_\alpha, M_{\mu\nu}] &= i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta q^A_\beta \\
[\bar{q}^A_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] &= i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{q}^A_{\dot{\beta}} \quad .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Die vierte Gleichung wird auf dem Superraum dargestellt durch

$$\begin{aligned}
q^A_\alpha &= +\partial^A_\alpha + i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}A}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \\
\bar{q}^A_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\partial}^A_{\dot{\alpha}} - i\theta^{\alpha A}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

diese Gleichungen (2.10) erzeugen die Supersymmetrie-Transformationen als

$$\begin{aligned}
\delta\theta^A_\alpha &= \eta^A_\alpha \\
\delta\bar{\theta}^A_{\dot{\alpha}} &= \bar{\eta}^A_{\dot{\alpha}} \\
\delta X_{\alpha\dot{\alpha}} &= -2i(\eta^A_\alpha\bar{\theta}^A_{\dot{\alpha}} - \theta^A_\alpha\bar{\eta}^A_{\dot{\alpha}}) \quad .
\end{aligned} \tag{2.11}$$

[7]Bei der Diskussion des Punktteilchens verwendet man τ zur Parametrisierung der *Weltlinie*, im Fall des Strings wird zur Parametrisierung der *Weltfläche* ein zweiter Parameter σ benötigt.

[8]Der Einfachheit halber wird hier auf die Aufspaltung der Vektor- in Spinorindizes bei den Generatoren der Poincaré-Algebra verzichtet (siehe z.B. [8, 9]).

Kapitel 3

Das relativistische Hyperteilchen

Um die Bewegung eines relativistischen Punktteilchens im Minkowski-Raum zu beschreiben, bedient man sich des Wirkungs-Prinzips. In der Regel ist eine solche Wirkung proportional zur invarianten Länge der Weltlinie, d.h.

$$\mathcal{S} = -m \int ds = -m \int d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \quad .$$

τ ist hier eine willkürliche Parametrisierung der Weltlinie und $x^\mu(\tau)$ sind die Koordinaten, die die Einbettung der Weltlinie in den Minkowski-Raum beschreiben. Aufgrund der Reparametrisierungsinvarianz $\tau \to \tilde{\tau}(\tau)$ der Weltlinie ist es möglich, eine alternative Wirkung zu finden, die sich für das Folgende als vorteilhaft erweisen wird.

Diese alternative Wirkung ist [1, 2]

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d\tau (e^{-1} \dot{x}^2 - e m^2) \quad . \tag{3.1}$$

Sie beinhaltet keine Quadratwurzel mehr, dafür jedoch eine Hilfkoordinate $e(\tau)$, die als 'Einbein' an der Weltlinie interpretiert werden kann, und erlaubt die Verallgemeinerung auf den masselosen Fall, welcher der Einfachheit halber hier für das Hyperteilchen diskutiert werden soll.

Die Wirkung (3.1) wird für m=0 dann zu

$$\mathcal{S} \quad = \quad \frac{1}{2} \int d\tau e^{-1} \dot{x}_{\alpha\dot{\alpha}} \dot{x}^{\dot{\alpha}\alpha} \quad . \tag{3.2}$$

Hier wurde von der Bispinor-Schreibweise, definiert in Abschnitt (2.1), Gebrauch gemacht.

3.1 Die hypersymmetrische Verallgemeinerung des relativistischen Punktteilchens

Ziel ist es, durch Hinzufügen von Spinoren θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ eine unter Hypersymmetrie-Transformationen invariante Verallgemeinerung der Wirkung (3.2) zu bekommen. Die Vorschrift (2.8) definiert wie die infinitesimalen Hypersymmetrie-Transformationen die Spinoren bzw. Bispinoren transformieren. Die zu verschiebenden Koordinaten sind hier $x_{\alpha\dot{\alpha}}$, θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Die Vorschrift (2.8) erzeugt die Hypersymmetrie-Transformationen[1] als

$$\begin{aligned}
\delta\theta_\alpha &= \eta^\beta \partial_\beta \theta_\alpha = \eta^\beta \partial_\beta \epsilon_{\alpha\delta}\theta^\delta = \eta^\beta \epsilon_{\alpha\delta}\delta^\delta_\beta = \eta_\alpha \\
\delta\theta^\alpha &= \eta^\alpha \\
\delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\eta}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\bar{\partial}_{\dot{\gamma}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\eta}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\bar{\partial}_{\dot{\gamma}}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\bar{\theta}^{\dot{\delta}} = -\bar{\eta}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\delta^{\dot{\delta}}_{\dot{\gamma}} = \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \\
\delta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} &= \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \\
\delta x_{\alpha\dot{\alpha}} &= (\eta^\beta Q_\beta + \bar{\eta}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}})x_{\alpha\dot{\alpha}} \\
&= (\eta^\beta(\partial_\beta - \bar{\theta}^{\dot{\delta}}\partial_{\beta\dot{\delta}}) + \bar{\eta}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}(-\bar{\partial}_{\dot{\gamma}} - \theta^\gamma\partial_{\gamma\dot{\gamma}}))x_{\alpha\dot{\alpha}} \\
&= (-\eta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\delta}}\partial_{\beta\dot{\delta}} - \bar{\eta}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\theta^\gamma\partial_{\gamma\dot{\gamma}})x^{\dot{\sigma}\sigma}\epsilon_{\alpha\sigma}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\sigma}} \\
&= (-\eta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\delta}}(-2\delta_\beta{}^\sigma\delta_{\dot{\delta}}{}^{\dot{\sigma}}) - \bar{\eta}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\theta^\gamma(-2\delta_\gamma{}^\sigma\delta_{\dot{\gamma}}{}^{\dot{\sigma}}))\epsilon_{\alpha\sigma}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\sigma}} \\
&= 2\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\eta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\delta}} + 2\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\bar{\eta}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\theta^\gamma \\
&= 2(\eta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \theta_\alpha\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}) \\
\delta x^{\dot{\alpha}\alpha} &= 2(\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^\alpha - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\theta^\alpha) \\
\delta e &= 0 \quad . \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Verallgemeinert man die Wirkung $\mathcal{S}$ durch Hinzunahme von Spinoren zu (vergl. [1, 10, 11, 12])

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{hyper} &= \frac{1}{2}\int d\tau e^{-1}\Big(\dot{x}_{\alpha\dot{\alpha}} - 2(\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} - \dot{\theta}_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}})\Big)\Big(\dot{x}^{\dot{\alpha}\alpha} - 2(\dot{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}\,\theta^\alpha - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\dot{\theta}^\alpha)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\int d\tau e^{-1}p_{\alpha\dot{\alpha}}p^{\dot{\alpha}\alpha} \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

mit

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} \equiv (\dot{x}_{\alpha\dot{\alpha}} - 2(\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} - \dot{\theta}_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}})) \quad , \qquad (3.5)$$

dann ist diese unter den Hypersymmetrie-Transformation (3.3) invariant, da

$$\delta\mathcal{S}_{hyper} \propto e^{-1}p^{\dot{\alpha}\alpha}\delta p_{\alpha\dot{\alpha}} + e^{-1}p_{\alpha\dot{\alpha}}\delta p^{\dot{\alpha}\alpha} = 2e^{-1}p^{\dot{\alpha}\alpha}\delta p_{\alpha\dot{\alpha}}$$

[1] Dieses Kapitel soll sich auf N=1 Hypersymmetrie beschränken.

und

$$\begin{aligned}
\delta p_{\alpha\dot\alpha} &= \delta\dot x_{\alpha\dot\alpha} - 2(\delta\theta_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} - \dot\theta_\alpha\delta\bar\theta_{\dot\alpha}) \\
&= 2(\eta_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} - \dot\theta_\alpha\bar\eta_{\dot\alpha}) - 2(\eta_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} - \dot\theta_\alpha\bar\eta_{\dot\alpha}) \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Natürlich besitzt $\mathcal{S}_{hyper}$ auch *lokale* Reparametrisierungsinvarianz, d.h. Invarianz unter den Transformationen

$$\begin{aligned}
\delta x_{\alpha\dot\alpha} &= \xi\dot x_{\alpha\dot\alpha} \\
\delta\theta_\alpha &= \xi\dot\theta_\alpha \\
\delta\bar\theta_{\dot\alpha} &= \xi\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} \\
\delta e &= \frac{d}{d\tau}(\xi e) \quad .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Als nächstes sollen die Bewegungsgleichungen dieser hypersymmetrischen Wirkung untersucht werden.

3.2 Die Bewegungsgleichungen des relativistischen Hyperteilchens

Die Bewegungsgleichungen der hypersymmetrischen Wirkung $\mathcal{S}_{hyper}$ erhält man durch Variation der Wirkung bzw. aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned}
-2e^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial e} &= p_{\alpha\dot\alpha}\cdot p^{\dot\alpha\alpha} = p^2 = 0 \\
-\frac{e}{2}\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x_{\alpha\dot\alpha}} &= \dot p^{\dot\alpha\alpha} = 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta_\alpha} &= -2e^{-1}p^{\dot\alpha\alpha}\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} - 2e^{-1}(p^{\dot\alpha\alpha}\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} + \overset{=0}{\dot p^{\dot\alpha\alpha}}\,\bar\theta_{\dot\alpha}) \\
&\propto p^{\dot\alpha\alpha}\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} = 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}} &\propto p^{\dot\alpha\alpha}\dot\theta_\alpha = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$p_{\alpha\dot\alpha}$ ist ein Bispinor, seine explizite Form ist der von (2.1) ähnlich, hat also die Form einer 2×2 Matrix. Die erste Bewegungsgleichung ist somit ausgeschrieben

$$p^2 \propto (p^0)^2 - (p^1)^2 + (p^2)^2 - (p^3)^2 = 0 \quad . \tag{3.8}$$

Die Bewegungsgleichung der Spinoren θ_α werden ausgeschrieben zu

$$
\begin{aligned}
(p^0 - p^3)\dot{\theta}_1 &= -(p^1 + p^2)\dot{\theta}_2 \\
(p^1 - p^2)\dot{\theta}_1 &= -(p^0 + p^3)\dot{\theta}_2 \quad .
\end{aligned}
$$

Ist (3.8) erfüllt, läßt sich zeigen, daß die beiden Gleichungen linear abhängig sind. Das bedeutet, daß nur *eine* Kombination der ungepunkteten Spinoren θ_α, $\alpha \in \{1, 2\}$, einer Bewegungsgleichung genügt. Analog zeigt eine ähnliche Rechnung eine Indeterminiertheit der gepunkteten Spinoren $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$, $\dot{\alpha} \in \{\dot{1}, \dot{2}\}$.

Nur die Hälfte der Spinorkoordinaten ist demnach dynamisch, die andere Hälfte ist völlig uneingeschränkt und muß daher eine Eichfreiheit repräsentieren [1, 10]. Die hierdurch implizierte Eichsymmetrie der Wirkung $\mathcal{S}_{hyper}$ wird im nächsten Abschnitt erläutert.

3.3 Die κ-Symmetrie

Die Wirkung $\mathcal{S}_{hyper}$ besitzt eine zusätzliche *lokale* spinorielle Symmetrie. Sei $\kappa(\tau)$ ein weiterer infinitesimaler *kommutierender* spinorieller Parameter, dann läßt sich die Invarianz von $\mathcal{S}_{hyper}$ unter folgenden Transformationen zeigen (vergl. z.B. [1, 10])

$$
\begin{aligned}
\delta\theta_\alpha &= p_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\kappa}^{\dot{\alpha}} \\
\delta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} &= p^{\dot{\alpha}\alpha}\kappa_\alpha \\
\delta x_{\alpha\dot{\alpha}} &= 2(\theta_\alpha\delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \delta\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \\
\delta e &= \ ? \quad .
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Es soll zunächst nur die Variation von $p_{\alpha\dot{\alpha}}$ betrachtet werden, diese ergibt

$$
\begin{aligned}
\delta p_{\alpha\dot{\alpha}} &= \delta\dot{x}_{\alpha\dot{\alpha}} - 2(\theta_\alpha\delta\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} + \delta\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} - \delta\dot{\theta}_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \dot{\theta}_\alpha\delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \\
&= 2(\dot{\theta}_\alpha\delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \theta_\alpha\delta\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} - \delta\dot{\theta}_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \delta\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}) \\
&\quad - 2(\theta_\alpha\delta\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} + \delta\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} - \delta\dot{\theta}_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \dot{\theta}_\alpha\delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \\
&= 4(\dot{\theta}_\alpha\delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \delta\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}) \quad ,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

verschwindet also nicht.

Die Variation von p^2 ist

$$
\begin{aligned}
\delta p^2 &= \delta p_{\alpha\dot{\alpha}}p^{\dot{\alpha}\alpha} + p_{\alpha\dot{\alpha}}\delta p^{\dot{\alpha}\alpha} \\
&= 2p_{\alpha\dot{\alpha}}\delta p^{\dot{\alpha}\alpha} \quad .
\end{aligned}
$$

Wird (3.10) explizit eingesetzt, folgt

$$
\begin{aligned}
\delta p^2 &= 8p_{\alpha\dot\alpha}(\delta\bar\theta^{\dot\alpha}\dot\theta^\alpha - \dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}\ \delta\theta^\alpha) \\
&= 8p_{\alpha\dot\alpha}(p^{\dot\alpha\beta}\kappa_\beta\dot\theta^\alpha - \dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}\ \epsilon^{\alpha\delta}p_{\delta\dot\delta}\bar\kappa^{\dot\delta}) \\
&= 8(p_{\alpha\dot\alpha}p^{\dot\alpha\beta}\kappa_\beta\dot\theta^\alpha - \epsilon^{\alpha\delta}p_{\alpha\dot\alpha}p_{\delta\dot\delta}\ \dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}\ \bar\kappa^{\dot\delta}) \\
&= 8(p_{\alpha\dot\alpha}p_{\gamma\dot\sigma}\epsilon^{\dot\alpha\dot\sigma}\epsilon^{\beta\gamma}\kappa_\beta\dot\theta^\alpha - \epsilon^{\alpha\delta}p_{\alpha\dot\alpha}p_{\delta\dot\delta}\ \dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}\ \bar\kappa^{\dot\delta}) \\
&= 8(-p_{\alpha\dot\alpha}p_{\gamma\dot\sigma}\epsilon^{\dot\alpha\dot\sigma}\kappa^\gamma\dot\theta^\alpha - \epsilon^{\alpha\delta}p_{\alpha\dot\alpha}p_{\delta\dot\delta}\ \dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}\ \bar\kappa^{\dot\delta}) \\
&= 8(-Y_{\alpha\gamma}\kappa^\gamma\dot\theta^\alpha - Y_{\dot\alpha\dot\delta}\ \dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}\ \bar\kappa^{\dot\delta}) \quad .
\end{aligned}
$$

Ziel ist es, die Variation von p^2 in einen Ausdruck proportional zu p^2 umzuschreiben, was es ermöglicht die Transformation des Einbeins e so festzulegen, daß die Wirkung unter den Transformationen (3.9) invariant ist. Dazu sollen nun $Y_{\alpha\gamma}$ und $Y_{\dot\alpha\dot\delta}$ näher betrachtet werden.

Austausch der kontrahierten Indizes beweist die totale Antisymmetrie dieser Größen.

$$
\begin{aligned}
Y_{\alpha\gamma} &= \epsilon^{\dot\alpha\dot\sigma}p_{\alpha\dot\alpha}p_{\gamma\dot\sigma} \\
&\overset{\dot\alpha\leftrightarrow\dot\sigma}{=} \epsilon^{\dot\sigma\dot\alpha}p_{\alpha\dot\sigma}p_{\gamma\dot\alpha} \\
&= -\epsilon^{\dot\alpha\dot\sigma}p_{\alpha\dot\sigma}p_{\gamma\dot\alpha} \\
&= -Y_{\gamma\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{\dot\alpha\dot\delta} &= \epsilon^{\alpha\delta}p_{\alpha\dot\alpha}p_{\delta\dot\delta} \\
&\overset{\alpha\leftrightarrow\delta}{=} \epsilon^{\delta\alpha}p_{\delta\dot\alpha}p_{\alpha\dot\delta} \\
&= -\epsilon^{\alpha\delta}p_{\delta\dot\alpha}p_{\alpha\dot\delta} \\
&= -Y_{\dot\delta\dot\alpha} \quad .
\end{aligned}
$$

D.h. sowohl als $Y_{\alpha\gamma}$ als auch $Y_{\dot\alpha\dot\delta}$ lassen sich schreiben als,

$$
\begin{aligned}
Y_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\gamma}Y_\sigma^{\ \sigma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\gamma}p^2 \\
Y_{\dot\alpha\dot\delta} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\delta}Y_{\dot\gamma}^{\ \dot\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\delta}p^2 \quad ,
\end{aligned}
$$

was zeigt, daß δp^2 als Ausdruck proportional zu p^2 geschrieben werden kann.

Es folgt

$$\begin{aligned}
\delta p^2 &= -8(Y_{\alpha\gamma}\kappa^\gamma\dot{\theta}^\alpha + Y_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\,\dot{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}\,\bar{\kappa}^{\dot{\delta}}) \\
&= -4(\epsilon_{\alpha\gamma}p^2\kappa^\gamma\dot{\theta}^\alpha + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}p^2\,\dot{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}\,\bar{\kappa}^{\dot{\delta}}) \\
&= 4p^2(\kappa^\alpha\dot{\theta}_\alpha + \dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}\bar{\kappa}^{\dot{\alpha}}) \quad .
\end{aligned}$$

Dieser technische Trick erlaubt es nun, die Variation des inversen Einbeins e^{-1} auszurechnen, welche die Invarianz der Wirkung gewährleistet.

$$\begin{aligned}
\delta(e^{-1}\cdot p^2) &= \delta e^{-1}p^2 + e^{-1}\delta p^2 \\
&= \delta e^{-1}p^2 + e^{-1}4p^2(\kappa^\alpha\dot{\theta}_\alpha + \dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}\bar{\kappa}^{\dot{\alpha}}) \\
&= p^2(\delta e^{-1} + 4e^{-1}(\kappa^\alpha\dot{\theta}_\alpha + \dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}\bar{\kappa}^{\dot{\alpha}})) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Damit die Wirkung unter der κ-Symmetrie-Transformation invariant ist, muß sich also e^{-1} wie

$$\delta e^{-1} = -4e^{-1}(\kappa^\alpha\dot{\theta}_\alpha + \dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}\bar{\kappa}^{\dot{\alpha}}) \tag{3.11}$$

transformieren.

3.4 Die λ-Symmetrie

Die Wirkung $\mathcal{S}_{hyper}$ besitzt noch eine weitere *lokale* Symmetrie, die einen *skalaren* infinitesimalen Parameter $\lambda(\tau)$ einführt. Die Invarianz von $\mathcal{S}_{hyper}$ unter den λ-Symmetrie-Transformationen (vergl. z.B. [1, 2]),

$$\begin{aligned}
\delta\theta_\alpha &= \lambda(\tau)\dot{\theta}_\alpha \\
\delta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} &= \lambda(\tau)\,\dot{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} \\
\delta x_{\alpha\dot{\alpha}} &= 2(\theta_\alpha\delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \delta\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \\
\delta e &= 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ergibt sich unter Benutzung von (3.10) durch das Verschwinden von $\delta p_{\alpha\dot{\alpha}}$

$$\begin{aligned}
\delta p_{\alpha\dot{\alpha}} &= 4(\dot{\theta}_\alpha\delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \delta\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}) \\
&= 4(\lambda(\tau)\dot{\theta}_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} - \lambda(\tau)\dot{\theta}_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}}) \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Diese Symmetrie-Transformation hat jedoch keine zusätzliche Bedeutung für die *on-shell*-Theorie.

3.5 Schlußfolgerung

Es ist gezeigt worden, daß es möglich ist, auf der Grundlage einer *Lie*-Algebra-Erweiterung der Poincaré-Algebra, *kommutierende* Spinoren einzuführen, um ein Modell zu konstruieren, das eine Symmetrie zwischen den Raumzeit-Koordinaten x und dem Hyperpartner θ aufweist. Dieses Modell ist in seinem Aufbau, dem Modell des Superteilchens (siehe z.B. [1, 10, 11, 12]) angelehnt und liefert leider auch die gleichen Komplikationen.

Die kovariante Quantisierung dieser Theorie ist sehr schwierig, wenn nicht unmöglich. Durch die explizite x-Abhängigkeit der kanonisch konjugierten Impulse

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = p(x,\theta) \cdot \theta \quad ,$$

werden die Gleichungen nichtlinear und somit äußerst schwierig zu lösen. Weiterhin zeigte sich eine lineare Abhängigkeit der Bewegungsgleichungen für θ, indiziert durch die Bedingung $p^2 = 0$. p spielt in diesem Kontext die Rolle eines Projektionsoperators, was dazu führt, daß es nicht möglich ist, die Gleichung Lorentz-kovariant zu invertieren und für θ zu lösen. Erst in einer (nicht Lorentz-kovarianten) *Lichtkegel-Eichung* gelingt es, die dynamischen von den Eichfreiheitsgraden zu entkoppeln.

Die Theorie des relativistischen *Hyperteilchens* soll an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden. Stattdessen beschäftigt sich das nächste Kapitel mit der Verallgemeinerung dieses Modells auf den String.

Kapitel 4

Das Raumzeit-hypersymmetrische String-Modell

Das $N{=}1$ NSR-Modell, das eine Supersymmetrie auf der Weltfläche hat, und das GS-Modell, welches Supersymmetrie in der Raumzeit beschreibt, liefern nach der GSO-Projektion des NSR-Spektrums, siehe [2, 3], das gleiche Spektrum.

Für den $N{=}2$ NSR-String, dessen Spektrum lediglich ein skalares masseloses Teilchen im Hyperraum hat, ist die GSO-Projektion sinnlos, vielmehr darf eine äquivalente Raumzeit-Stringtheorie keine Supersymmetrie besitzen.

Ziel dieses Kapitel ist es, motiviert durch [5], ein Raumzeit- hypersymmetrisches Modell zu konstruieren, welches, ähnlich dem GS-Modell des Superstrings, einen *Hyperstring* definiert. Hierzu wird analog zum GS-Modell vorgegangen, wobei an die Stelle der antikommutierenden *kommutierende* Spinoren treten.

Grundlage wird eine hypersymmetrische Verallgemeinerung der Polyakov-Wirkung sein. Aufgrund der Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen wird es, wie schon im Fall des Hyperteilchens, nicht möglich sein, Lorentz-kovariant zu quantisieren. Ein auch beim GS-Modell genutzter Ausweg ist die *Lichtkegel-Eichung*. Diese führt jedoch nur zum Ziel, wenn man sie auf eine lokale κ-Symmetrie ausweiten kann. Eine solche κ-Symmetrie erfordert zusätzlich zum kinetischen Term die Anwesenheit eines *Wess-Zumino-Terms*. Es wird sich jedoch herausstellen, daß diese Klasse von hypersymmetrischen Wirkungen keine κ-Symmetrie zuläßt.

4.1 Konstruktion einer hypersymmetrischen Verallgemeinerung der Polyakov-Wirkung

Eine mögliche Wirkung für den bosonischen String ist die Polyakov-Wirkung

$$\mathcal{S}_{Polyakov} = \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{h}\; h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \quad .$$

$h^{ab}(\sigma, \tau)$ ist die inverse Metrik auf der zweidimensionalen Weltfläche und $h = -\det h_{ab}$. Umschreiben der Raumzeit-Koordinaten X^μ in Bispinoren und Verallgemeinerung auf Hypersymmetrie liefert analog zum Hyperteilchen die Wirkung

$$\mathcal{S}_1 \quad = \quad \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{h}\; h^{ab} \Pi_{\alpha\dot{\alpha},a} \Pi_b^{\dot{\alpha}\alpha} \quad . \tag{4.1}$$

Hier ist

$$\Pi_{\alpha\dot{\alpha},a} \equiv (\partial_a X_{\alpha\dot{\alpha}} - 2(\theta^I_\alpha \partial_a \bar{\theta}^I_{\dot{\alpha}} - \partial_a \theta^I_\alpha \bar{\theta}^I_{\dot{\alpha}})) \qquad I = 1, ..., N \tag{4.2}$$

das Analogon zu (3.5) aus Kapitel 2, auf eine beliebige Anzahl von Hyperpartnern $I \in \mathbb{N}$ erweitert[1]. Der zusätzliche lateinische Index a in (4.2) ist nötig, um die Weltflächen-Parameter σ und τ zu unterscheiden.

Zusätzlich zur Invarianz unter *lokaler* Reparametrisierung und Weyl-Reskalierung, d.h.

$$\begin{aligned}
\delta\theta^I_\alpha &= \xi^c \partial_c \theta^I_\alpha \\
\delta\bar{\theta}^I_{\dot{\alpha}} &= \xi^c \partial_c \bar{\theta}^I_{\dot{\alpha}} \\
\delta X_{\alpha\dot{\alpha}} &= \xi^c \partial_c X_{\alpha\dot{\alpha}} \\
\delta h^{ab} &= \xi^c \partial_c h^{ab} - h^{ac} \partial_c \xi^b - h^{bc} \partial_c \xi^a \\
\delta\sqrt{h} &= \partial_c (\xi^c \sqrt{h}) \\
\delta h^{ab} &= \Lambda h^{ab} \quad ,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ist die Wirkung $\mathcal{S}_1$ invariant unter den folgenden *globalen* Hypersymmetrie-Transformationen:

$$\begin{aligned}
\delta\theta^I_\alpha &= \eta^I_\alpha \\
\delta\bar{\theta}^I_{\dot{\alpha}} &= \bar{\eta}^I_{\dot{\alpha}} \\
\delta X_{\alpha\dot{\alpha}} &= \sum_I 2(\eta^I_\alpha \bar{\theta}^I_{\dot{\alpha}} - \theta^I_\alpha \bar{\eta}^I_{\dot{\alpha}}) \\
\delta(\sqrt{h} h^{ab}) &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

[1] Ableitungen wirken immer nur auf die *nächste* rechts stehende Variable.

Diese unterscheiden sich von (3.3) lediglich darin, daß sie für eine beliebige Anzahl N von hypersymmetrischen Partnern geschrieben sind.

Wiederum analog zum Hyperteilchen läßt sich die Variation von $\mathcal{S}_1$ schreiben als

$$\delta\mathcal{L}_1 \quad \propto \quad 2\sqrt{h}h^{ab}\Pi_a^{\dot\alpha\alpha}\delta\Pi_{\alpha\dot\alpha,b} \quad .$$

Mit (4.4) ergibt sich dann die Variation von $\delta\Pi_{\alpha\dot\alpha,b}$ zu

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{\alpha\dot\alpha,b} &= \partial_b\delta X_{\alpha\dot\alpha} - 2\sum_I(\delta\theta_\alpha^I\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}^I + \theta_\alpha^I\partial_b\delta\bar\theta_{\dot\alpha}^I - \partial_b\delta\theta_\alpha^I\bar\theta_{\dot\alpha}^I - \partial_b\theta_\alpha^I\delta\bar\theta_{\dot\alpha}^I) \\
&= \sum_I 2(\eta_\alpha^I\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}^I - \partial_b\theta_\alpha^I\bar\eta_{\dot\alpha}^I) - 2\sum_I(\eta_\alpha^I\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}^I + \theta_\alpha^I\partial_b\bar\eta_{\dot\alpha}^I \\
&\quad - \partial_b\eta_\alpha^I\bar\theta_{\dot\alpha}^I - \partial_b\theta_\alpha^I\bar\eta_{\dot\alpha}^I) \\
&= \sum_I 2(\eta_\alpha^I\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}^I - \partial_b\theta_\alpha^I\bar\eta_{\dot\alpha}^I) - 2\sum_I(\eta_\alpha^I\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}^I - \partial_b\theta_\alpha^I\bar\eta_{\dot\alpha}^I) \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Hier wurde ausgenutzt, daß die Spinoren η_α^I und $\bar\eta_{\dot\alpha}^I$ konstant sind, und somit ihre Ableitungen nach Weltflächen-Parametern σ und τ verschwinden.
$\mathcal{S}_1$ ist also invariant unter Hypersymmetrie-Transformationen mit beliebigem $N \in \mathbb{N}$.

4.2 Die Bewegungsgleichungen des Hyperstrings

Als nächstes sollen die Bewegungsgleichungen der hypersymmetrischen Wirkung (4.1), unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrangefunktion der Wirkung $\mathcal{S}_1$,

$$\mathcal{L}_1 \quad = \quad \alpha'^{-1}\sqrt{h}\; h^{ab}\Pi_{\dot\alpha\alpha,a}\Pi_b^{\dot\alpha\alpha} \quad ,$$

berechnet werden. Diese sind:

$$
\begin{aligned}
\alpha' \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial h^{ab}} &= \left(\frac{\partial \sqrt{h}}{\partial h^{ab}}\right) h^{cd} \Pi_{\dot\alpha\alpha,c} \Pi_d^{\dot\alpha\alpha} + \sqrt{h} \left(\frac{\partial h^{cd}}{\partial h^{ab}}\right) \Pi_{\dot\alpha\alpha,c} \Pi_d^{\dot\alpha\alpha} \\
&= \left(\frac{\partial \sqrt{h}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial h^{ab}}\right) h^{cd} \Pi_{\dot\alpha\alpha,c} \Pi_d^{\dot\alpha\alpha} + \sqrt{h}\ \Pi_{\dot\alpha\alpha,a} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(-h_{ab} h\right) h^{cd} \Pi_{\dot\alpha\alpha,c} \Pi_d^{\dot\alpha\alpha} + \sqrt{h}\ \Pi_{\dot\alpha\alpha,a} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(-h_{ab} h\right) h^{cd} \Pi_{\dot\alpha\alpha,c} \Pi_d^{\dot\alpha\alpha} + \sqrt{h}\ \Pi_{\dot\alpha\alpha,a} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{h}} h_{ab} h^{cd} \Pi_{\dot\alpha\alpha,c} \Pi_d^{\dot\alpha\alpha} + \sqrt{h}\ \Pi_{\dot\alpha\alpha,a} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} = 0 \quad , \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{1}{2} \alpha' \partial_c \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_c X_{\alpha\dot\alpha})} = \partial_c \left(\sqrt{h} h^{cb} \Pi_b^{\alpha\dot\alpha}\right) = 0 \quad , \qquad (4.6)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \theta_\alpha} - \partial_c \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_c \theta_\alpha)} &= -4\alpha'^{-1} [\sqrt{h} h^{ab} \partial_a \bar\theta_{\dot\alpha} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} + \partial_c(\sqrt{h} h^{cb} \bar\theta_{\dot\alpha} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha})] \\
&\propto \sqrt{h} h^{ab} \partial_a \bar\theta_{\dot\alpha} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} + \sqrt{h} h^{cb} \partial_c \bar\theta_{\dot\alpha} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} \\
&\quad + \overset{=0\ \ 4.6}{\partial_c(\sqrt{h} h^{cb} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha})} \\
&\propto \sqrt{h} h^{ab} \partial_a \bar\theta_{\dot\alpha} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} = 0 \quad , \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \bar\theta_{\dot\alpha}} - \partial_c \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_c \bar\theta_{\dot\alpha})} &= 4\alpha'^{-1} [\sqrt{h} h^{ab} \partial_a \theta_\alpha \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} + \partial_c(\sqrt{h} h^{cb} \theta_\alpha \Pi_b^{\dot\alpha\alpha})] \\
&\propto \sqrt{h} h^{ab} \partial_a \theta_\alpha \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} + \sqrt{h} h^{cb} \partial_c \theta_\alpha \Pi_b^{\dot\alpha\alpha}) \\
&\quad + \overset{=0\ \ 4.6}{\partial_c(\sqrt{h} h^{cb} \Pi_b^{\dot\alpha\alpha})} \\
&\propto \sqrt{h} h^{ab} \partial_a \theta_\alpha \Pi_b^{\dot\alpha\alpha} = 0 \quad . \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Die erste Bewegungsgleichung (4.5) liefert die Bedingung, daß der Energie-Impuls-Tensor, definiert als [2]

$$
T_{ab} \equiv \alpha' \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta h^{ab}} \qquad ,
$$

verschwindet, was sich (vergl. (4.5)) auch schreiben läßt als

$$T_{ab} = -\frac{1}{4} h_{ab} h^{cd} \Pi_{\dot{\alpha}\alpha c} \Pi_d^{\dot{\alpha}\alpha} + \frac{1}{2} \Pi_{\dot{\alpha}\alpha a} \Pi_b^{\dot{\alpha}\alpha} = 0 \quad .$$

Aus den Bewegungsgleichungen (4.7) und (4.8) folgt im Gegensatz zu den Bewegungsgleichungen des Hyperteilchens keine lineare Abhängigkeit der Spinor-Bewegungsgleichungen und somit keine κ-Symmetrie.

Aufgrund von $p^2 = 0$ kam es beim Hyperteilchen zu einer Unbestimmtheit der Spinoren, die die Anzahl ihrer dynamische Freiheitsgrade halbierte. Im Fall des String verschwindet statt dessen der Energie-Impuls-Tensor, welcher aufgrund des Ausdrucks $\sqrt{h} h^{ab}$ in der Wirkung nicht die Form eines Projektors hat. Aus diesem Grund wäre es wünschenswert, einen zusätzlichen *Wess-Zumino-Term* $\mathcal{S}_2$ zu konstruieren, der die Bewegungsgleichungen (4.7) und (4.8) so modifiziert, daß auch hier, durch lineare Abhängigkeit der Spinorgleichungen, die Freiheitsgrade der Spinoren halbiert werden. In diesem Fall wäre die Folge, ähnlich wie beim Hyperteilchen, eine lokale κ-Symmetrie.

Die κ-Symmetrie ist notwendig, um in der *Lichtkegel-Eichung* die Bewegungsgleichungen so zu vereinfachen, daß diese lösbar werden und eine Quantisierung ermöglichen.

4.3 Der Wess-Zumino-Term

Wie bereits erläutert, ist es für die κ-Symmetrie zwingend erforderlich, einen zusätzlichen *Wess-Zumino (WZ)-Term* zu konstruieren, so daß dieser zusammen mit $\mathcal{S}_1$ eine κ-Symmetrie aufweist. Dieser Wirkungsterm soll von der Metrik h_{ab} und deren Determinante unabhängig sein, was gewährleistet, daß dieser keinen Beitrag zum Energie-Impuls-Tensor liefert. Aus Dimensionsgründen (siehe Anhang C) gibt es nur beschränkt viele Möglichkeiten neue Wirkungsbeiträge zu bilden.

$$\mathcal{S}_1 \quad = \quad \underbrace{\overbrace{\frac{1}{\alpha'}}^{+2}}_{0} \int \underbrace{\overbrace{d^2\sigma}^{0}}_{-2} \underbrace{\overbrace{\sqrt{h}\; h^{ab}}^{0}}_{0} \underbrace{\overbrace{\Pi_{\alpha\dot{\alpha},a}}^{-1}}_{1} \underbrace{\overbrace{\Pi_b^{\dot{\alpha}\alpha}}^{-1}}_{1} \tag{4.9}$$

Die Wirkung $\mathcal{S}_1$ ist also sowohl in Weltflächen- (unten) als auch Raumzeit-Dimensionen (oben) dimensionslos. Es ist also nötig, auch den WZ-Term $\mathcal{S}_2$ dimensionslos zu konstruieren.

4.3.1 Konstruktion des Wess-Zumino-Terms in Anlehnung an das Green-Schwarz-Modell

Beim N=2 GS-String wird eine κ-Symmetrie erzeugt, indem ein WZ-Term eingeführt wird, der es ermöglicht, Projektoren zu konstruieren, welche auf *selbstduale* und *anti-selbstduale* Anteile der zweidimensionalen Weltflächenvektoren $\kappa_{\alpha,a}$ und $\bar{\kappa}_a^{\dot{\alpha}}$ projizieren[1, 16].

Diese Projektoren sind

$$P_{\pm}^{ab} = \frac{1}{2}(h^{ab} \pm \epsilon^{ab}/\sqrt{h}) \quad . \tag{4.10}$$

Sie genügen den Projektoreigenschaften

$$\begin{aligned} P_{\pm}^{ab} h_{bc} P_{\pm}^{cd} &= P_{\pm}^{ad} \\ P_{\pm}^{ab} h_{bc} P_{\mp}^{cd} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Durch die Projektoren kann die Zahl der Freiheitsgrade der Spinoren halbiert werden. Wie schon beim Hyperteilchen impliziert dieses eine zusätzliche *lokale* Symmetrie, die κ-Symmetrie.

In diesem Kapitel soll versucht werden, einen N=2 hypersymmetrischen WZ-Term zu konstruieren, der das Einführen solcher Projektoren ermöglicht. Die Langrangefunktion $\mathcal{L}_2$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = {} & 2\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot{\alpha}\alpha}((\theta_{1\alpha}\partial_b\bar{\theta}_{1\dot{\alpha}} - \partial_b\theta_{1\alpha}\bar{\theta}_{1\dot{\alpha}}) - (\theta_{2\alpha}\partial_b\bar{\theta}_{2\dot{\alpha}} - \partial_b\theta_{2\alpha}\bar{\theta}_{2\dot{\alpha}})) \\ & + 4\epsilon^{ab}(\theta_{1\alpha}\partial_a\bar{\theta}_{1\dot{\alpha}} - \partial_a\theta_{1\alpha}\bar{\theta}_{1\dot{\alpha}})(\theta^{2\alpha}\partial_b\bar{\theta}^{2\dot{\alpha}} - \partial_b\theta^{2\alpha}\bar{\theta}^{2\dot{\alpha}})) \quad . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Wichtig für die Lorentz-kovariante Konstruktion des WZ-Terms ist der antisymmetrische ϵ-Tensor[2] und die Vorzeichen in den Klammern[3]. Zunächst ist zu untersuchen, ob $\mathcal{L}_2$ Hypersymmetrie besitzt.

Die Variation von $\mathcal{L}_2$ ergibt

[2] Strenggenommen handelt es sich bei ϵ^{ab} um eine Tensordichte, so daß es nicht notwendig ist, einen Faktor $\sqrt{h}$ in der Wirkung einzuführen.

[3] Wenn diese nicht mit den Vorzeichen in der Klammer $(\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \partial_b\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ von $\mathcal{L}_1$ übereinstimmen, lassen sich die Projektoren nicht bilden.

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_2 = &+ 2\epsilon^{ab}\partial_a \delta X^{\dot\alpha\alpha}((\theta_{1\alpha}\partial_b\bar\theta_{1\dot\alpha} - \partial_b\theta_{1\alpha}\bar\theta_{1\dot\alpha}) - (\theta_{2\alpha}\partial_b\bar\theta_{2\dot\alpha} - \partial_b\theta_{2\alpha}\bar\theta_{2\dot\alpha}))\\
&+ 2\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}(\theta_{1\alpha}\underbrace{\delta(\partial_b\bar\theta_{1\dot\alpha})}_{=0} - \underbrace{\delta(\partial_b\theta_{1\alpha})}_{=0}\bar\theta_{1\dot\alpha})\\
&- 2\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}(\theta_{2\alpha}\underbrace{\delta(\partial_b\bar\theta_{2\dot\alpha})}_{=0} - \underbrace{\delta(\partial_b\theta_{2\alpha})}_{=0}\bar\theta_{2\dot\alpha})\\
&+ 2\epsilon^{ab}\underbrace{\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}((\delta\theta_{1\alpha}\partial_b\bar\theta_{1\dot\alpha} - \partial_b\theta_{1\alpha}\delta\bar\theta_{1\dot\alpha}) - (\delta\theta_{2\alpha}\partial_b\bar\theta_{2\dot\alpha} - \partial_b\theta_{2\alpha}\delta\bar\theta_{2\dot\alpha}))}_{totale\ Ableitung\ +\ \epsilon^{ab}\partial_a\partial_b X \Rightarrow\ 0}\\
&+ 4\epsilon^{ab}(\delta\theta_{1\alpha}\partial_a\bar\theta_{1\dot\alpha} - \underbrace{\partial_a\delta\theta_{1\alpha}}_{=0}\bar\theta_{1\dot\alpha} + \theta_{1\alpha}\underbrace{\partial_a\delta\bar\theta_{1\dot\alpha}}_{=0} - \partial_a\theta_{1\alpha}\delta\bar\theta_{1\dot\alpha})\\
&\times(\theta^{2\alpha}\partial_b\bar\theta^{2\dot\alpha} - \partial_b\theta^{2\alpha}\bar\theta^{2\dot\alpha})\\
&+ 4\epsilon^{ab}(\theta_{1\alpha}\partial_a\bar\theta_{1\dot\alpha} - \partial_a\theta_{1\alpha}\bar\theta_{1\dot\alpha})(\delta\theta^{2\alpha}\partial_b\bar\theta^{2\dot\alpha} - \underbrace{\partial_b\delta\theta^{2\alpha}}_{=0}\bar\theta^{2\dot\alpha}\\
&+ \theta^{2\alpha}\underbrace{\partial_b\delta\bar\theta^{2\dot\alpha}}_{=0} - \partial_b\theta^{2\alpha}\delta\bar\theta^{2\dot\alpha}) \quad .
\end{aligned}
$$

Hier wurde ausgenutzt, daß die Ableitung $\partial_a\eta$ verschwindet, weiterhin überzeugt man sich leicht, daß ein Term $\propto \epsilon^{ab}\partial_a\partial_b X$ aufgrund der Antisymmetrie von ϵ^{ab} ebenfalls verschwindet . Da vorausgesetzt wird, daß die Integranden an den Integrationsgrenzen verschwinden, tragen Terme, die sich als totale Ableitungen ausdrücken lassen, nicht zur Wirkung bei[4].

Nach Einsetzen der Hypersymmetrie-Transformationen (4.4) in die verbleibende Variation $\delta\mathcal{L}_2$ wird daraus

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_2 \;=\;& 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar\theta^{1\dot\alpha}\eta^{1\alpha} - \bar\eta^{1\dot\alpha}\partial_a\theta^{1\alpha} + \partial_a\bar\theta^{2\dot\alpha}\eta^{2\alpha} - \bar\eta^{2\dot\alpha}\partial_a\theta^{2\alpha})\\
&\times((\theta_{1\alpha}\partial_b\bar\theta_{1\dot\alpha} - \partial_b\theta_{1\alpha}\bar\theta_{1\dot\alpha}) - (\theta_{2\alpha}\partial_b\bar\theta_{2\dot\alpha} - \partial_b\theta_{2\alpha}\bar\theta_{2\dot\alpha}))\\
&+ 4\epsilon^{ab}(\eta_{1\alpha}\partial_a\bar\theta_{1\dot\alpha} - \partial_a\theta_{1\alpha}\bar\eta_{1\dot\alpha})(\theta^{2\alpha}\partial_b\bar\theta^{2\dot\alpha} - \partial_b\theta^{2\alpha}\bar\theta^{2\dot\alpha})\\
&+ 4\epsilon^{ab}(\theta_{1\alpha}\partial_a\bar\theta_{1\dot\alpha} - \partial_a\theta_{1\alpha}\bar\theta_{1\dot\alpha})(\eta^{2\alpha}\partial_b\bar\theta^{2\dot\alpha} - \partial_b\theta^{2\alpha}\bar\eta^{2\dot\alpha}) \quad .
\end{aligned}
$$

Übrig bleibt lediglich

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_2 \;=\;& 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar\theta^{1\dot\alpha}\eta^{1\alpha} - \bar\eta^{1\dot\alpha}\partial_a\theta^{1\alpha})(\theta_{1\alpha}\partial_b\bar\theta_{1\dot\alpha} - \partial_b\theta_{1\alpha}\bar\theta_{1\dot\alpha})\\
&- 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar\theta^{2\dot\alpha}\eta^{2\alpha} - \bar\eta^{2\dot\alpha}\partial_a\theta^{2\alpha})(\theta_{2\alpha}\partial_b\bar\theta_{2\dot\alpha} - \partial_b\theta_{2\alpha}\bar\theta_{2\dot\alpha}) \quad .
\end{aligned}
$$

[4] Hier und im folgenden werden Gleichheitszeichen auch dann benutzt, wenn sich Ausdrücke lediglich um eine totale Ableitung unterscheiden. Die Ausdrücke sind dann strenggenommen nur gleich, wenn über sie in dem Wirkungsintegral integriert wird.

Beide Terme sind von der Form

$$4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha})(\theta_{\alpha}\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \qquad . \tag{4.12}$$

Da die Terme unabhängig voneinander sind, müssen beide getrennt verschwinden, um die Hypersymmetrie des WZ-Terms $\mathcal{S}_2$ zu gewährleisten. Aus diesem Grund soll nun ein Term der Form (4.12) näher betrachtet werden.

Ausmultiplizieren der zweiten Klammer aus (4.12) und partielle Integration des zweiten Terms liefert

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_2 &= 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha})\theta_{\alpha}\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
&\quad \underbrace{-4\epsilon^{ab}\partial_b((\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha})\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}})}_{tot.\ Abl.} \\
&\quad + \underbrace{4\epsilon^{ab}(\partial_b\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_b\partial_a\theta^{\alpha})\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}_{=0} \\
&\quad + 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha})\theta_{\alpha}\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
&= +8\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha})\theta_{\alpha}\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \ .
\end{aligned}$$

Ausschreiben der ϵ-Komponenten ergibt

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_2 &= +8(\bar{\theta}'^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\theta'^{\alpha})\theta_{\alpha}\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} - 8(\dot{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}\ \eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\dot{\theta}^{\alpha})\theta_{\alpha}\bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} \\
&= +8\bar{\theta}'^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha}\theta_{\alpha}\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} - 8\ \dot{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}\ \eta^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} - 8\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\theta'^{\alpha}\theta_{\alpha}\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} + 8\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\dot{\theta}^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Heben und Senken des $\dot{\alpha}$ im ersten ergibt gerade den zweiten Term. Partielle Integration des dritten und vierten Terms liefert

$$\begin{aligned}
-8\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\theta'^{\alpha}\theta_{\alpha}\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} &= +8\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\dot{\theta}'^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + 8\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\theta'^{\alpha}\dot{\theta}_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \text{tot. Abl.} \\
+8\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\dot{\theta}^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} &= -8\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\dot{\theta}'^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - 8\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\dot{\theta}^{\alpha}\theta'_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \ + \text{tot. Abl.} \qquad .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Die Summe der beiden ersten Terme der ersten und zweiten Zeile in (4.14) verschwindet. Die beiden letzten addieren sich jedoch aufgrund der *Kommutativität* der Spinoren und der Antisymmetrie im Wechsel der Spinorindexpositionen. Es bleibt

$$\delta\mathcal{L}_2 = -16(\dot{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}\ \eta^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} + \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\dot{\theta}^{\alpha}\theta'_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \qquad . \tag{4.15}$$

Da gepunktete und ungepunktete Spinoren nicht ineinander transformiert werden können, muß jeder dieser Summanden einzeln verschwinden, damit $\mathcal{S}_2$ hypersymmetrisch ist. Dieses ist jedoch nicht der Fall.

Es ist somit gezeigt, daß es nicht möglich ist, einen hypersymmetrischen WZ-Term analog zum GS-Modell zu konstruieren. Die Unterschiede zum GS-String werden im nächsten Abschnitt, dem direkten Vergleich des hypersymmetrischen mit dem supersymmetrischen WZ-Term, erläutert.

4.3.2 Vergleich des Wess-Zumino-Terms des Hyperstrings mit dem des Green-Schwarz-Modells

In diesem Abschnitt soll der WZ-Term des GS-Strings in die van-der-Waerden-Notation übersetzt werden, um zu verdeutlichen, warum es nicht möglich ist einen hypersymmetrische WZ-Term $\mathcal{S}_2$ zu konstruieren.

Aufgrund von (4.12) wird jedoch nur die $N{=}1$ supersymmetrische Wirkung $\mathcal{S}_{GSWZ}$ betrachtet. Diese ist bekannt (siehe [1, 2, 16]) als

$$\mathcal{S}_{GSWZ} = \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma(-i)\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \bar{\theta}\Gamma_\mu\partial_b\theta \quad . \tag{4.16}$$

Die Rechnung soll sich an dieser Stelle auf Majorana-Spinoren θ in 3+1 Dimensionen beschränken. Die Wirkung (4.16) wird dann in der van-der-Waerden-Notation zu

$$\mathcal{S}_{GSWZ} = \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\ 2i\epsilon^{ab}\partial_a X^{\alpha\dot\alpha}(\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} - \partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) \quad . \tag{4.17}$$

Dieses beruht auf der Tatsache, daß

$$\begin{aligned}
\bar\theta\Gamma_\mu\partial_b\theta &= \theta^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\partial_b\theta \\
&= (\theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha})\begin{pmatrix} 0 & (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta} \\ (\tilde\sigma_\mu)^{\dot\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_b\theta_\beta \\ \partial_b\bar\theta^{\dot\beta} \end{pmatrix} \\
&= (\tilde\sigma_\mu)^{\dot\alpha\beta}\bar\theta_{\dot\alpha}\partial_b\theta_\beta + (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\theta^\alpha\partial_b\bar\theta^{\dot\beta} \\
&= (\tilde\sigma_\mu)^{\dot\alpha\beta}(\bar\theta_{\dot\alpha}\partial_b\theta_\beta + \epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\theta^\alpha\partial_b\bar\theta^{\dot\beta}) \\
&= (\tilde\sigma_\mu)^{\dot\alpha\beta}(\bar\theta_{\dot\alpha}\partial_b\theta_\beta + \theta_\beta\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}) \quad .
\end{aligned}$$

Hier gilt im Gegensatz zu 2+2 Dimensionen[5] $\bar\theta = \theta^\dagger\gamma_0 = \theta^{T*}\gamma_0$.

Um einen Ausdruck mit zwei Spinorindizes α und $\dot\alpha$ zu bekommen, wird mit $(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\gamma}$ multipliziert. Das ergibt mit

$$(\tilde\sigma_\mu)^{\dot\alpha\alpha}(\sigma^\mu)_{\beta\dot\beta} = -2\delta^\alpha_\beta\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}$$

[5]Die beiden Weylspinoren θ_α und $\bar\theta_{\dot\alpha}$ genügen in 3+1 Dimensionen der Beziehung $\theta^*_\alpha = \bar\theta_{\dot\alpha}$, sind also nicht wie in 2+2 Dimensionen reell, d.h. keine Majorana-Weyl-Spinoren.

(vergl. [7]) einen äquivalenten Ausdruck mit zwei Spinorindizes

$$\bar{\theta}\Gamma_\mu\partial_b\theta \quad \Rightarrow \quad -2(\theta_\gamma\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\gamma}} - \partial_b\theta_\gamma\bar{\theta}_{\dot{\gamma}}) \quad , \tag{4.18}$$

wobei beim GS-String in 3+1 Dimensionen die Spinoren *antikommutierend* sind, was bedeutet, daß $\{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\} = 0$ etc. ist. Analog wechseln die Vektorindizes von X^μ in Spinorindizes via

$$\partial_a X^{\dot{\alpha}\alpha} = (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_a X^\mu \qquad .$$

Die Variation der Lagarangefunktion in der neuen Basis ergibt

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{GSWZ} \quad \propto \quad & 2i\epsilon^{ab}\delta(\partial_a X^{\alpha\dot{\alpha}})(\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \partial_b\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \\
& + 2i\epsilon^{ab}\partial_a X^{\alpha\dot{\alpha}}(\delta\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \underbrace{\delta\partial_b\theta_\alpha}_{=0}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \\
& + 2i\epsilon^{ab}\partial_a X^{\alpha\dot{\alpha}}(\theta_\alpha\underbrace{\delta\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}_{=0} - \partial_b\theta_\alpha\delta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \qquad .
\end{aligned}$$

Da die Spinoren θ nach (2.11) in konstante Spinoren η transformieren, bleibt lediglich

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{GSWZ} \quad \propto \quad & +2i\epsilon^{ab}(2i(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^\alpha - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^\alpha))(\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \partial_b\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \ + \ \text{tot. Abl.} \\
\propto \quad & -4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^\alpha - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^\alpha)\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
& + 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^\alpha - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^\alpha)\partial_b\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned}$$

übrig. Damit die Wirkung $\mathcal{S}_{GSWZ}$ supersymmetrisch ist, muß dieser Term verschwinden.

Partielle Integration des zweiten Terms liefert

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{GSWZ} \quad \propto \quad & -4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^\alpha - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^\alpha)\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
& - 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^\alpha - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^\alpha)\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
& + \text{tot. Abl.} \\
\propto \quad & -8\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^\alpha - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^\alpha)\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \qquad .
\end{aligned}$$

Mit ausgeschriebenen ϵ-Komponenten wird daraus

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{GSWZ} &\propto -8(\bar{\theta}'^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar{\eta}^{\dot\alpha}\theta'^\alpha)\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot\alpha} \\
&\quad + 8(\dot{\bar{\theta}}^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar{\eta}^{\dot\alpha}\dot{\theta}^\alpha)\theta_\alpha\bar{\theta}'_{\dot\alpha} \\
&\propto -8\bar{\theta}'^{\dot\alpha}\eta^\alpha\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot\alpha} + 8\,\dot{\bar{\theta}}^{\dot\alpha}\,\eta^\alpha\theta_\alpha\bar{\theta}'_{\dot\alpha} \\
&\quad + 8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\theta'^\alpha\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot\alpha} - 8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\dot{\theta}^\alpha\theta_\alpha\bar{\theta}'_{\dot\alpha} \quad .
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Umordnen der Einträge im ersten Term und Hoch- und Runterziehen von $\dot\alpha$ ergibt gerade den zweiten Term mit negativem Vorzeichen, wenn die Spinoren *antikommutieren*, d.h. es bleiben nur die Terme drei und vier übrig.

Partielle Integration des dritten und vierten Terms liefert

$$
\begin{aligned}
+8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\theta'^\alpha\theta_\alpha\dot{\bar{\theta}}_{\dot\alpha} &= -8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\dot{\theta}'^\alpha\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot\alpha} - 8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\theta'^\alpha\dot{\theta}_\alpha\bar{\theta}_{\dot\alpha} + \text{ tot. Abl.} \\
-8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\dot{\theta}^\alpha\theta_\alpha\bar{\theta}'_{\dot\alpha} &= +8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\dot{\theta}'^\alpha\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot\alpha} + 8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\dot{\theta}^\alpha\theta'_\alpha\bar{\theta}_{\dot\alpha} - \text{ tot. Abl.} \quad .
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Es bleibt also

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{GSWZ} &\propto -8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\dot{\theta}'^\alpha\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot\alpha} - 8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\theta'^\alpha\dot{\theta}_\alpha\bar{\theta}_{\dot\alpha} \\
&\quad +8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\dot{\theta}'^\alpha\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot\alpha} + 8\bar{\eta}^{\dot\alpha}\dot{\theta}^\alpha\theta'_\alpha\bar{\theta}_{\dot\alpha} \quad .
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

Der erste und dritte Term heben sich weg. Vertauschen der beiden mittleren Spinoren und Wechsel der α-Positionen im zweiten Term ändert bei *antikommutierenden* Spinoren das Vorzeichen nicht, so daß sich dieser mit dem vierten Term weghebt.

Die WZ-Wirkung $\mathcal{S}_{GSWZ}$ ist somit invariant unter Supersymmetrie-Transformationen. Der Vergleich der Restterme aus Hyper- und Supersymmetrie, (4.13) und (4.19), zeigt, daß die *Antikommutativität* der Spinoren für die Existenz eines supersymmetrischen WZ-Terms zwingend erforderlich ist. Aufgrund der *Kommutativität* der Spinoren im hypersymmetrischen Modell ist es also nicht möglich, einen hypersymmetrischen WZ-Term in Analogie zum GS-String zu konstruieren.

4.4 Konstruktion eines allgemeinen hypersymmetrischen Wess-Zumino-Terms

Wie im vorletzten Abschnitt gezeigt wurde, ist es nicht möglich, einen hypersymmetrischen WZ-Wirkungsterm so zu konstruieren, daß die Vorgehensweise der beim GS-String ähnelt. Aus diesem Grund soll in diesem Abschnitt untersucht werden, ob es überhaupt einen hypersymmetrischen WZ-Term gibt. Zuerst wird eine Wirkung aus allen möglichen unabhängigen Termen zusammengesetzt. Aus Gründen der Lorentzinvarianz muß diese Wirkung zur Kontraktion der Weltflächenindizes den Lorentz-invarianten antisymmetrischen ϵ-Tensor enthalten, denn die Metrik h_{ab} soll nicht auftreten, um keinen Anteil zum Energie-Impuls-Tensor beizutragen.

Der Einfachheit halber beschränkt sich die Konstruktion zuerst auf einen $N{=}1$ hypersymmetrischen WZ-Term, der dann auf $N{=}2$ verallgemeinert wird.

4.4.1 Der allgemeinste $N{=}1$ hypersymmetrische Wess-Zumino-Term

Zur Konstruktion der allgemeinen $N{=}1$ hypersymmetrischen Wirkung $\mathcal{S}_2$ sollen zunächst alle möglichen unabhängigen Terme gefunden werden, die zu $\mathcal{S}_2$ beitragen können. Diese Terme müssen unter anderem so gewählt werden, daß $\mathcal{S}_2$ sowohl Weltflächen-, als auch Raumzeit-dimensionslos ist (siehe (4.9)).

Im folgenden werden zunächst diese Raumzeit-Terme bestimmt und deren Abhängigkeiten geklärt. Eine mögliche Kombination ist

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{ab} X^{\dot\alpha\alpha}(\partial_a\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} \mp \partial_b\theta_\alpha\partial_a\bar\theta_{\dot\alpha}) \\
= \;& X^{\dot\alpha\alpha}(\theta'_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} \mp \dot\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha}) - X^{\dot\alpha\alpha}(\dot\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} \mp \theta'_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}) \\
= \;& \left\{ \begin{array}{cc} 2X^{\dot\alpha\alpha}(\dot\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \theta'_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}) & (-) \\ 0 & (+) \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Durch partielle Integration des Term mit dem $(-)$ Zeichen[6] führt dieses auf

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{ab}X^{\dot\alpha\alpha}(\partial_a\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} - \partial_a\bar\theta_{\dot\alpha}\partial_b\theta_\alpha) \\
=\, & \underbrace{\epsilon^{ab}\partial_a(X^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha})}_{tot.\ Abl.} - \epsilon^{ab}\partial_a(X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha})\theta_\alpha \\
& - \underbrace{\epsilon^{ab}\partial_a(X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha})}_{tot.\ Abl.} + \epsilon^{ab}\partial_a(X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha)\bar\theta_{\dot\alpha} \\
=\, & -\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha - \underbrace{\epsilon^{ab}X^{\dot\alpha\alpha}\partial_a\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha}_{=0\ \to\ \epsilon^{ab}}
\end{aligned}$$

[6] Totale Ableitungen tragen nicht zur Wirkung bei, siehe 4.3.1.

$$+\,\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha} + \underbrace{\epsilon^{ab}X^{\dot\alpha\alpha}\partial_a\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}}_{=0\ \to\ \epsilon^{ab}}$$
$$= -\,\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}(\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha - \partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) \quad .$$

Terme quadratisch in den Ableitungen verschwinden aufgrund der totalen Antisymmetrie von ϵ^{ab} automatisch,

$$\epsilon^{ab}\partial_a\partial_b X^{\dot\alpha\alpha}\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha \;=\; +\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial\tau}X^{\dot\alpha\alpha}\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha - \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\sigma}X^{\dot\alpha\alpha}\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha = 0 \quad .$$

Weiter zeigt sich, daß

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha} \\
=\;& \underbrace{\epsilon^{ab}\partial_b(\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha})}_{tot.\ Abl.} - \epsilon^{ab}\partial_b(\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\bar\theta_{\dot\alpha})\theta_\alpha \\
=\;& \underbrace{-\epsilon^{ab}\partial_b\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha}_{=0\ \to\ \epsilon^{ab}} - \epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha \\
=\;& -\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha \quad ,
\end{aligned}$$

daraus folgt

$$\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}(\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha} - \partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\theta_\alpha) = 2\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha} \quad .$$

Der Term quadratisch in $X_{\alpha\dot\alpha}$ liefert keinen Beitrag, er läßt sich durch eine totale Ableitung ausdrücken

$$\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b X_{\alpha\dot\alpha} \;=\; \underbrace{\epsilon^{ab}\partial_b(\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}X_{\alpha\dot\alpha})}_{tot.\ Abl.} - \underbrace{\epsilon^{ab}\partial_b\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}X_{\alpha\dot\alpha}}_{=0\ \to\epsilon^{ab}} \quad .$$

Im Gegensatz dazu lassen sich Terme quadratisch in $\Pi_{\alpha\dot\alpha,a}$ auf die bereits bekannten zurückführen.

Aus Dimensionsgründen sind, ohne zusätzliche dimensionsbehaftete Konstanten einzuführen, für weitere Terme nur rein spinorielle Ausdrücke möglich (siehe (4.9)). Hier existiert lediglich ein Term $\propto \theta_\alpha\theta^\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}$, wobei auf die vier Spinoren noch die beiden Ableitungen ∂_a und ∂_b zu verteilen sind. Dies ergibt aufgrund von (A.26) nur einen nichtverschwindenden Beitrag

$$\epsilon^{ab}\partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} \quad .$$

Vertauschen der Ableitungen oder Heben und Senken der Spinorindizes bewirkt lediglich das Auftreten von Faktoren (-1). Eine mögliche Basiswahl von unabhängigen Termen für N=1 Hypersymmetrie ist somit

$$\begin{aligned}&\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}\\&\epsilon^{ab}\partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\quad .\end{aligned}$$

Daraus läßt sich eine allgemeinste Lagrangefunktion mit zunächst beliebigen Koeffizienten A,B konstruieren

$$\mathcal{L}_2 = A\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha} + B\epsilon^{ab}\partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\quad . \tag{4.22}$$

Die Variation von $\mathcal{L}_2$ unter Hypersymmetrie ergibt

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_2 \;=\;& A\epsilon^{ab}\big(\delta(\partial_a X^{\dot\alpha\alpha})\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha} + \partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\underbrace{\delta(\partial_b\theta_\alpha)}_{=0}\bar\theta_{\dot\alpha} + \partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha\delta\bar\theta_{\dot\alpha}\big)\\&+ B\epsilon^{ab}\big(\underbrace{\delta(\partial_a\theta_\alpha)}_{=0}\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} + \partial_a\theta_\alpha\delta\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\\&+ \partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\underbrace{\delta(\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha})}_{=0}\bar\theta^{\dot\alpha} + \partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\delta\bar\theta^{\dot\alpha}\big)\quad ,\end{aligned}$$

es bleibt

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_2 \;=\;& 2A\epsilon^{ab}(\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\partial_a\theta^\alpha)\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}\\&+ A\epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar\eta_{\dot\alpha}\\&+ B\epsilon^{ab}\partial_a\theta_\alpha\eta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\\&+ B\epsilon^{ab}\partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\alpha}\quad .\end{aligned}$$

Der zweite Term verschwindet aufgrund von

$$A\epsilon^{ab}\bar\eta_{\dot\alpha}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha = A\epsilon^{ab}\underbrace{\partial_b(\bar\eta_{\dot\alpha}\partial_a x^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha)}_{tot.\ Abl.} - \underbrace{A\epsilon^{ab}\bar\eta_{\dot\alpha}\partial_b\partial_a x^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha}_{=0\ \to\ \epsilon^{ab}}\quad ,$$

so daß

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_2 \;=\;& +2A\epsilon^{ab}\eta^\alpha\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}\\&- 2A\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha}\partial_a\theta^\alpha\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}\\&+ B\epsilon^{ab}\eta^\alpha\partial_a\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\\&+ B\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha}\partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\end{aligned} \tag{4.23}$$

verschwinden muß damit Hypersymmetrie gegeben ist.

Wie schon in Abschnitt 4.3.1 erwähnt, gibt es keine Beziehung zwischen Spinoren mit gepunkteten und ungepunkteten Indizes. Aus diesem Grund müssen der erste und dritte bzw. der zweite und vierte Term getrennt verschwinden. Vergleich des ersten mit dem dritten Term ergibt

$$\begin{aligned}
& +2A\epsilon^{ab}\eta^{\alpha}\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + B\epsilon^{ab}\eta^{\alpha}\partial_a\theta_{\alpha}\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
= \;& +2A\epsilon^{ab}\eta^{\alpha}\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - B\epsilon^{ab}\eta^{\alpha}\partial_b\theta_{\alpha}\partial_a\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
= \;& +2A\epsilon^{ab}\eta^{\alpha}\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + B\epsilon^{ab}\eta^{\alpha}\partial_b\theta_{\alpha}\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
= \;& 0 \quad \text{falls} \quad B = -2A \quad .
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Analog dazu folgt für den zweiten und vierten Term

$$\begin{aligned}
& -2A\epsilon^{ab}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha}\partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + B\epsilon^{ab}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
= \;& -2A\epsilon^{ab}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha}\partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \big(\underbrace{B\epsilon^{ab}\partial_b(\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}})}_{tot.Abl.} \\
& - \underbrace{B\epsilon^{ab}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_b\partial_a\theta_{\alpha}\theta^{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}_{=0\ \to\ \epsilon^{ab}} - B\epsilon^{ab}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta_{\alpha}\partial_b\theta^{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\big) \\
= \;& -2A\epsilon^{ab}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha}\partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - B\epsilon^{ab}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta_{\alpha}\partial_b\theta^{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
= \;& -2A\epsilon^{ab}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha}\partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + B\epsilon^{ab}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha}\partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
= \;& 0 \quad \text{falls} \quad B = 2A \quad .
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Die Variation der Wirkung S_2 verschwindet also nur, wenn alle Koeffizienten verschwinden. Ein N=1 hypersymmetrischer WZ-Term ist also nicht möglich.

4.4.2 Der allgemeinste N=2 hypersymmetrische Wess-Zumino-Term

Aufgrund der Möglichkeit, daß die allgemeinste WZ-Wirkung S_2 zwar keine N=1 Hypersymmetrie, vielleicht aber eine erweiterte N=2 Hypersymmetrie besitzt, soll an dieser Stelle der Frage nach der Existenz eines N=2 hypersymmetrischen WZ-Terms nachgegangen werden.

Da es für N=2 Hypersymmetrie die doppelte Anzahl von Spinoren gibt, erhöht sich auch die Anzahl der unabhängigen Terme, aus denen der WZ-Term S_2 zusammengesetzt werden kann. Der Hyperraum besitzt nun die Koordinaten (X, θ^1, θ^2).

Die Verallgemeinerung der N=1 Terme, die aus Spinoren und Bispinoren zusammengesetzt sind, ist somit

$$\begin{array}{l} \epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_b\theta^1_\alpha\bar{\theta}^1_{\dot{\alpha}} \\ \epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_b\theta^2_\alpha\bar{\theta}^2_{\dot{\alpha}} \\ \epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_b\theta^1_\alpha\bar{\theta}^2_{\dot{\alpha}} \\ \epsilon^{ab}\partial_a X^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_b\theta^2_\alpha\bar{\theta}^1_{\dot{\alpha}} \quad . \end{array} \tag{4.26}$$

Als Terme, die nur aus Spinoren bestehen kommen in Betracht, die rein spinoriellen Terme aus N=1 Hypersymmetrie auf N=2 erweitert

$$\begin{array}{l} \epsilon^{ab}\partial_a\theta^1_\alpha\theta^{\alpha 1}\partial_b\bar{\theta}^1_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}1} \\ \epsilon^{ab}\partial_a\theta^2_\alpha\theta^{\alpha 2}\partial_b\bar{\theta}^2_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}2} \end{array} \tag{4.27}$$

sowie zusätzliche Terme in denen die Anzahl der θ^1 und θ^2 ungerade ist

$$\begin{array}{l} \epsilon^{ab}\partial_a\theta^1_\alpha\theta^{\alpha 2}\partial_b\bar{\theta}^2_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}2} \\ \epsilon^{ab}\partial_a\theta^2_\alpha\theta^{\alpha 2}\partial_b\bar{\theta}^1_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}2} \\ \epsilon^{ab}\partial_a\bar{\theta}^2_{\dot{\alpha}}\partial_b\theta^{\alpha 1}\theta^1_\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}1} \\ \epsilon^{ab}\theta^1_\alpha\partial_a\theta^{\alpha 2}\partial_b\bar{\theta}^1_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}1} \quad . \end{array} \tag{4.28}$$

Zusätzlich existieren noch weitere rein spinorielle Terme. Es wird sich jedoch zeigen, daß deren Betrachtung nicht zwingend erforderlich ist. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Variationen der aufgelisteten unabhängigen Terme einzeln gegenübergestellt. Die Variationen der Terme, in denen sowohl Spinoren als auch Bispinoren (4.26) auftreten, sind unter Verwendung von (4.4) für N=2

$$
\begin{aligned}
&+A\epsilon^{ab}\eta^{\alpha 1}\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha 1}\partial_b\theta^1_\alpha\bar\theta^1_{\dot\alpha} && -A\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha 1}\partial_a\theta^{\alpha 1}\partial_b\theta^1_\alpha\bar\theta^1_{\dot\alpha}\\
&+A\epsilon^{ab}\eta^{\alpha 2}\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha 2}\partial_b\theta^1_\alpha\bar\theta^1_{\dot\alpha} && -A\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha 2}\partial_a\theta^{\alpha 2}\partial_b\theta^1_\alpha\bar\theta^1_{\dot\alpha}\\
&+B\epsilon^{ab}\eta^{\alpha 1}\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha 1}\partial_b\theta^2_\alpha\bar\theta^2_{\dot\alpha} && -B\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha 1}\partial_a\theta^{\alpha 1}\partial_b\theta^2_\alpha\bar\theta^2_{\dot\alpha}\\
&+B\epsilon^{ab}\eta^{\alpha 2}\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha 2}\partial_b\theta^2_\alpha\bar\theta^2_{\dot\alpha} && -B\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha 2}\partial_a\theta^{\alpha 2}\partial_b\theta^2_\alpha\bar\theta^2_{\dot\alpha}\\
&+C\epsilon^{ab}\eta^{\alpha 1}\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha 1}\partial_b\theta^1_\alpha\bar\theta^2_{\dot\alpha} && -C\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha 1}\partial_a\theta^{\alpha 1}\partial_b\theta^1_\alpha\bar\theta^2_{\dot\alpha}\\
&+C\epsilon^{ab}\eta^{\alpha 2}\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha 2}\partial_b\theta^1_\alpha\bar\theta^2_{\dot\alpha} && -C\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha 2}\partial_a\theta^{\alpha 2}\partial_b\theta^1_\alpha\bar\theta^2_{\dot\alpha}\\
&+D\epsilon^{ab}\eta^{\alpha 1}\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha 1}\partial_b\theta^2_\alpha\bar\theta^1_{\dot\alpha} && -D\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha 1}\partial_a\theta^{\alpha 1}\partial_b\theta^2_\alpha\bar\theta^1_{\dot\alpha}\\
&+D\epsilon^{ab}\eta^{\alpha 2}\partial_a\bar\theta^{\dot\alpha 2}\partial_b\theta^2_\alpha\bar\theta^1_{\dot\alpha} && -D\epsilon^{ab}\bar\eta^{\dot\alpha 2}\partial_a\theta^{\alpha 2}\partial_b\theta^2_\alpha\bar\theta^1_{\dot\alpha}\ .
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Diese berechnen sich analog zum ersten und zweiten Term in (4.23) bei N=1 Hypersymmetrie. Für die Variationen der Terme (4.27) und (4.28) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&+E\epsilon^{ab}\partial_a\theta^1_\alpha\eta^{\alpha 1}\partial_b\bar\theta^1_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha 1} && +E\epsilon^{ab}\partial_a\theta^1_\alpha\theta^{\alpha 1}\partial_b\bar\theta^1_{\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\alpha 1}\\
&+F\epsilon^{ab}\partial_a\theta^2_\alpha\eta^{\alpha 2}\partial_b\bar\theta^2_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha 2} && +F\epsilon^{ab}\partial_a\theta^2_\alpha\theta^{\alpha 2}\partial_b\bar\theta^2_{\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\alpha 2}\\
&+G\epsilon^{ab}\partial_a\theta^1_\alpha\eta^{\alpha 2}\partial_b\bar\theta^2_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha 2} && +G\epsilon^{ab}\partial_a\theta^1_\alpha\theta^{\alpha 2}\partial_b\bar\theta^2_{\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\alpha 2}\\
&+H\epsilon^{ab}\partial_a\theta^2_\alpha\eta^{\alpha 2}\partial_b\bar\theta^1_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha 2} && +H\epsilon^{ab}\partial_a\theta^2_\alpha\theta^{\alpha 2}\partial_b\bar\theta^1_{\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\alpha 2}\\
&+I\epsilon^{ab}\partial_a\bar\theta^2_{\dot\alpha}\partial_b\theta^{\alpha 1}\theta^1_\alpha\bar\eta^{\dot\alpha 1} && +I\epsilon^{ab}\partial_a\bar\theta^2_{\dot\alpha}\partial_b\theta^{\alpha 1}\eta^1_\alpha\bar\theta^{\dot\alpha 1}\\
&+J\epsilon^{ab}\eta^1_\alpha\partial_a\theta^{\alpha 2}\partial_b\bar\theta^1_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha 1} && +J\epsilon^{ab}\theta^1_\alpha\partial_a\theta^{\alpha 2}\partial_b\bar\theta^1_{\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\alpha 1}\ .
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

$A, B, C, \ldots, J$ stellen hier wiederum beliebige Koeffizienten dar, die dadurch zu bestimmen sind, daß die Summe aller oder eines Teils der Terme verschwinden muß, damit N=2 Hypersymmetrie existiert.

Aufgrund der Unabhängigkeit der gepunkteten und ungepunkteten Indizes sowie der Spinoren θ^1 und θ^2, paßt zur ersten Zeile in (4.29) nur die erste Zeile in (4.30). Für das Verschwinden beider Zeilen ergeben sich die Bedingungen $A = E$ und $A = -E$. Analog folgt für das Verschwinden der vierten Zeile aus (4.29) und der zweiten Zeile aus (4.30) $B = F$ und $B = -F$.

Die sechste Zeile ist das negative der dritten Zeile in (4.30), wenn $C = G$ und $C = -G$ sowie die achte Zeile in (4.29) das negative von der vierten Zeile aus (4.30), wenn $D = H$ und $D = -H$ ist.

Die fünfte Zeile in (4.29) verschwindet mit der fünften in (4.30), wenn $C = I$ und $C = -I$ ist. Die letzte Zeile aus (4.29) hebt sich mit der letzten aus (4.30) weg, wenn $D = J$ und $D = -J$ ist.

Die zweite und dritte Zeile in (4.29) lassen sich nicht ohne die erste und vierte bekommen. Passende Variationen rein spinorieller Terme, welche die zweite und dritte Zeile in (4.29) wegheben könnten, sind hier nicht betrachtet worden, da diese Zeilen sowieso durch das Verschwinden der Koeffizienten A und B nicht berücksichtigt werden müssen.

Aufgrund der nicht zu erfüllenden Bedingungen an die Koeffizienten $A, B, \ldots, J$ ist das Verschwinden der Variation unter Hypersymmetrie nur zu erfüllen, wenn alle Koeffizienten verschwinden. Es ist also nicht möglich, eine N=2 hypersymmetrische WZ-Wirkung zu konstruieren.

4.5 Konstruktion der allgemeinsten Hyperstring-Wirkung

Da bis jetzt alle Versuche, eine Wirkung zu konstruieren, die sowohl Hyper- als auch κ-Symmetrie besitzen soll, fehlgeschlagen sind, beschäftigt sich dieser Abschnitt damit, die allgemeinste hypersymmetrische Wirkung $\mathcal{S}_{allg}$ zu finden, um zu überprüfen, ob es möglich ist, daß diese Wirkung die Wirkung (4.1) auf Hypersymmetrie und κ-Symmetrie erweitert.

In diesem Fall wäre es nicht mehr nötig, einen zusätzlichen WZ-Term einzuführen, der wie in den letzten Abschnitten beschrieben nicht hypersymmetrisch konstruiert werden kann.

Mögliche Kombinationen aus Spinoren und Bispinoren $(X_{\alpha\dot{\alpha}}, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ sind

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
\left.\begin{array}{l}
\partial_a(\sqrt{h}h^{ab})\partial_b X^{\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
\partial_a\partial_b(\sqrt{h}h^{ab})X^{\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
\partial_a(\sqrt{h}h^{ab})X^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
\partial_a(\sqrt{h}h^{ab})X^{\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}
\end{array}\right\} = 0 \to \mathcal{D}(\sqrt{h}h^{ab}) = 0 \\
\sqrt{h}h^{ab}\partial_a\partial_b X^{\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
\sqrt{h}h^{ab}X^{\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\partial_a\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
\sqrt{h}h^{ab}X^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_a\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \\
\sqrt{h}h^{ab}X^{\dot{\alpha}\alpha}\partial_a\partial_b\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \quad .
\end{array}
\tag{4.31}
$$

Die Terme, welche Ableitungen der Metrik enthalten verschwinden, da die Metrik kovariant-konstant ist. Aus den restlichen Termen ist nun eine unabhängige Basis zu bilden. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} \\
=\ &\underbrace{\partial_b(\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha})}_{tot.\ Abl.} - \sqrt{h}h^{ab}\partial_b\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha} - \sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} \\
=\ &\underbrace{\partial_a(\sqrt{h}h^{ab}X^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha})}_{tot.\ Abl.} - \sqrt{h}h^{ab}X^{\dot\alpha\alpha}\partial_a\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} - \sqrt{h}h^{ab}X^{\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_a\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} \quad .
\end{aligned}
$$

Die Terme (4.31) sind also nicht unabhängig voneinander. Zusätzlich ist noch ein rein bispinorieller Term[7] und ein rein spinorieller Term möglich, wobei der letztere wiederum durch (A.26) weitgehend festgelegt ist.

Als Basis sollen hier die Terme

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}(\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} - \partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) \\
&\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b X_{\alpha\dot\alpha} \\
&\sqrt{h}h^{ab}\partial_a\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_b\theta_\alpha\theta^\alpha
\end{aligned}
$$

gewählt werden.

Die allgemeinste zu konstruierende Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{allg}$ ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{allg} \;=\; & A\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\partial_b X_{\alpha\dot\alpha} \\
&+ B\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}(\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} - \partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) \\
&+ C\sqrt{h}h^{ab}\partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} \quad .
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Deren Variation ist

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{allg} \;=\; & A\sqrt{h}h^{ab}\delta(\partial_a X^{\dot\alpha\alpha})\partial_b X_{\alpha\dot\alpha} + A\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}\delta(\partial_b X_{\alpha\dot\alpha}) \\
&+ B\sqrt{h}h^{ab}\delta(\partial_a X^{\dot\alpha\alpha})(\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} - \partial_b\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) \\
&+ B\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}(\delta\theta_\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha} - \partial_b\theta_\alpha\delta\bar\theta_{\dot\alpha}) \\
&+ \underbrace{B\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^{\dot\alpha\alpha}(\theta_\alpha\partial_b(\delta\bar\theta_{\dot\alpha}) - \partial_b(\delta\theta_\alpha)\bar\theta_{\dot\alpha})}_{=0} \\
&+ C\sqrt{h}h^{ab}\underbrace{\delta(\partial_a\theta_\alpha)}_{=0}\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} + C\sqrt{h}h^{ab}\partial_a\theta_\alpha\delta\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} \\
&+ C\sqrt{h}h^{ab}\partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\underbrace{\delta(\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha})}_{=0}\bar\theta^{\dot\alpha} + C\sqrt{h}h^{ab}\partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\partial_b\bar\theta_{\dot\alpha}\delta\bar\theta^{\dot\alpha} \quad .
\end{aligned}
$$

[7] Im Gegensatz zum WZ-Term ist dieser Term hier möglich, da an die Stelle ϵ^{ab} die Metrik h_{ab} getreten ist und somit dieser Wirkungsbeitrag nicht sofort verschwindet.

Mit (4.4) und $h^{ab} = h^{ba}$ wird aus den nichtverschwindenden Anteilen

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{allg} &= 4A\sqrt{h}h^{ab}(\eta_\alpha\partial_a\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\partial_a\theta_\alpha)\partial_b x^{\dot{\alpha}\alpha} \\
&\quad + B\sqrt{h}h^{ab}\partial_a x^{\dot{\alpha}\alpha}(\eta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \partial_b\theta_\alpha\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}) \\
&\quad + 2B\sqrt{h}h^{ab}(\eta^\alpha\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^\alpha)(\theta_\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \partial_b\theta_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \\
&\quad + C\sqrt{h}h^{ab}\partial_a\theta_\alpha\eta^\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + C\sqrt{h}h^{ab}\partial_a\theta_\alpha\theta^\alpha\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \quad . \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie von h^{ab} verschwindet die Summe der ersten und zweiten Zeile für $4A = -B$. Ausmultiplikation der Klammern in der dritten Zeile ergibt vier Terme. Zwei davon heben die vierte Zeile für $2B = -C$ weg. In den beiden anderen Termen wirken die Ableitungen entweder nur auf Spinoren mit gepunkteten oder ungepunkteten Indizes, wie z.B.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{h}h^{ab}\eta^\alpha\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_\alpha = \sqrt{h}h^{ba}\eta^\alpha\partial_b\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_\alpha \\
= \; & \sqrt{h}h^{ab}\eta^\alpha\partial_a\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_b\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta_\alpha = -\sqrt{h}h^{ab}\eta^\alpha\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta_\alpha \quad ,
\end{aligned}$$

welche also verschwinden.

Für die Wahl $A = 1$ folgt somit $B = -4$ und $C = 8$. Explizites Ausrechnen des Produkts $\Pi_a^{\dot{\alpha}\alpha}\Pi_{\alpha\dot{\alpha},b}$ (4.1) durch Einsetzen von (4.2), ergibt genau diese allgemeinste Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{allg}$.

Die Wirkung $\mathcal{S}_1$ aus (4.1) ist somit die allgemeinste hypersymmetrische Wirkung, was es unmöglich macht, eine andere Wirkung zu konstruieren, die sowohl Hypersymmetrie als auch κ-Symmetrie besitzt.

4.6 Konstruktion einer allgemeinen N=1 κ-symmetrischen String-Wirkung

Die letzten Abschnitte haben gezeigt, daß es nicht möglich ist, einen hypersymmetrischen WZ-Term zu konstruieren. Für die Existenz einer κ-Symmetrie ist dieser jedoch notwendig.

Aus diesem Grund soll in diesem Abschnitt versucht werden, eine allgemeine κ-symmetrische Wirkung zu konstruieren, denn wie bereits erläutert, ist für die Quantisierung der Theorie, in der *Lichtkegel-Eichung* die κ-Symmetrie der Wirkung erforderlich.

Die allgemeinsten Wirkungsbeiträge, der kinetische Teil und der WZ-Teil, sind schon aus den vorherigen Abschnitten bekannt. Es gilt also, die Invarianz der Summe dieser Terme unter κ-Symmetrie zu prüfen.

Es wird sich im folgenden als sinnvoll erweisen, an dieser Stelle zur Vektor-Notation überzugehen. Die κ-Symmetrie-Transformationen schreiben sich dann als (vergl. [1, 14, 16])[8]

$$
\begin{aligned}
\delta\theta &= 2\gamma_\mu \Pi^\mu_a \kappa^a \\
\delta X^\mu &= \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\delta\theta \\
\delta(\sqrt{h}h^{ab}) &= -16\sqrt{h}P^{ac}_-(\bar{\kappa}^b\gamma_5\partial_c\theta) \quad .
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Der verwendete Projektor ist

$$
P^{ac}_- = \frac{1}{2}(h^{ac} - \epsilon^{ac}/\sqrt{h})
\tag{4.35}
$$

(siehe auch (4.10) und (4.11) aus Abschnitt 4.3.1). κ^a ist hier *anti-selbstdual* [9], d.h.

$$
\kappa^a = P^{ab}_-\kappa_b \quad .
$$

Die Wirkung ist also gegeben durch die hypersymmetrisierte Polyakov-Wirkung und den WZ-Term

$$
\mathcal{S} = \frac{1}{\alpha'}\int d^2\sigma\left[\sqrt{h}h^{ab}\Pi^\mu_a\Pi_{\mu,b} + B\epsilon^{ab}\Pi^\mu_a(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta)\right]
\tag{4.36}
$$

mit

$$
\Pi^\mu_a \equiv \partial_a X^\mu - \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\partial_a\theta
\tag{4.37}
$$

und einem beliebigen Koeffizienten B.

Die Variation des kinetischen Terms $\mathcal{L}_{kin} = \sqrt{h}h^{ab}\Pi^\mu_a\Pi_{\mu,b}$ ist

$$
\delta\mathcal{L}_{kin} \quad \propto \quad \delta(\sqrt{h}h^{ab})\Pi^\mu_a\Pi_{\mu,b} + 2\sqrt{h}h^{ab}\Pi^\mu_a\delta\Pi_{\mu,b} \quad .
$$

Für $\delta\Pi_{\mu,b}$ folgt[10]

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi_{\mu,b} &= \partial_b\delta X_\mu - (\delta\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta + \bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\delta\theta) \\
&= \partial_b(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) - (\delta\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta + \bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\delta\theta) \\
&= \partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta + \bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\delta\theta - (\delta\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta + \bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\delta\theta) \\
&= 2\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta \quad .
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

[8] Um den Ausdruck $(\theta_\alpha\partial_a\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_a\theta_\alpha)$ in die Vektorindex-Notation zu übertragen, ist es notwendig, anders als beim GS-String [1], ein zusätzliches γ_5 einzufügen, (siehe Anhang B), welches für die unterschiedlichen Vorzeichen sorgt, denn ein Ausdruck nur mit γ_μ hat aufgrund der *Kommutativität* der Spinoren immer zwei gleiche Vorzeichen (vergl. (4.18)).

[9] Für eine N=2 κ-Symmetrie würde an dieser Stelle zusätzlich zu κ^{a1}, noch ein κ^{a2} existieren. κ^{a2} ist dann *selbstdual* und der dazugehörige Projektor ist P^{ab}_+, definiert in 4.3.1.

[10] Für *kommutierende* Spinoren gilt $\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\phi = -\bar{\phi}\gamma_\mu\gamma_5\theta$ (siehe Anhang B). Für Weyl-Spinoren, die nicht gleichzeitig die Majorana-Bedingung erfüllen, ist $\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\phi$ durch $(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\phi - \bar{\phi}\gamma_\mu\gamma_5\theta)/2$ zu ersetzen.

Mit der Variation von $\sqrt{h}h^{ab}$,

$$\delta(\sqrt{h}h^{ab}) = -16\sqrt{h}P_-^{ac}(\bar{\kappa}^b\gamma_5\partial_c\theta) \quad ,$$

folgt dann für die Variation von $\mathcal{L}_{kin}$

$$\delta\mathcal{L}_{kin} \quad \propto \quad -16\sqrt{h}P_-^{ac}(\bar{\kappa}^b\gamma_5\partial_c\theta)\Pi_a^\mu\Pi_{\mu,b} + 4\sqrt{h}h^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta).$$

Die Variation des WZ-Terms ist

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{WZ} \quad = \quad & B\epsilon^{ab}\delta\Pi_a^\mu(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta) \\ & + B\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\delta\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta) \\ & + B\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\delta\theta) \quad ,\end{aligned}$$

so daß die Variation der gesamten Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} \quad \propto \quad & -16\sqrt{h}P_-^{ac}(\bar{\kappa}^b\gamma_5\partial_c\theta)\Pi_a^\mu\Pi_{\mu,b} \\ & + 4\sqrt{h}h^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \\ & + B\epsilon^{ab}\delta\Pi_a^\mu(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta) \\ & + B\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\delta\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta) \\ & + B\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\delta\theta) \quad .\end{aligned}$$

Partielle Integration des fünften Terms

$$\begin{aligned}\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\delta\theta) \quad = \quad & -\epsilon^{ab}\partial_b\Pi_a^\mu(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \\ & - \epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) + \text{ tot. Abl.} \\ = \quad & -\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\partial_b\theta)(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \\ & - \epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta)\end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} \quad \propto \quad & -16\sqrt{h}P_-^{ac}(\bar{\kappa}^b\gamma_5\partial_c\theta)\Pi_a^\mu\Pi_{\mu,b} \\ & + 4\sqrt{h}h^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \\ & - 2B\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \\ & + B\epsilon^{ab}\delta\Pi_a^\mu(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta) \\ & - B\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\partial_b\theta)(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \quad .\end{aligned}$$

Der zweite und dritte Term lassen sich nun unter Verwendung des Projektors P_-^{ac} für B=2 zu einem Term zusammenfassen

$$\begin{aligned} & +4\sqrt{h}h^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) - 4\epsilon^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \\ = & +8\sqrt{h}P_-^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \quad . \end{aligned}$$

$\delta\mathcal{L}$ wird dann mit $\delta\Pi_{\mu,b} = 2\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta$ zu

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} \quad \propto \quad & -16\sqrt{h}P_-^{ac}(\bar{\kappa}^b\gamma_5\partial_c\theta)\Pi_a^\mu\Pi_{\mu,b} \\ & + 8\sqrt{h}P_-^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \\ & + 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\delta\theta)(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta) \\ & - 2\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\partial_b\theta)(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \quad . \end{aligned} \tag{4.39}$$

Einsetzen der Variation $\delta\theta$ in den zweiten Term ergibt

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} \quad \propto \quad & -16\sqrt{h}P_-^{ac}(\bar{\kappa}^b\gamma_5\partial_c\theta)\Pi_a^\mu\Pi_{\mu,b} \\ & + 4\sqrt{h}P_-^{ab}\Pi_a^\mu(\partial_b\bar{\theta}\gamma_\mu 2\gamma_5\gamma_\nu\Pi_c^\nu\kappa^c) \\ & + 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\delta\theta)(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta) \\ & - 2\epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\partial_b\theta)(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \quad . \end{aligned} \tag{4.40}$$

Durch Umformung des zweiten Terms,

$$\begin{aligned} & -8\sqrt{h}P_-^{ac}(\bar{\kappa}^b\gamma_\nu\Pi_b^\nu\gamma_\mu\Pi_a^\mu\gamma_5\partial_c\theta) \\ = & -8\sqrt{h}P_-^{ac}P_-^{bd}\left(\bar{\kappa}_d\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu\Pi_b^\mu\Pi_a^\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\Pi_b^\nu\Pi_a^\mu)\gamma_5\partial_c\theta\right) \\ = & -8\sqrt{h}P_-^{ac}P_-^{bd}\left(\bar{\kappa}_d\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)\Pi_a^\nu\Pi_b^\mu\gamma_5\partial_c\theta\right) \\ = & -8\sqrt{h}P_-^{ac}P_-^{bd}(\bar{\kappa}_d(-2\eta_{\mu\nu}\Pi_a^\nu\Pi_b^\mu)\gamma_5\partial_c\theta) \\ = & +16\sqrt{h}P_-^{ac}P_-^{bd}\Pi_a^\mu\Pi_{\mu,b}(\bar{\kappa}_d\gamma_5\partial_c\theta) \\ = & +16\sqrt{h}P_-^{ac}\Pi_a^\mu\Pi_{\mu,b}(\bar{\kappa}^b\gamma_5\partial_c\theta) \quad , \end{aligned}$$

zeigt sich unter Verwendung der Symmetrie[11] der Indizes a und b in $P_-^{ac}P_-^{bd} = P_-^{bc}P_-^{ad}$, daß für die Variation der Wirkung unter κ-Symmetrie

[11] Durch Verwendung des Projektors 4.35 und explizites Einsetzen aller möglichen Werte, d.h. $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, läßt sich dieses leicht beweisen.

lediglich

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -2\epsilon^{ab}(\partial_a\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\partial_b\theta)(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \\ &\quad + 4\epsilon^{ab}(\partial_a\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\delta\theta)(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\partial_b\theta) \end{aligned} \tag{4.41}$$

übrig bleibt.

Ausschreiben der ϵ-Komponenten liefert einen Term

$$\begin{aligned} A &\propto -(\bar\theta'\gamma^\mu\gamma_5\dot\theta)(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) + (\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta')(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta) \\ &\quad + 2(\bar\theta'\gamma^\mu\gamma_5\delta\theta)(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\dot\theta) - 2(\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\gamma_5\delta\theta)(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\theta') \\ &\propto +2(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta)(\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta') + 2(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\dot\theta)(\bar\theta'\gamma^\mu\gamma_5\delta\theta) \\ &\quad + 2(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\theta')(\delta\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\dot\theta) \quad . \end{aligned} \tag{4.42}$$

Der Restterm[12] A ist *zyklisch symmetrisch*

$$(\bar\psi_4\gamma_\mu\gamma_5\psi_1)(\bar\psi_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_3) + \text{ zykl. in } (123) \quad ,$$

läßt sich also als total antisymmetrischer Ausdruck in ψ_1, ψ_2 und ψ_3 schreiben

$$\bar\psi_4\gamma_\mu\gamma_5\psi_{[1}\bar\psi_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_{3]} \quad , \tag{4.43}$$

denn aufgrund von $\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\chi = -\bar\chi\gamma_\mu\gamma_5\psi$ für *kommutierende* bzw. $\bar\psi\gamma_\mu\chi = -\bar\chi\gamma_\mu\psi$ für *antikommutierende*[13] (siehe (4.44)) Spinoren, lassen sich in *beiden* Fällen die sechs Permutationen[14] paarweise zu drei zyklischen zusammenfassen.

Die Supersymmetrie des WZ-Terms führt in der Vektor-Notation [14, 16] auf einen entsprechenden Ausdruck ohne γ_5,

$$\bar\psi_4\gamma_\mu\psi_{[1}\bar\psi_2\gamma^\mu\psi_{3]} = 0 \quad , \tag{4.44}$$

von dem unter Verwendung der *Fierz-Identitäten* gezeigt werden kann, daß

[12] Im nächsten Kapitel wird sich zeigen, daß der Restterm der Variation des WZ-Terms unter Hypersymmetrie äquivalent zu A ist, also ein hypersymmetrischer WZ-Term eine κ-Symmetrie impliziert.

[13] Siehe z.B. [8].

[14] Totale Antisymmetrie in 123 ergibt $[123] = 123 + 231 + 312 - 132 - 213 - 321$.

dieser in 3+1 Dimensionen für Majorana- oder Weyl-Spinoren verschwindet[15]. Auch *supersymmetrische Yang-Mills Theorien* beruhen auf dem Verschwinden dieses Ausdrucks [17].

4.7 Schlußfolgerung

Dieses Kapitel hat gezeigt, daß es nicht möglich ist, eine Raumzeit-Stringtheorie in 2+2 Dimensionen, auf der Grundlage von *kommutierenden* Spinoren, so zu formulieren, daß es möglich ist, die Bewegungsgleichungen in der *Lichtkegel-Eichung* zu linearisieren. Die Bewegungsgleichungen sind nichtlinear und machen die kovariante Quantisierung technisch undurchführbar.

Das Scheitern dieser Vorgehensweise liegt im wesentlichen daran, daß es nicht möglich ist, entweder einen *hypersymmetrischen WZ-Term* einzuführen, der eine κ-Symmetrie zur Folge hätte oder anstatt von Hyper- und κ-Symmetrie, nur κ-Symmetrie-Invarianz zu verlangen[16].

Es stellt sich also die Frage, ob der Ausdruck 4.44, wenn nicht in 2+2 Dimensionen, überhaupt in irgendeiner Dimension $p+q$ verschwinden kann und somit dieses Modell in dieser Dimension dann hyper- und(oder) κ-symmetrisch konstruiert werden könnte.

Im nächsten Kapitel wird versucht mit Hilfe der *Fierz-Identitäten* den Ausdruck (4.44) umzuformen und zu prüfen, ob es möglich ist, daß dieser in höheren Dimensionen verschwindet.

[15] Zusätzlich verschwindet der Ausdruck auch in D=3 für Majorana-Spinoren, D=6 für Weyl-Spinoren und in D=10 für Majorana-Weyl-Spinoren, vorausgesetzt, daß nur eine zeitartige Koordinate existiert (siehe[14, 16]).

[16] Siehe S.37 Fußnote 12.

Kapitel 5

Hypersymmetrie in $p+q$ Dimensionen

Kapitel 4 hat gezeigt, daß es nicht möglich ist, in 2+2 Dimensionen eine hyper- und κ-symmetrische String-Wirkung zu konstruieren. Sowohl die Variation des WZ-Terms unter Hypersymmetrie, als auch die Variation der gesamten Wirkung (Kinetischer und WZ-Term) unter κ-Symmetrie ergab einen Restterm, der im Fall des GS-Strings, z.B. in 9+1 Dimensionen, verschwindet [14, 16].

In diesem Kapitel soll untersucht werden, ob es möglich ist, daß diese Terme, von denen zuerst gezeigt wird, daß sie äquivalent sind, in irgendeiner höheren Dimensionen $p+q$ verschwinden können. Wäre dieses der Fall, könnte dann in dieser Dimension versucht werden eine hyper- und κ-symmetrische Wirkung zu konstruieren.

5.1 Die Äquivalenz der Restterme aus Hyper- und κ-Symmetrie

Zunächst ist es notwendig, den Restterm der Variation des WZ-Terms unter Hypersymmetrie in die Vektor-Notation zu übertragen. Die Variation des WZ-Terms aus 4.3.1 war gegeben durch den Ausdruck

$$\delta\mathcal{L}_2 \quad \propto \quad \epsilon^{ab}(\partial_a\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_a\theta^{\alpha})(\theta_{\alpha}\partial_b\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} - \partial_b\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \quad .$$

Mit ausgeschriebenen ϵ-Komponenten wird daraus

$$\delta\mathcal{L}_2 \quad \propto \quad (\bar{\theta}'^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\theta'^{\alpha})(\theta_{\alpha}\dot{\bar{\theta}}_{\dot{\alpha}} - \dot{\theta}_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) - (\dot{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}}\ \eta^{\alpha} - \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\dot{\theta}^{\alpha})(\theta_{\alpha}\bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} - \theta'{}_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \quad .$$

Dieser Ausdruck läßt sich als Summe der Ausdrücke A_1 und A_2,

$$
\begin{aligned}
A_1 \;=\;& \frac{2}{3}\Big[(\bar\theta'^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta'^\alpha)(\theta_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} - \dot\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) - (\dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}\,\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\dot\theta^\alpha) \\
& \times(\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \theta'{}_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) + (\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)(\dot\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \theta'{}_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha})\Big] \\
A_2 \;=\;& \frac{1}{3}\Big[(\bar\theta'^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta'^\alpha)(\theta_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} - \dot\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) - (\dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}\,\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\dot\theta^\alpha) \\
& \times(\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \theta'{}_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) - 2(\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)(\dot\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \theta'{}_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha})\Big] \quad ,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

schreiben. Für A_2 folgt

$$
\begin{aligned}
A_2 \;=\;& \frac{1}{3}\Bigg[-(\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)\frac{\partial}{\partial\sigma}(\theta_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} - \dot\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) + \text{tot. Abl.} \\
& + (\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)\frac{\partial}{\partial\tau}(\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \theta'{}_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha}) - \text{tot. Abl.} \\
& - 2(\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)(\dot\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \theta'{}_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha})\Bigg] \\
=\;& \frac{1}{3}\Bigg[-(\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)(\theta'_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} - \dot\theta'_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha} + \theta_\alpha\dot{\bar\theta}'{}_{\dot\alpha} - \dot\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha}) \\
& + (\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)(\dot\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \dot\theta'{}_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha} + \theta_\alpha\dot{\bar\theta}'{}_{\dot\alpha} - \theta'{}_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}) \\
& - 2(\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)(\dot\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \theta'{}_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}) + (-)\text{tot. Abl.}\Bigg] \\
=\;& \frac{\partial}{\partial\sigma}\Big[(\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)(\theta_\alpha\dot{\bar\theta}_{\dot\alpha} - \dot\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha})\Big] \\
& - \frac{\partial}{\partial\tau}\Big[(\bar\theta^{\dot\alpha}\eta^\alpha - \bar\eta^{\dot\alpha}\theta^\alpha)(\theta_\alpha\bar\theta'_{\dot\alpha} - \theta'_\alpha\bar\theta_{\dot\alpha})\Big] \quad ,
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

welches proportional zu einer totalen Ableitung ist. Es trägt also nur A_1 zur Wirkung bei. In der Vektor-Notation wird daraus

$$
\begin{aligned}
A_1 \;\propto\;& (\bar\eta\gamma_\mu\gamma_5\theta')\cdot(\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\dot\theta) - (\bar\eta\gamma_\mu\gamma_5\dot\theta)\cdot(\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta') \\
& + (\bar\eta\gamma_\mu\gamma_5\theta)\cdot(\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta') \quad .
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Der Restterm der κ-Symmetrie, A, war gegeben durch

$$
\begin{aligned}
A \;\propto\;& (\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\delta\theta)(\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta') + (\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\dot\theta)(\bar\theta'\gamma^\mu\gamma_5\delta\theta) \\
& + (\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\theta')(\delta\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\dot\theta) \\
\propto\;& (\delta\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\theta)(\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta') + (\delta\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta')(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\dot\theta) \\
& - (\delta\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\dot\theta)(\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\theta') \quad .
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Die beiden Restterme sind also bis auf $\bar{\eta}$ und $\delta\bar{\theta}$ gleich. Es handelt sich also lediglich um den Ausdruck

$$\bar{\psi}_4\gamma_\mu\gamma_5\psi_{[1}\bar{\psi}_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_{3]} = 0 \quad , \tag{5.5}$$

welcher für die Existenz von Hyper- und κ-Symmetrie verschwinden muß. Der Unterschied zum GS-String und den supersymmetrischen Yang-Mills-Theorien [16, 17] besteht lediglich im Auftreten von γ_5 und der *Kommutativität* der Spinoren.

In den folgenden Abschnitten soll dieser Ausdruck mit Hilfe von *Fierz-Umordnungen* in Produkte von Γ-Matrizen entwickelt werden, um zu untersuchen, ob es möglich ist, das dieser, wenn nicht in 2+2, in höheren Dimensionen verschwindet.

5.2 Die Fierz-Identitäten

Um den Restterm in Produkte von Γ-Matrizen entwickeln zu können, wird zunächst die nötige Reihen-Entwicklung hergeleitet, die dann im folgenden auf den Restterm in beliebigen Dimensionen angewendet werden kann.

Den Ausgangspunkt bildet die D-dimensionale *Clifford-Algebra*

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu \;=\; -2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1}_d \qquad \mu,\nu = 1,...,D \quad . \tag{5.6}$$

$\mathbb{1}_d$ ist die $2^{[D/2]}$-dimensionale Einheitsmatrix[1]. Unter der Bedingung, daß die raumartigen Richtungen in der Metrik $\eta_{\mu\nu}$ ein $+$ Zeichen und die zeitartigen ein $-$ Zeichen haben, folgt direkt aus der Clifford-Algebra, daß

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = -D \tag{5.7}$$

für jede Signatur (p,q) mit $p+q=D$ gilt. Das Analogon zu γ_5 in $D=4$ ist $\tilde{\gamma}$ definiert als

$$\tilde{\gamma} \equiv -\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_{D-1} \quad . \tag{5.8}$$

Dieses läßt sich durch

$$\tilde{\gamma} \equiv \sigma_3 \otimes \mathbb{1}_d = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_d \end{pmatrix}$$

[1]Da in diesem Kapitel nur *gerade* Dimensionen betrachtet werden, kann die Klammer [.], die die Richtigkeit des Ausdrucks auch für ungerade Dimensionen gewährleistet, auch weggelassen werden.

explizit berechnen[2].

Durch wiederholtes Multiplizieren der γ-Matrizen[3] erhält man einen Satz von 2^D unabhängigen $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ Matrizen[4], diese sind

$$\Gamma_a : \mathbb{1}, \gamma_{a_1}, \gamma_{a_1 a_2}, \gamma_{a_1 a_2 a_3}, \ldots \quad . \tag{5.9}$$

Aufgrund der Clifford-Algebra sind die Matrizen Γ_a antisymmetrisch in den Indizes $a_1 \ldots a_n$, so daß diese geschrieben werden können als,

$$\gamma_{a_1 \ldots a_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{Permutationen \\ [a_1 \ldots a_n]}} (-1)^P \gamma_{a_1} \gamma_{a_2} \cdots \gamma_{a_n} \quad . \tag{5.10}$$

Jede $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ Matrix M_{ij} läßt sich dann in eine Reihe von Matrizen Γ_a

$$M_{ij} = \sum_{n=0}^{D} A^{a_1 \ldots a_n} (\gamma_{a_1 \ldots a_n})_{ij} \tag{5.11}$$

entwickeln. Die Koeffizienten[5] $A^{a_1 \ldots a_n}$ bestimmen sich durch

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma^{b_1 \ldots b_m} \cdot M) &= \sum_{n=0}^{D} A^{a_1 \ldots a_n} \underbrace{Tr(\gamma^{b_1 .. b_m} \gamma_{a_1 .. a_n})}_{=0 \ m \neq n} \\
&= A^{a_1 \ldots a_n} \, Tr(\gamma^{b_1 .. b_n} \gamma_{a_1 .. a_n}) \\
&= A^{a_1 \ldots a_n} \, n! \, \delta^{b_1}_{a_n} \ldots \delta^{b_n}_{a_1} \, Tr(\underbrace{\gamma^{b_1 .. b_n} \gamma_{b_n .. b_1}}_{keineSummation}) \\
&= A^{b_n \ldots b_1} \, n! \, Tr(\underbrace{\gamma^{b_1} \gamma_{b_1} \cdot \ldots \cdot \gamma^{b_n} \gamma_{b_n}}_{keineSummation}) \\
&= A^{b_n \ldots b_1} \, n! \, Tr((-1)^n) \\
&= A^{b_n \ldots b_1} \, (-1)^n \, n! \, Tr(\mathbb{1}) \\
&= A^{b_n \ldots b_1} \, (-1)^n \, n! \, 2^{\frac{D}{2}} \quad .
\end{aligned}$$

---

[2] Eine explizite Konstruktion der γ-Matrizen in D-Dimensionen findet sich z.B. in [18].

[3] Die Multiplikation bezieht sich auf ungleiche γ-Matrizen. Sind zwei γ-Matrizen gleich ist dieses Produkt aufgrund der Clifford-Algebra (5.6) proportional zur Einheitsmatrix.

[4] Für gerade Dimensionen D.

[5] Außer der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ sind alle Matrizen Γ_a spurlos, daher verschwindet die Spur nur nicht, wenn der Ausdruck $\gamma^{b_1 .. b_m} \gamma_{a_1 .. a_n}$ proportional zur Einheitsmatrix, also m=n, ist.

Damit folgt also (vergl. [13])[6]

$$M_{ij} = 2^{-D/2} \sum_{n=0}^{D} (-1)^n \frac{1}{n!}\, Tr(\gamma^{a_n \dots a_1} \cdot M)(\gamma_{a_1 \dots a_n})_{ij} \qquad D \text{ gerade} \quad . \quad (5.12)$$

Unter Verwendung dieser Vollständigkeitsrelation ist es nun möglich, die Spinoren in Ausdrücken der Form $(\bar{\theta}\Gamma_a\chi)(\bar{\xi}\Gamma_b\phi)$ umzuordnen. Für gerade Dimensionen D folgt aus (5.12)

$$(\bar{\theta}\Gamma_a\chi)(\bar{\xi}\Gamma_b\phi) \;=\; 2^{-D/2} \sum_{n=0}^{D} (-1)^n \frac{1}{n!} (\bar{\theta}\Gamma_a \gamma^{a_n \dots a_1} \Gamma_b \phi)(\bar{\xi}\gamma_{a_1 \dots a_n}\chi), \quad (5.13)$$

die sogenannte *Fierz-Identität*, welche den Ausgangspunkt für die Untersuchung des Restterms in beliebigen Dimensionen $p+q$ bildet[7].

5.2.1 Umordnung des Restterms in D=4

In 2+2 Dimensionen war der Restterm gegeben durch

$$A \;=\; (\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\dot{\theta}) - (\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\dot{\theta})(\bar{\theta}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta') + (\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\theta)(\bar{\dot{\theta}}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta') \quad .$$

Eine Vereinfachung dieses Ausdruck läßt sich durch Entwicklung des zweiten und dritten Terms erreichen, denn dann stehen die Spinoren θ, θ' und $\dot{\theta}$ in der gleichen Reihenfolge, wie im ersten Term[8]. Die Entwicklung des zweiten Terms ergibt mit (5.13)

$$\begin{aligned}
(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\dot{\theta})(\bar{\theta}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta') \;=\;& \frac{1}{4}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\dot{\theta}) \\
& - \frac{1}{4}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{8}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_2 a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1 a_2}\dot{\theta}) \\
& - \frac{1}{24}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_3 a_2 a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1 a_2 a_3}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{96}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_4 \dots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1 \dots a_4}\dot{\theta}) \;. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

---

[6] Der zusätzliche Faktor $(-1)^n$ beruht auf dem $-$ Zeichen auf der rechten Seite der Clifford-Algebra (5.6).

[7] Für *antikommutierende* Spinoren enthält die Entwicklung ein zusätzliches $-$ Zeichen, denn bei der Herleitung von (5.13) müssen die Spinoren einmal vertauscht werden.

[8] Zunächst trifft diese Aussage lediglich auf die erste Klammer der drei Summanden zu, doch durch Vertauschen der Spinoren in der zweiten Klammer lassen sich dann alle drei Terme, unter Berücksichtigung von eventuellen Vorzeichen, addieren.

Unter Verwendung von

$$\gamma_\mu \Gamma_a \gamma^\mu = (-1)^{k+1}(D-2k)\Gamma_a \quad , \tag{5.15}$$

welches aus der Clifford-Algebra (5.6) folgt, wird daraus

$$\begin{aligned}
(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') &= (\bar\eta\theta')(\bar\theta\dot\theta) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\bar\eta\gamma_{a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1}\dot\theta) \\
&\quad + \frac{1}{12}(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot\theta) \\
&\quad - \frac{1}{24}(\bar\eta\gamma_{a_4\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_2}\dot\theta) \quad .
\end{aligned}$$

Aufgrund von $D-2k=0$ für $D=4$ und $k=2$ verschwindet hier der Term mit $\gamma_{a_2 a_1}$. Analog folgt für den dritten Term

$$\begin{aligned}
(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\theta)(\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') &= (\bar\eta\theta')(\dot{\bar\theta}\theta) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\bar\eta\gamma_{a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1}\theta) \\
&\quad + \frac{1}{12}(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_3}\theta) \\
&\quad - \frac{1}{24}(\bar\eta\gamma_{a_4\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_4}\theta) \quad .
\end{aligned}$$

Aus der Clifford-Algebra (5.6) folgt (vergl. [1, 15, 16])

$$\gamma_{a_1\ldots a_n} = \pm\frac{1}{(D-n)!}\;\epsilon_{a_1\ldots a_D}\gamma^{a_{n+1}\ldots a_D}\tilde\gamma \quad , \tag{5.16}$$

für beliebige Dimensionen D. In 2+2 Dimensionen folgt daraus

$$\begin{aligned}
\epsilon_{a_1 a_2\ldots a_4} &= (-1)^2\epsilon^{a_1 a_2\ldots a_4} \qquad \epsilon_{0123}=1 \\
\epsilon_{a_1\ldots a_4}\epsilon^{a_1\ldots a_4} &= 4! \\
\epsilon_{a_1 a_2\ldots a_4}\epsilon^{b_1 a_2\ldots a_4} &= 3!\;\delta^{b_1}_{a_1} \\
\gamma_{a_1\ldots a_4} &= -\epsilon_{a_1\ldots a_4}\tilde\gamma \\
\gamma_{a_1\ldots a_3} &= -\epsilon_{a_1\ldots a_3 a_4}\gamma^{a_4}\tilde\gamma \quad .
\end{aligned}$$

Die Addition des ersten Terms und der Entwicklungen des zweiten und dritten

Terms ergibt dann

$$\begin{aligned}
A \;=\;& (\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\dot\theta)\\
&-(\bar\eta\theta')\underbrace{(\bar\theta\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\theta)}+(\bar\eta\theta')(\dot{\bar\theta}\theta)\\
&+\frac{1}{2}\big[(\bar\eta\gamma_\nu\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma^\nu\dot\theta)}_{=(\dot{\bar\theta}\gamma^\nu\theta)}-(\bar\eta\gamma_\nu\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^\nu\theta)\big]\\
&-\frac{1}{12}\underbrace{\epsilon^{a_1\ldots a_3 b_4}\epsilon_{a_3\ldots a_1 c_4}}_{=(-1)^9\;3!\;\delta^{b_4}_{c_4}}\big[(\bar\eta\gamma^{c_4}\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma_{b_4}\tilde\gamma\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\gamma_{b_4}\tilde\gamma\theta)}\\
&-(\bar\eta\gamma^{c_4}\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma_{b_4}\tilde\gamma\theta)\big]\\
&+\frac{1}{24}\underbrace{\epsilon_{a_4\ldots a_1}\epsilon^{a_1\ldots a_4}}_{=(-1)^6\;4!}\big[(\bar\eta\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\tilde\gamma\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\tilde\gamma\theta)}-(\bar\eta\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\tilde\gamma\theta)\big] \quad .
\end{aligned}$$

Es bleibt

$$A \;=\; 2(\bar\eta\gamma_{a_1}\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1}\tilde\gamma\dot\theta)+2(\bar\eta\theta')(\dot{\bar\theta}\theta)-2(\bar\eta\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\tilde\gamma\theta) \quad . \tag{5.17}$$

A verschwindet also für D=4 mit Signatur $(2,2)$ nicht.

Bemerkt sei an dieser Stelle, daß das Übertragen des Terms A in die Spinor-Notation einen Ausdruck ergibt, der gleich dem Ausdruck A_1 aus (5.1) ist, wenn dieser durch partielle Integration auf seine einfachste Form gebracht wird. Weiterhin läßt sich zeigen, daß für 3+1 Dimensionen und *antikommutierende* Spinoren, die analoge Entwicklung des Restterm, dann ohne $\tilde\gamma$, verschwindet.

5.2.2 Umordnung des Restterms in D=6

In diesem Abschnitt soll der Restterm auf sein Verschwinden in D=6 überprüft werden. Um wie in 2+2 Dimensionen Majorana-Weyl-Spinoren wählen zu können und somit keine zusätzlichen Faktoren i zu bekommen, wird die Signatur als $(3,3)$ gewählt[9]. Es kann also ganz analog zum letzten Abschnitt vorgegangen werden, der Unterschied liegt lediglich in der Dimension der Spinoren und der γ-Matrizen.

Der Restterm ist

$$A \;=\; (\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\dot\theta)-(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')+(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\theta)(\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') \quad .$$

[9] Majorana-Weyl-Spinoren sind für $p-q=0$ mod.8 möglich.

In D=6 ergibt die Entwicklung des zweiten Terms unter Benutzung von (5.13)

$$\begin{aligned}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') \; = \; & \frac{1}{8}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\dot\theta) \\ & -\frac{1}{8}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1}\dot\theta) \\ & +\frac{1}{16}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_2a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1a_2}\dot\theta) \\ & -\frac{1}{48}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_3\dots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\dots a_2}\dot\theta) \\ & +\frac{1}{8\cdot 4!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_4\dots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\dots a_4}\dot\theta) \\ & -\frac{1}{8\cdot 5!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_5\dots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\dots a_5}\dot\theta) \\ & +\frac{1}{8\cdot 6!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_6\dots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\dots a_6}\dot\theta) \quad . \end{aligned} \tag{5.18}$$

Dieses vereinfacht sich mit (5.15) zu

$$\begin{aligned}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') \; = \; & \frac{6}{8}(\bar\eta\theta')(\bar\theta\dot\theta) \\ & -\frac{1}{2}(\bar\eta\gamma_{a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1}\dot\theta) \\ & +\frac{1}{8}(\bar\eta\gamma_{a_2a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1a_2}\dot\theta) \\ & -\frac{1}{4\cdot 4!}(\bar\eta\gamma_{a_4\dots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\dots a_4}\dot\theta) \\ & +\frac{1}{2\cdot 5!}(\bar\eta\gamma_{a_5\dots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\dots a_5}\dot\theta) \\ & -\frac{6}{8\cdot 6!}(\bar\eta\gamma_{a_6\dots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\dots a_6}\dot\theta) \quad , \end{aligned}$$

wobei der Term mit $\Gamma_a = \gamma_{a_3a_2a_1}$ wegen $D-2k=0$ verschwindet. Der dritte Term folgt analog als

$$\begin{aligned}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\theta)(\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') \; = \; & \frac{6}{8}(\bar\eta\theta')(\dot{\bar\theta}\theta) \\ & -\frac{1}{2}(\bar\eta\gamma_{a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1}\theta) \\ & +\frac{1}{8}(\bar\eta\gamma_{a_2a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1a_2}\theta) \\ & -\frac{1}{4\cdot 4!}(\bar\eta\gamma_{a_4\dots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\dots a_4}\theta) \\ & +\frac{1}{2\cdot 5!}(\bar\eta\gamma_{a_5\dots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\dots a_5}\theta) \\ & -\frac{6}{8\cdot 6!}(\bar\eta\gamma_{a_6\dots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\dots a_6}\theta) \quad . \end{aligned}$$

In 3+3 Dimensionen gilt

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_6} &= (-1)^3 \epsilon^{a_1 a_2 \ldots a_6}, \quad \epsilon_{012345} = 1 \\
\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_6} \epsilon^{a_1 a_2 \ldots a_6} &= 6! \\
\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_6} \epsilon^{b_1 a_2 \ldots a_6} &= 5! \, \delta^{b_1}_{a_1} \\
\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_6} \epsilon^{b_1 b_2 a_3 \ldots a_6} &= 4! \, \delta^{b_1}_{a_1} \delta^{b_2}_{a_2} \\
\gamma_{a_1 \ldots a_6} &= -\epsilon_{a_1 \ldots a_6} \tilde{\gamma} \\
\gamma_{a_1 \ldots a_5} &= -\epsilon_{a_1 \ldots a_6} \gamma^{a_6} \tilde{\gamma} \\
\gamma_{a_1 \ldots a_4} &= +\frac{1}{2} \epsilon_{a_1 \ldots a_5 a_6} \gamma^{a_5 a_6} \tilde{\gamma} \quad .
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung dieser Identitäten wird A zu

$$
\begin{aligned}
A = \; & (\bar{\eta}\gamma_\mu \tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^\mu \tilde{\gamma}\dot{\theta}) \\
& - \frac{6}{8}\big[(\bar{\eta}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\dot{\theta})}_{=-(\bar{\dot{\theta}}\theta)} - (\bar{\eta}\theta')(\bar{\dot{\theta}}\theta)\big] \\
& + \frac{1}{2}\big[(\bar{\eta}\gamma_{a_1}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1}\dot{\theta})}_{=(\bar{\dot{\theta}}\gamma^{a_1}\theta)} - (\bar{\eta}\gamma_{a_1}\theta')(\bar{\dot{\theta}}\gamma^{a_1}\theta)\big] \\
& - \frac{1}{8}\big[(\bar{\eta}\gamma_{a_2 a_1}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1 a_2}\dot{\theta})}_{=(\bar{\dot{\theta}}\gamma^{a_1 a_2}\theta)} - (\bar{\eta}\gamma_{a_2 a_1}\theta')(\bar{\dot{\theta}}\gamma^{a_1 a_2}\theta)\big] \\
& + \frac{1}{16 \cdot 4!} \underbrace{\epsilon_{a_4 \ldots a_1 a_6 a_5} \epsilon^{a_1 \ldots a_4 b_5 b_6}}_{(-1)^{23} \; 4! \; \delta^{b_5}_{a_5} \delta^{b_6}_{a_6}} \big[(\bar{\eta}\gamma^{a_6 a_5}\tilde{\gamma}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma_{b_5 b_6}\tilde{\gamma}\dot{\theta})}_{=(\bar{\dot{\theta}}\gamma_{b_5 b_6}\tilde{\gamma}\theta)} \\
& - (\bar{\eta}\gamma^{a_6 a_5}\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\dot{\theta}}\gamma_{b_5 b_6}\tilde{\gamma}\theta)\big] \\
& - \frac{1}{2 \cdot 5!} \underbrace{\epsilon_{a_5 \ldots a_1 a_6} \epsilon^{a_1 \ldots a_5 b_6}}_{(-1)^{20} 5! \; \delta^{b_6}_{a_6}} \big[(\bar{\eta}\gamma^{a_6}\tilde{\gamma}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma_{b_6}\tilde{\gamma}\dot{\theta})}_{=-(\bar{\dot{\theta}}\gamma_{b_6}\tilde{\gamma}\theta)} \\
& - (\bar{\eta}\gamma^{a_6}\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\dot{\theta}}\gamma_{b_6}\tilde{\gamma}\theta)\big] \\
& + \frac{1}{8 \cdot 5!} \underbrace{\epsilon_{a_1 \ldots a_6} \epsilon^{a_6 \ldots a_1}}_{(-1)^{15} \; 6!} \big[(\bar{\eta}\tilde{\gamma}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\tilde{\gamma}\dot{\theta})}_{=-(\bar{\dot{\theta}}\tilde{\gamma}\theta)} - (\bar{\eta}\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\dot{\theta}}\tilde{\gamma}\theta)\big] \quad ,
\end{aligned}
$$

so daß der Restterm sich zu

$$
A = -\frac{3}{2}(\bar{\eta}\theta')(\bar{\theta}\dot{\theta}) - \frac{3}{2}(\bar{\eta}\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\tilde{\gamma}\dot{\theta}) \tag{5.19}
$$

vereinfacht, denn die dritte, vierte und fünfte Zeile verschwinden getrennt und die erste und sechste Zeile heben sich auf. A verschwindet in D=6 jedoch auch nicht.

5.2.3 Umordnung des Restterms in D=8

Wie schon in den vorherigen Abschnitten soll die Entwicklung auf 4+4 Dimensionen beschränkt werden, damit es möglich ist, Majorana-Weyl-Spinoren zu verwenden. Die Entwicklung ergibt für den zweiten Term[10]

$$
\begin{aligned}
(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') = {} & \frac{1}{16}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\dot\theta) \\
& - \frac{1}{16}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1}\dot\theta) \\
& + \frac{1}{32}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_2a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1a_2}\dot\theta) \\
& - \frac{1}{16\cdot 3!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_3\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot\theta) \\
& + \frac{1}{16\cdot 4!}(\bar\eta\underbrace{\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_4\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma}_{=0\ \Leftarrow\ (D-2k)=0}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_4}\dot\theta) \\
& - \frac{1}{16\cdot 5!}(\bar\eta\gamma_\mu\gamma\gamma_{a_5\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_5}\dot\theta) \\
& + \frac{1}{16\cdot 6!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_6\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_6}\dot\theta) \\
& - \frac{1}{16\cdot 7!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_7\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_7}\dot\theta) \\
& + \frac{1}{16\cdot 8!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_8\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_8}\dot\theta) \quad .
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Mit (5.15) wird daraus

$$
\begin{aligned}
(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') = {} & \frac{8}{16}(\bar\eta\theta')(\bar\theta\dot\theta) \\
& - \frac{6}{16}(\bar\eta\gamma_\nu\theta')(\bar\theta\gamma^\nu\dot\theta) \\
& + \frac{4}{32}(\bar\eta\gamma_{a_2a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1a_2}\dot\theta) \\
& - \frac{2}{16\cdot 3!}(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot\theta) \\
& + \frac{2}{16\cdot 5!}(\bar\eta\gamma_{a_5\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_5}\dot\theta) \\
& - \frac{4}{16\cdot 6!}(\bar\eta\gamma_{a_6\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_6}\dot\theta) \\
& + \frac{6}{16\cdot 7!}(\bar\eta\gamma_{a_7\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_7}\dot\theta) \\
& - \frac{8}{16\cdot 8!}(\bar\eta\gamma_{a_8\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_8}\dot\theta)
\end{aligned}
$$

[10]Der Restterm A ist für 4, 6, 8,...,12 Dimensionen der gleiche, lediglich die Dimension der Spinoren und γ-Matrizen ändern sich.

sowie für den dritten Term

$$
\begin{aligned}
(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') \quad = \quad & \frac{8}{16}(\bar\eta\theta')(\dot{\bar\theta}\theta) \\
& - \frac{6}{16}(\bar\eta\gamma_\nu\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^\nu\theta) \\
& + \frac{4}{32}(\bar\eta\gamma_{a_2a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1a_2}\theta) \\
& - \frac{2}{16\cdot 3!}(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_3}\theta) \\
& + \frac{2}{16\cdot 5!}(\bar\eta\gamma_{a_5\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_5}\theta) \\
& - \frac{4}{16\cdot 6!}(\bar\eta\gamma_{a_6\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_6}\theta) \\
& + \frac{6}{16\cdot 7!}(\bar\eta\gamma_{a_7\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_7}\theta) \\
& - \frac{8}{16\cdot 8!}(\bar\eta\gamma_{a_8\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_8}\theta) \quad .
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{a_1a_2\ldots a_8} &= (-1)^4\epsilon^{a_1a_2\ldots a_8}, \quad \epsilon_{012\ldots 7} = 1 \\
\epsilon_{a_1a_2\ldots a_8}\epsilon^{a_1a_2\ldots a_8} &= 8! \\
\epsilon_{a_1a_2\ldots a_8}\epsilon^{b_1a_2\ldots a_8} &= 7!\ \delta^{b_1}_{a_1} \\
\epsilon_{a_1a_2\ldots a_8}\epsilon^{b_1b_2a_3\ldots a_8} &= 6!\ \delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2} \\
\gamma_{a_1\ldots a_8} &= -\epsilon_{a_1\ldots a_8}\tilde\gamma \\
\gamma_{a_1\ldots a_7} &= -\epsilon_{a_1\ldots a_8}\gamma^{a_8}\tilde\gamma \\
\gamma_{a_1\ldots a_6} &= +\frac{1}{2}\epsilon_{a_1\ldots a_7a_8}\gamma^{a_7a_8}\tilde\gamma \\
\gamma_{a_1\ldots a_5} &= +\frac{1}{3!}\epsilon_{a_1\ldots a_6a_7a_8}\gamma^{a_6a_7a_8}\tilde\gamma
\end{aligned}
$$

wird dann aus der Summe der drei Terme

$$
\begin{aligned}
A = & (\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\dot\theta) \\
& - \frac{8}{16}\big[(\bar\eta\theta')\underbrace{(\bar\theta\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\theta)} - (\bar\eta\theta')(\dot{\bar\theta}\theta)\big] \\
& + \frac{6}{16}\big[(\bar\eta\gamma_\nu\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma^\nu\dot\theta)}_{=(\dot{\bar\theta}\gamma^\nu\theta)} - (\bar\eta\gamma_\nu\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^\nu\theta)\big] \\
& - \frac{4}{32}\big[(\bar\eta\gamma_{a_2a_1}\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma^{a_1a_2}\dot\theta)}_{=(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1a_2}\theta)} - (\bar\eta\gamma_{a_2a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1a_2}\theta)\big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{2}{16\cdot 3!}\big[(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_3}\theta)} -(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_3}\theta)\big] \\
&- \frac{2}{16\cdot 5!\cdot(3!)^2}\underbrace{\epsilon_{a_5\ldots a_1c_8c_7c_6}\epsilon^{a_1\ldots a_8}}_{(-1)^{43}\ 5!\ \delta^{a_8}_{c_8}\delta^{a_7}_{c_7}\delta^{a_6}_{c_6}}\big[(\bar\eta\gamma^{c_8c_7c_6}\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma_{a_6a_7a_8}\tilde\gamma\dot\theta)}_{=(\dot{\bar\theta}\gamma_{a_6a_7a_8}\tilde\gamma\theta)} \\
&- (\bar\eta\gamma^{c_8c_7c_6}\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma_{a_6a_7a_8}\tilde\gamma\theta)\big] \\
&+ \frac{4}{16\cdot 6!\cdot(2!)^2}\underbrace{\epsilon_{a_6\ldots a_1c_8c_7}\epsilon^{a_1\ldots a_8}}_{(-1)^{40}\ 6!\ \delta^{a_8}_{c_8}\delta^{a_7}_{c_7}}\big[(\bar\eta\gamma^{c_8c_7}\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma_{a_7a_8}\tilde\gamma\dot\theta)}_{=(\dot{\bar\theta}\gamma_{a_7a_8}\tilde\gamma\theta)} \\
&- (\bar\eta\gamma^{c_8c_7}\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma_{a_7a_8}\tilde\gamma\theta)\big] \\
&- \frac{6}{16\cdot 7!}\underbrace{\epsilon_{a_7\ldots a_1c_8}\epsilon^{a_1\ldots a_8}}_{(-1)^{35}\ 7!\ \delta^{a_8}_{c_8}}\big[(\bar\eta\gamma^{c_8}\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma_{a_8}\tilde\gamma\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\gamma_{a_8}\tilde\gamma\theta)} -(\bar\eta\gamma^{c_8}\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma_{a_8}\tilde\gamma\theta)\big] \\
&+ \frac{8}{16\cdot 8!}\underbrace{\epsilon_{a_8\ldots a_1}\epsilon^{a_1\ldots a_8}}_{(-1)^{28}\ 8!}\big[(\bar\eta\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\tilde\gamma\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\tilde\gamma\theta)} -(\bar\eta\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\tilde\gamma\theta)\big] \quad ,
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
A =& -(\bar\eta\theta')(\bar\theta\dot\theta) + (\bar\eta\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\tilde\gamma\dot\theta) + \frac{7}{4}(\bar\eta\gamma^{a_1}\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma_{a_1}\tilde\gamma\dot\theta) \\
&+ \frac{1}{24}(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot\theta) \quad .
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

A verschwindet also auch in D=8 mit Signatur $(4,4)$ nicht.

5.2.4 Umordnung des Restterms in D=10

Wie in den vorherigen Abschnitten ist es möglich, für die Signatur $(9,1)$ Majorana-Weyl-Spinoren zu wählen. Die Entwicklung des zweiten Terms ergibt

$$
\begin{aligned}
(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') =& \frac{1}{32}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\dot\theta) \\
&- \frac{1}{32}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\tilde\gamma^{a_1}\dot\theta) \\
&+ \frac{1}{32\cdot 2!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_2a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1a_2}\dot\theta) \\
&- \frac{1}{32\cdot 3!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_3\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{32\cdot 4!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_4\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_4}\dot\theta)\\
&-\frac{1}{32\cdot 5!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_5\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_5}\dot\theta)\\
&+\frac{1}{32\cdot 6!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_6\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_6}\dot\theta)\\
&-\frac{1}{32\cdot 7!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_7\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_7}\dot\theta)\\
&+\frac{1}{32\cdot 8!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_8\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_8}\dot\theta)\\
&-\frac{1}{32\cdot 9!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_9\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_9}\dot\theta)\\
&+\frac{1}{32\cdot 10!}(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\gamma_{a_{10}\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_{10}}\dot\theta) \quad . \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

Dieses vereinfacht sich mit (5.15) zu

$$
\begin{aligned}
(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') \; = \; &\frac{10}{32}(\bar\eta\theta')(\bar\theta\dot\theta)\\
&-\frac{8}{32}(\bar\eta\gamma_{a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1}\dot\theta)\\
&+\frac{6}{32\cdot 2!}(\bar\eta\gamma_{a_2a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1a_2}\dot\theta)\\
&-\frac{4}{32\cdot 3!}(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot\theta)\\
&+\frac{2}{32\cdot 4!}(\bar\eta\gamma_{a_4\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_4}\dot\theta)\\
&-\frac{2}{32\cdot 6!}(\bar\eta\gamma_{a_6\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_6}\dot\theta)\\
&+\frac{4}{32\cdot 7!}(\bar\eta\gamma_{a_7\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_7}\dot\theta)\\
&-\frac{6}{32\cdot 8!}(\bar\eta\gamma_{a_8\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_8}\dot\theta)\\
&+\frac{8}{32\cdot 9!}(\bar\eta\gamma_{a_9\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_9}\dot\theta)\\
&-\frac{10}{32\cdot 10!}(\bar\eta\gamma_{a_{10}\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_{10}}\dot\theta) \quad .
\end{aligned}
$$

Die Entwicklung des dritten Terms ergibt

$$
\begin{aligned}
(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\dot\theta)(\bar\theta\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') \; = \; &\frac{10}{32}(\bar\eta\theta')(\dot{\bar\theta}\theta)\\
&-\frac{8}{32}(\bar\eta\gamma_{a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1}\theta)\\
&+\frac{6}{32\cdot 2!}(\bar\eta\gamma_{a_2a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1a_2}\theta)\\
&-\frac{4}{32\cdot 3!}(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_3}\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2}{32\cdot 4!}(\bar{\eta}\gamma_{a_4\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1\ldots a_4}\theta)\\
&-\frac{2}{32\cdot 6!}(\bar{\eta}\gamma_{a_6\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1\ldots a_6}\theta)\\
&+\frac{4}{32\cdot 7!}(\bar{\eta}\gamma_{a_7\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1\ldots a_7}\theta)\\
&-\frac{6}{32\cdot 8!}(\bar{\eta}\gamma_{a_8\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1\ldots a_8}\theta)\\
&+\frac{8}{32\cdot 9!}(\bar{\eta}\gamma_{a_9\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1\ldots a_9}\theta)\\
&-\frac{10}{32\cdot 10!}(\bar{\eta}\gamma_{a_{10}\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1\ldots a_{10}}\theta) \quad .
\end{aligned}
$$

Analog zu den vorherigen Abschnitten gelten in $(9,1)$ Dimensionen die Identitäten

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{a_1 a_2\ldots a_{10}} &= -\epsilon^{a_1 a_2\ldots a_{10}}, \quad \epsilon_{012\ldots 9}=1\\
\epsilon_{a_1 a_2\ldots a_{10}}\epsilon^{a_1 a_2\ldots a_{10}} &= 10!\\
\epsilon_{a_1 a_2\ldots a_{10}}\epsilon^{b_1 a_2\ldots a_{10}} &= 9!\,\delta^{b_1}_{a_1}\\
\epsilon_{a_1 a_2\ldots a_{10}}\epsilon^{b_1 b_2 a_3\ldots a_{10}} &= 8!\,\delta^{b_1}_{a_1}\delta^{b_2}_{a_2}\\
\gamma_{a_1\ldots a_{10}} &= -\epsilon_{a_1\ldots a_{10}}\tilde{\gamma}\\
\gamma_{a_1\ldots a_9} &= -\epsilon_{a_1\ldots a_{10}}\gamma^{a_{10}}\tilde{\gamma}\\
\gamma_{a_1\ldots a_8} &= +\frac{1}{2}\epsilon_{a_1\ldots a_9 a_{10}}\gamma^{a_9 a_{10}}\tilde{\gamma}\\
\gamma_{a_1\ldots a_7} &= +\frac{1}{3!}\epsilon_{a_1\ldots a_8 a_9 a_{10}}\gamma^{a_8 a_9 a_{10}}\tilde{\gamma}\\
\gamma_{a_1\ldots a_6} &= -\frac{1}{4!}\epsilon_{a_1\ldots a_7 a_8 a_9 a_{10}}\gamma^{a_7 a_8 a_9 a_{10}}\tilde{\gamma} \quad .
\end{aligned}
$$

Damit wird A zu

$$
\begin{aligned}
A \;=\;& (\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\dot{\theta})\\
&-\frac{10}{32}\Big[(\bar{\eta}\theta')\underbrace{(\bar{\theta}\dot{\theta})}_{=-(\dot{\bar{\theta}}\theta)}-(\bar{\eta}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\theta)\Big]\\
&+\frac{8}{32}\Big[(\bar{\eta}\gamma_{a_1}\theta')\underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1}\dot{\theta})}_{=(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1}\theta)}-(\bar{\eta}\gamma_{a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1}\theta)\Big]\\
&-\frac{6}{32\cdot 2!}\Big[(\bar{\eta}\gamma_{a_2 a_1}\theta')\underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1 a_2}\dot{\theta})}_{=(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 a_2}\theta)}-(\bar{\eta}\gamma_{a_2 a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 a_2}\theta)\Big]\\
&+\frac{4}{32\cdot 3!}\Big[(\bar{\eta}\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')\underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot{\theta})}_{=-(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1\cdots a_3}\theta)}-(\bar{\eta}\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1\ldots a_3}\theta)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \frac{2}{32\cdot 4!}\big[(\bar\eta\gamma_{a_4\ldots a_1}\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_4}\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\cdots a_4}\theta)} - (\bar\eta\gamma_{a_4\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_4}\theta)\big] \\
& + \frac{2}{32\cdot(4!)^2\cdot 6!}\underbrace{\epsilon_{a_6\ldots a_1 a_{10}\ldots a_7}\epsilon^{a_1\ldots a_6 c_7\ldots c_{10}}}_{(-1)^{69}\ 6!\ \delta^{c_{10}}_{a_{10}}\delta^{c_9}_{a_9}\delta^{c_8}_{a_8}\delta^{c_7}_{a_7}}\big[(\bar\eta\gamma^{a_{10}\ldots a_7}\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma_{c_7\ldots c_{10}}\tilde\gamma\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\gamma_{c_7\cdots c_{10}}\tilde\gamma\theta)} \\
& - (\bar\eta\gamma^{a_{10}\ldots a_7}\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma_{a_7\ldots a_{10}}\tilde\gamma\theta)\big] \\
& - \frac{4}{32\cdot(3!)^2\cdot 7!}\underbrace{\epsilon_{a_7\ldots a_1 a_{10}a_9a_8}\epsilon^{a_1\ldots a_7 c_8 c_9 c_{10}}}_{(-1)^{66}\ 7!\ \delta^{c_{10}}_{a_{10}}\delta^{c_9}_{a_9}\delta^{c_8}_{a_8}}\big[(\bar\eta\gamma^{a_{10}a_9a_8}\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma_{c_8c_9c_{10}}\tilde\gamma\dot\theta)}_{=(\dot{\bar\theta}\gamma_{c_8c_9c_{10}}\tilde\gamma\theta)} \\
& - (\bar\eta\gamma^{a_{10}a_9a_8}\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma_{c_8c_9c_{10}}\tilde\gamma\theta)\big] \\
& + \frac{6}{96\cdot 8!}\underbrace{\epsilon_{a_8\ldots a_1 a_{10}a_9}\epsilon^{a_1\ldots a_8 c_9 c_{10}}}_{(-1)^{61}\ 8!\ \delta^{c_{10}}_{a_{10}}\delta^{c_9}_{a_9}}\big[(\bar\eta\gamma^{a_{10}a_9}\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma_{c_9c_{10}}\tilde\gamma\dot\theta)}_{=(\dot{\bar\theta}\gamma_{c_9c_{10}}\tilde\gamma\theta)} \\
& - (\bar\eta\gamma^{a_{10}a_9}\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma_{c_9c_{10}}\tilde\gamma\theta)\big] \\
& - \frac{8}{32\cdot 9!}\underbrace{\epsilon_{a_9\ldots a_1 a_{10}}\epsilon^{a_1\ldots a_9 c_{10}}}_{(-1)^{54}\ 9!\ \delta^{c_{10}}_{a_{10}}}\big[(\bar\eta\gamma^{a_{10}}\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\gamma_{c_{10}}\tilde\gamma\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\gamma_{c_{10}}\tilde\gamma\theta)} \\
& - (\bar\eta\gamma^{a_{10}}\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma_{c_{10}}\tilde\gamma\theta)\big] \\
& + \frac{10}{32\cdot 10!}\underbrace{\epsilon_{a_{10}\ldots a_1}\epsilon^{a_1\ldots a_{10}}}_{(-1)^{45}\ 10!}\big[(\bar\eta\tilde\gamma\theta')\underbrace{(\bar\theta\tilde\gamma\dot\theta)}_{=-(\dot{\bar\theta}\tilde\gamma\theta)} - (\bar\eta\tilde\gamma\theta')(\dot{\bar\theta}\tilde\gamma\theta)\big] \quad .
\end{aligned}
$$

Es bleibt

$$
\begin{aligned}
A \;=\; & -\frac{5}{8}(\bar\eta\theta')(\bar\theta\dot\theta) - \frac{5}{8}(\bar\eta\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\tilde\gamma\dot\theta) + \frac{1}{2}(\bar\eta\gamma_{a_1}\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1}\tilde\gamma\dot\theta) \\
& + \frac{1}{24}(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot\theta) - \frac{1}{8\cdot 4!}(\bar\eta\gamma_{a_4\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_4}\dot\theta) \\
& - \frac{2}{16\cdot 4!^2}(\bar\eta\gamma^{a_4\ldots a_1}\tilde\gamma\theta')(\bar\theta\gamma_{a_1\ldots a_4}\tilde\gamma\dot\theta). \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

5.2.5 Umordnung des Restterms in D=12

In D=12 soll die Signatur als $(10,2)$ gewählt werden, um auch hier Majorana-Weyl-Spinoren zuzulassen.

Die Entwicklung des zweiten Terms ist

$$
\begin{aligned}
(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\dot{\theta})(\bar{\theta}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta') \quad = \quad & \frac{1}{32}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\dot{\theta}) \\
& - \frac{1}{32}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_\nu\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^\nu\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{64\cdot 2!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_2a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1a_2}\dot{\theta}) \\
& - \frac{1}{64\cdot 3!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_3\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{64\cdot 4!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_4\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_4}\dot{\theta}) \\
& - \frac{1}{64\cdot 5!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_5\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_5}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{64\cdot 6!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_6\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_6}\dot{\theta}) \\
& - \frac{1}{64\cdot 7!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_7\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_7}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{64\cdot 8!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_8\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_8}\dot{\theta}) \\
& - \frac{1}{64\cdot 9!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_9\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_9}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{64\cdot 10!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_{10}\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_{10}}\dot{\theta}) \\
& - \frac{1}{64\cdot 11!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_{11}\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_{11}}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{64\cdot 12!}(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\gamma_{a_{12}\ldots a_1}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_{12}}\dot{\theta}). \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung von (5.15) vereinfacht sich dieses zu

$$
\begin{aligned}
(\bar{\eta}\gamma_\mu\tilde{\gamma}\dot{\theta})(\bar{\theta}\gamma^\mu\tilde{\gamma}\theta') \; = \; & \frac{12}{32}(\bar{\eta}\theta')(\bar{\theta}\dot{\theta}) \\
& - \frac{10}{32}(\bar{\eta}\gamma_{a_1}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1}\dot{\theta}) \\
& + \frac{8}{64\cdot 2!}(\bar{\eta}\gamma_{a_2a_1}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1a_2}\dot{\theta}) \\
& - \frac{6}{64\cdot 3!}(\bar{\eta}\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_3}\dot{\theta}) \\
& + \frac{4}{64\cdot 4!}(\bar{\eta}\gamma_{a_4\ldots a_1}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_4}\dot{\theta}) \\
& - \frac{2}{64\cdot 5!}(\bar{\eta}\gamma_{a_5\ldots a_1}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_5}\dot{\theta}) \\
& + \frac{2}{64\cdot 7!}(\bar{\eta}\gamma_{a_7\ldots a_1}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\ldots a_7}\dot{\theta})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{4}{64\cdot 8!}(\bar\eta\gamma_{a_8\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_8}\dot\theta)\\
&+ \frac{6}{64\cdot 9!}(\bar\eta\gamma_{a_9\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_9}\dot\theta)\\
&- \frac{8}{64\cdot 10!}(\bar\eta\gamma_{a_{10}\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_{10}}\dot\theta)\\
&+ \frac{10}{64\cdot 11!}(\bar\eta\gamma_{a_{11}\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_{11}}\dot\theta)\\
&- \frac{12}{64\cdot 12!}(\bar\eta\gamma_{a_{12}\ldots a_1}\theta')(\bar\theta\gamma^{a_1\ldots a_{12}}\dot\theta)
\end{aligned}
$$

und analog für den dritten Term

$$
\begin{aligned}
(\bar\eta\gamma_\mu\tilde\gamma\theta)(\dot{\bar\theta}\gamma^\mu\tilde\gamma\theta') \;=\; & \frac{12}{32}(\bar\eta\theta')(\dot{\bar\theta}\theta)\\
&- \frac{10}{32}(\bar\eta\gamma_{a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1}\theta)\\
&+ \frac{8}{64\cdot 2!}(\bar\eta\gamma_{a_2 a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1 a_2}\theta)\\
&- \frac{6}{64\cdot 3!}(\bar\eta\gamma_{a_3\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_3}\theta)\\
&+ \frac{4}{64\cdot 4!}(\bar\eta\gamma_{a_4\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_4}\theta)\\
&- \frac{2}{64\cdot 5!}(\bar\eta\gamma_{a_5\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_5}\theta)\\
&+ \frac{2}{64\cdot 7!}(\bar\eta\gamma_{a_7\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_7}\theta)\\
&- \frac{4}{64\cdot 8!}(\bar\eta\gamma_{a_8\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_8}\theta)\\
&+ \frac{6}{64\cdot 9!}(\bar\eta\gamma_{a_9\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_9}\theta)\\
&- \frac{8}{64\cdot 10!}(\bar\eta\gamma_{a_{10}\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_{10}}\theta)\\
&+ \frac{10}{64\cdot 11!}(\bar\eta\gamma_{a_{11}\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_{11}}\theta)\\
&- \frac{12}{64\cdot 12!}(\bar\eta\gamma_{a_{12}\ldots a_1}\theta')(\dot{\bar\theta}\gamma^{a_1\ldots a_{12}}\theta) \quad .
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{12}} &= \epsilon^{a_1 a_2 \ldots a_{12}}, \quad \epsilon_{012\ldots 11} = 1 \\
\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{12}} \epsilon^{a_1 a_2 \ldots a_{12}} &= 12! \\
\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{12}} \epsilon^{b_1 a_2 \ldots a_{12}} &= 11!\ \delta^{b_1}_{a_1} \\
\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{12}} \epsilon^{b_1 b_2 a_3 \ldots a_{12}} &= 10!\ \delta^{b_1}_{a_1} \delta^{b_2}_{a_2} \\
\gamma_{a_1 \ldots a_{12}} &= -\epsilon_{a_1 \ldots a_{12}} \tilde{\gamma} \\
\gamma_{a_1 \ldots a_{11}} &= -\epsilon_{a_1 \ldots a_{12}} \gamma^{a_{12}} \tilde{\gamma} \\
\gamma_{a_1 \ldots a_{10}} &= +\frac{1}{2} \epsilon_{a_1 \ldots a_{11} a_{12}} \gamma^{a_{11} a_{12}} \tilde{\gamma} \\
\gamma_{a_1 \ldots a_9} &= +\frac{1}{3!} \epsilon_{a_1 \ldots a_{10} \ldots a_{12}} \gamma^{a_{10} \ldots a_{12}} \tilde{\gamma} \\
\gamma_{a_1 \ldots a_8} &= -\frac{1}{4!} \epsilon_{a_1 \ldots a_9 \ldots a_{12}} \gamma^{a_9 \ldots a_{12}} \tilde{\gamma}
\end{aligned}
$$

läßt sich dann die Summe der drei Terme, wie schon in den vorherigen Abschnitten, vereinfachen,

$$
\begin{aligned}
A \; = \; & (\bar{\eta}\gamma_\mu \tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^\mu \tilde{\gamma}\dot{\theta}) \\
& - \frac{12}{32}\Big[(\bar{\eta}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\dot{\theta})}_{=-(\dot{\bar{\theta}}\theta)} - (\bar{\eta}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\theta)\Big] \\
& + \frac{10}{32}\Big[(\bar{\eta}\gamma_{a_1}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1}\dot{\theta})}_{=(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1}\theta)} - (\bar{\eta}\gamma_{a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1}\theta)\Big] \\
& - \frac{8}{64\cdot 2!}\Big[(\bar{\eta}\gamma_{a_2 a_1}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1 a_2}\dot{\theta})}_{=(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 a_2}\theta)} - (\bar{\eta}\gamma_{a_2 a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 a_2}\theta)\Big] \\
& + \frac{6}{64\cdot 3!}\Big[(\bar{\eta}\gamma_{a_3 \ldots a_1}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1 \ldots a_3}\dot{\theta})}_{-(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 \cdots a_3}\theta)} - (\bar{\eta}\gamma_{a_3 \ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 \ldots a_3}\theta)\Big] \\
& - \frac{4}{64\cdot 4!}\Big[(\bar{\eta}\gamma_{a_4 \ldots a_1}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1 \ldots a_4}\dot{\theta})}_{=-(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 \cdots a_4}\theta)} - (\bar{\eta}\gamma_{a_4 \ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 \ldots a_4}\theta)\Big] \\
& + \frac{2}{64\cdot 5!}\Big[(\bar{\eta}\gamma_{a_5 \ldots a_1}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma^{a_1 \ldots a_5}\dot{\theta})}_{=(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 \cdots a_5}\theta)} - (\bar{\eta}\gamma_{a_5 \ldots a_1}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma^{a_1 \ldots a_5}\theta)\Big] \\
& - \frac{2}{64\cdot 7!} \underbrace{\epsilon_{a_7 \ldots a_1 a_{12} \ldots a_8} \epsilon^{a_1 \ldots a_7 c_8 \ldots c_{12}}}_{(-1)^{101}\ 7!\ \delta^{c_{12}}_{a_{12}} \delta^{c_{11}}_{a_{11}} \delta^{c_{10}}_{a_{10}} \delta^{c_9}_{a_9} \delta^{c_8}_{a_8}} \Big[(\bar{\eta}\gamma^{a_{12} \ldots a_8}\tilde{\gamma}\theta') \underbrace{(\bar{\theta}\gamma_{c_8 \ldots c_{12}}\tilde{\gamma}\dot{\theta})}_{=-(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_8 \cdots c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (\bar{\eta}\gamma^{a_{12}\dots a_8}\tilde{\gamma}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_8\dots c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)\Big] \\
&+ \frac{4}{64\cdot 8!}\underbrace{\epsilon_{a_8\dots a_1 a_{12}\dots a_9}\,\epsilon^{a_1\dots a_8 c_9\dots c_{12}}}_{(-1)^{98}\ \ 8!\ \delta^{c_{12}}_{a_{12}}\delta^{c_{11}}_{a_{11}}\delta^{c_{10}}_{a_{10}}\delta^{c_9}_{a_9}}\Big[(\bar{\eta}\gamma^{a_{12}\dots a_9}\tilde{\gamma}\theta')\ \underbrace{(\bar{\theta}\gamma_{c_9\dots c_{12}}\tilde{\gamma}\dot{\theta})}_{=-(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_9\dots c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)} \\
&- (\bar{\eta}\gamma^{a_{12}\dots a_9}\gamma_{13}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_9\dots c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)\Big] \\
&- \frac{6}{64\cdot 9!}\underbrace{\epsilon_{a_9\dots a_1 a_{12}\dots a_{10}}\,\epsilon^{a_1\dots a_9 c_{10}\dots c_{12}}}_{(-1)^{93}\ \ 9!\ \delta^{c_{12}}_{a_{12}}\delta^{c_{11}}_{a_{11}}\delta^{c_{10}}_{a_{10}}}\Big[(\bar{\eta}\gamma^{a_{12}a_{11}a_{10}}\tilde{\gamma}\theta')\ \underbrace{(\bar{\theta}\gamma_{c_{10}c_{11}c_{12}}\tilde{\gamma}\dot{\theta})}_{=(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_{10}c_{11}c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)} \\
&- (\bar{\eta}\gamma^{a_{12}a_{11}a_{10}}\tilde{\gamma}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_{10}c_{11}c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)\Big] \\
&+ \frac{8}{64\cdot 10!}\underbrace{\epsilon_{a_{10}\dots a_1 a_{12}a_{11}}\,\epsilon^{a_1\dots a_{10}c_{11}c_{12}}}_{(-1)^{86}\ \ 10!\ \delta^{c_{12}}_{a_{12}}\delta^{c_{11}}_{a_{11}}}\Big[(\bar{\eta}\gamma^{a_{12}a_{11}}\tilde{\gamma}\theta')\ \underbrace{(\bar{\theta}\gamma_{c_{11}c_{12}}\tilde{\gamma}\dot{\theta})}_{=(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_{11}c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)} \\
&- (\bar{\eta}\gamma^{a_{12}a_{11}}\tilde{\gamma}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_{11}c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)\Big] \\
&- \frac{10}{64\cdot 11!}\underbrace{\epsilon_{a_{11}\dots a_1 a_{12}}\,\epsilon^{a_1\dots a_{11}c_{12}}}_{(-1)^{77}\ \ 11!\ \delta^{c_{12}}_{a_{12}}}\Big[(\bar{\eta}\gamma^{a_{12}}\tilde{\gamma}\theta')\ \underbrace{(\bar{\theta}\gamma_{c_{12}}\tilde{\gamma}\dot{\theta})}_{=-(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)} \\
&- (\bar{\eta}\gamma^{a_{12}}\tilde{\gamma}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\gamma_{c_{12}}\tilde{\gamma}\theta)\Big] \\
&+ \frac{12}{64\cdot 12!}\underbrace{\epsilon_{a_{12}\dots a_1}\,\epsilon^{a_1\dots a_{12}}}_{(-1)^{66}\ \ 12!}\Big[(\bar{\eta}\tilde{\gamma}\theta')\ \underbrace{(\bar{\theta}\tilde{\gamma}\dot{\theta})}_{=-(\dot{\bar{\theta}}\tilde{\gamma}\theta)}\ - (\bar{\eta}\tilde{\gamma}\theta')(\dot{\bar{\theta}}\tilde{\gamma}\theta)\Big] \quad ,
\end{aligned}
$$

so daß lediglich

$$
\begin{aligned}
A \;=\; & -\frac{24}{32}(\bar{\eta}\theta')(\bar{\theta}\dot{\theta}) \\
& + \frac{6}{16}(\bar{\eta}\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\tilde{\gamma}\dot{\theta}) + \frac{21}{16}(\bar{\eta}\gamma_{a_1}\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1}\tilde{\gamma}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{32}(\bar{\eta}\gamma_{a_3\dots a_1}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\dots a_3}\dot{\theta}) \\
& - \frac{1}{8\cdot 4!}(\bar{\eta}\gamma_{a_4\dots a_1}\theta')(\bar{\theta}\gamma^{a_1\dots a_4}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{8}(\bar{\eta}\gamma^{a_4\dots a_1}\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma_{a_1\dots a_4}\tilde{\gamma}\dot{\theta}) \\
& + \frac{1}{16}(\bar{\eta}\gamma^{a_5\dots a_1}\tilde{\gamma}\theta')(\bar{\theta}\gamma_{a_1\dots a_5}\tilde{\gamma}\dot{\theta})
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

übrig bleibt. Auch in D=12 läßt sich also kein Verschwinden des Restterms feststellen.

5.3 Schlußfolgerung

Die Analyse des Restterms unter Verwendung der *Fierz-Identitäten* zeigt, daß es nicht möglich ist, daß der Restterm in geraden Dimensionen verschwindet. Da sich die Identitäten der γ-Matrizen, die aus der Clifford-Algebra folgen, alle acht Dimensionen zyklisch wiederholen, läßt sich daraus schließen, daß es auch in noch höheren geraden Dimensionen unmöglich ist, daß A verschwindet.

Weiterhin läßt sich aus der komplexen Struktur der Restterme schließen, daß auch der Übergang zu Dirac-, Majorana-, oder Weyl-Spinoren, und(oder) ungeraden Dimensionen, keine wesentliche Vereinfachung bringen wird. Es ist also nicht möglich, eine κ-symmetrische String-Wirkung[11] zu konstruieren, die auf der Hypersymmetrie aus Kapitel 2 beruht.

Aus diesem Grund wird im nächsten Kapitel die *chirale Hypersymmetrie*, eine Vereinfachung der Hypersymmetrie, definiert.

[11] Das gleiche gilt für den einen hypersymmetrischen WZ-Term.

Kapitel 6

Chirale Hypersymmetrie

Ließ sich der Formalismus der Hypersymmetrie noch problemlos auf das relativistische Punktteilchen anwenden, gab es beim Hyperstring gravierende Komplikationen.

Büßt man die κ-Symmetrie ein, erhält man eine hypersymmetrische Wirkung mit nichtlinearen Bewegungsgleichungen. Die Theorie läßt sich daher nicht ohne weiteres quantisieren. Könnte man jedoch zusätzlich zur Hypersymmetrie die κ-Symmetrie fordern, würden sich die Bewegungsgleichungen in der *Lichtkegel-Eichung* derart vereinfachen, daß sich die Theorie quantisieren ließe. Hier soll nun untersucht werden, ob es möglich ist, eine solche Wirkung zu konstruieren, wenn man sich auf *kommutierende* Spinoren nur einer (statt beider) Chiralität beschränkt.

6.1 Die chirale Hyper-Poincaré-Algebra

Bislang gingen alle Rechnungen von beiden Weyl-Spinoren θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ aus. Im folgenden wird nur noch einer der Majorana-Weyl-Spinoren, θ_α, zugelassen. Folglich muß sich sich die Hyper-Poincaré-Algebra ändern, denn alle Ausdrücke mit gepunkteten Indizes $\dot{\alpha}$ fallen weg.

Aus diesem Grund wird für den weiteren Verlauf dieser Arbeit die Hyper-Poincaré-Algebra für einen chiralen Spinor, die *chirale Hyper-Poincaré-Algebra* definiert. An die Stelle der Hypersymmetrie tritt die *chirale Hypersymmetrie*.

Durch das Wegfallen der gepunkteten Indizes verliert der Kommutator (2.4) seine grundlegende Bedeutung. An die Stelle der Generatoren Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ rückt der Generator $\mathcal{Q}_\alpha$, welcher die Kommutatorrelation

$$[\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta] \quad = \quad -\partial_{[\alpha\beta]} \tag{6.1}$$

erfüllen soll.

Aufgrund der Antisymmetrie des Kommutators muß auch die rechte Seite, d.h. $\partial_{\alpha\beta}$, antisymmetrisch sein. Es folgt

$$[\not{Q}_\alpha, \not{Q}_\beta] = -\epsilon_{\alpha\beta}\partial \quad , \tag{6.2}$$

wobei $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial Y}$ die Ableitung nach nur einer skalaren Größe bezeichnet. Eine Realisierung des Kommutators auf dem *chiralen Hyperraum* (Y, θ_α) ist

$$\not{Q}_\alpha = \partial_\alpha + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial \quad . \tag{6.3}$$

Dieses zeigt sich durch

$$\begin{aligned}
[\not{Q}_\alpha, \not{Q}_\beta] &= \not{Q}_\alpha\not{Q}_\beta - \not{Q}_\beta\not{Q}_\alpha \\
&= \partial_\alpha\partial_\beta + \frac{1}{2}\partial_\alpha\epsilon_{\beta\gamma}\theta^\gamma\partial + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\delta}\theta^\delta\partial\partial_\beta + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\delta}\theta^\delta\partial\epsilon_{\beta\gamma}\theta^\gamma\partial \\
&\quad -\partial_\beta\partial_\alpha - \frac{1}{2}\partial_\beta\epsilon_{\alpha\delta}\theta^\delta\partial - \frac{1}{2}\epsilon_{\beta\gamma}\theta^\gamma\partial\partial_\alpha - \frac{1}{4}\epsilon_{\beta\gamma}\theta^\gamma\partial\epsilon_{\alpha\delta}\theta^\delta\partial \\
&= +\frac{1}{2}\partial_\alpha\epsilon_{\beta\gamma}\theta^\gamma\partial + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\delta}\theta^\delta\partial\partial_\beta - \frac{1}{2}\partial_\beta\epsilon_{\alpha\delta}\theta^\delta\partial - \frac{1}{2}\epsilon_{\beta\gamma}\theta^\gamma\partial\partial_\alpha \\
&= +\frac{1}{2}\epsilon_{\beta\gamma}\partial(\delta_\alpha^\gamma + \theta^\gamma\partial_\alpha - \theta^\gamma\partial_\alpha) + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\delta}\partial(\theta^\delta\partial_\beta - \delta_\beta^\delta - \theta^\delta\partial_\beta) \\
&= +\frac{1}{2}\epsilon_{\beta\alpha}\partial - \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\partial \\
&= -\epsilon_{\alpha\beta}\partial \quad .
\end{aligned}$$

An dieser Stelle soll bemerkt werden, daß zusätzlich zur skalaren Koordinate Y, auch eine Bispinorkoordinate $X_{(\alpha\beta)}$ betrachtet werden kann. Diese ergibt sich in natürlicher Weise, wenn man den allgemeinen Bispinor $X_{\alpha\beta}$ in seinen antisymmetrischen ($Y = \epsilon^{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}$) und symmetrischen ($X_{(\alpha\beta)}$) Anteil zerlegt.

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1 \quad .$$

In den folgenden Modellen des chiralen Hyperteilchens und -strings werden diese drei Dimensionen jedoch nicht erscheinen, da sie für die chirale Hypersymmetrie-Transformation keine Rolle spielen. Aufgrund des Antisymmetrie des Kommutators bleiben die Bispinoren $X_{(\alpha\beta)}$ von der chiralen Hypersymmetrie unberührt.

Weiterhin besitzt Y keinerlei Indizes, was bewirkt, daß die Lorentzgeneratoren[1] $\not{M}_{\alpha\beta}$ nur auf den Spinorraum wirken können, es also keine Drehungen aus dem Spinorraum in den Y-Raum gibt.

[1]Die Lorentzgeneratoren $\not{M}_{\alpha\beta}$ unterscheiden sich von denen der Hypersymmetrie. Da sie nur in drei Dimensionen definiert sind, treten an die Stelle der erweiterten Paulimatrizen die normalen Paulimatrizen.

Kapitel 7

Das chirale relativistische Hyperteilchen

7.1 Die reduzierte hypersymmetrische Wirkung

Ähnlich wie in Kapitel 3 soll hier für das relativistische Punktteilchen eine Wirkung konstruiert werden, welche sich invariant unter den durch $\not{Q}_\alpha$ generierten Transformationen verhält.

An die Stelle des Bispinors $x_{\alpha\dot{\alpha}}$ wird die skalare Koordinate y treten, und anstatt der gepunkteten und ungepunkteten Spinoren wird nur der chirale Spinor θ_α benutzt.

Mit dieser Ersetzung folgt die Wirkung des chiralen Hyperteilchens als

$$\begin{aligned} \not{S}_{hyper} &= \int d\tau e^{-1}(\dot{y} - \frac{1}{2}\theta^\alpha \dot{\theta}_\alpha)^2 \\ &= \int d\tau e^{-1} p^2 \end{aligned} \tag{7.1}$$

mit

$$p \equiv (\dot{y} - \frac{1}{2}\theta^\alpha \dot{\theta}_\alpha) \quad . \tag{7.2}$$

Diese erweist sich, zusätzlich zur *lokalen* Reparametrisierungsinvarianz, invariant unter den chiralen Hypersymmetrie-Transformationen

$$\begin{aligned} \delta\theta_\alpha &= \eta^\beta \not{Q}_\beta \theta_\alpha = \eta^\beta \partial_\beta \theta^\gamma \epsilon_{\alpha\gamma} \\ &= \eta^\beta \delta_\beta{}^\gamma \epsilon_{\alpha\gamma} = \eta^\gamma \epsilon_{\alpha\gamma} = \eta_\alpha \\ \delta\theta^\alpha &= \eta^\alpha \\ \delta y &= \eta^\beta \not{Q}_\beta y = \frac{1}{2}\eta^\beta \epsilon_{\beta\gamma}\theta^\gamma \partial y \\ &= \frac{1}{2}\eta^\beta \epsilon_{\beta\gamma}\theta^\gamma \partial y = \frac{1}{2}\eta^\beta \theta_\beta \\ \delta e &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{7.3}$$

welche durch $\delta A = \eta^\alpha \not{Q}_\alpha A$ zu erhalten sind[1].

Die Invarianz zeigt sich wie folgt

$$\begin{aligned} \delta p &= \delta \dot{y} - \frac{1}{2}\delta\theta^\alpha\dot{\theta}_\alpha \\ &= \frac{1}{2}\eta^\alpha\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\eta^\alpha\dot{\theta}_\alpha \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

7.2 Die Bewegungsgleichungen des chiralen Hyperteilchens

Durch Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen erhält man die Bewegungsgleichungen für die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = e^{-1}(\dot{y} - \frac{1}{2}\theta^\alpha\dot{\theta}_\alpha)\cdot p \tag{7.4}$$

als

$$\begin{aligned} -e^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial e} &= p^2 = 0 \\ \frac{e}{2}\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} &= \dot{p} = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_\alpha} &= +e^{-1}p\dot{\theta}^\alpha + e^{-1}(p\dot{\theta}^\alpha + \overset{=0}{\dot{p}\theta^\alpha}) \\ &\propto p\dot{\theta}^\alpha = 0 \quad . \end{aligned} \tag{7.5}$$

Im Gegensatz zu (3.2) ist p^2 keine nilpotente 2×2 Matrix, sondern eine reelle Zahl, was bedeutet, daß aus $p^2 = 0 \to p = 0$ folgt. Dieses bedeutet jedoch für die dritte bzw. vierte Bewegungsgleichung, daß diese trivial durch die erste gelöst wird und jegliche Spinorabhängigkeit verschwindet.

Wie schon in Kapitel 3 läßt das auf die Existenz einer κ-Symmetrie schließen.

7.3 Die κ-Symmetrie des chiralen Hyperteilchens

Um die κ-Symmetrie-Transformationen für das chirale Hyperteilchen zu finden, wird analog zu Kapitel 3 vorgegangen. An die Stelle des Bispinors in der Variation $\delta\theta_\alpha$ tritt lediglich der skalare Impuls p, so daß in Analogie zum Hyperteilchen in diesem Fall nur noch ein einziger spinorieller Parameter κ_α in

[1] Der Unterschied zu (2.8) besteht hier lediglich darin, daß der Anteil mit den gepunkteten Spinorindizes in diesem Modell nicht auftritt, η ist wie auch in den vorangegangenen Kapiteln auf der Weltlinie(fläche) konstant.

Frage kommt, um auf der rechten und linken Seite der Transformationsgleichung die gleiche Indexstruktur zu bekommen.

Die Transformation des skalaren y orientiert sich an der Hypersymmetrie-Transformation $\delta y = \frac{1}{2}\eta^\alpha\theta_\alpha$, indem η^α durch θ^α und θ_α durch $\delta\theta_\alpha$ ersetzt wird. Dieses geschieht ganz analog zur κ-Symmetrie des Hyperteilchens aus Kapitel 3.

Die chiralen κ-Symmetrie-Transformationen sind somit

$$\begin{aligned} \delta\theta_\alpha &= p\kappa_\alpha \\ \delta y &= \frac{1}{2}\theta^\alpha\delta\theta_\alpha \quad . \end{aligned} \tag{7.6}$$

Da die Variation von p unter diesen Transformationen nicht verschwindet,

$$\begin{aligned} \delta p &= \delta\dot{y} - \frac{1}{2}\delta\theta^\alpha\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\theta^\alpha\delta\dot{\theta}_\alpha \\ &= \partial_\tau(\frac{1}{2}\theta^\alpha\delta\theta_\alpha) - \frac{1}{2}p\kappa^\alpha\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\theta^\alpha\partial_\tau(p\kappa_\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^\alpha p\kappa_\alpha + \frac{1}{2}\theta^\alpha\partial_\tau(p\kappa_\alpha) - \frac{1}{2}p\kappa^\alpha\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\theta^\alpha\partial_\tau(p\kappa_\alpha) \\ &= p\kappa_\alpha\dot{\theta}^\alpha \quad , \end{aligned}$$

ist es nötig, δe so zu bestimmen, daß die Wirkung κ-Symmetrie besitzt.

Im Gegensatz zu Kapitel 3 ist der verbleibende Term δp^2 sofort proportional zu p^2. Es gilt

$$(p+\delta p)^2 = p^2 + 2p\delta p + (\delta p)^2$$

und somit

$$\delta p^2 \equiv 2p\delta p = 2p^2\kappa_\alpha\dot{\theta}^\alpha \quad .$$

Die Variation δe berechnet sich wie in Kapitel 3 durch

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta e^{-1}p^2 + e^{-1}\delta p^2 \\ &= \delta e^{-1}p^2 + e^{-1}(2p^2\kappa_\alpha\dot{\theta}^\alpha) \\ &= p^2(\delta e^{-1} + 2e^{-1}\kappa_\alpha\dot{\theta}^\alpha) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

als

$$\delta e^{-1} = -2e^{-1}\kappa_\alpha\dot{\theta}^\alpha \quad . \tag{7.7}$$

Die Wirkung ist also zusätzlich invariant unter einer *lokalen* κ-Symmetrie-Transformation.

7.4 Die λ-Symmetrie des chiralen Hyperteilchens

Wie schon in Kapitel 3 impliziert die Existenz einer κ-Symmetrie-Invarianz das Auftreten einer zusätzlichen lokalen Symmetrie, der λ-Symmetrie. Diese hat die Transformationen

$$\begin{aligned}\delta\theta_\alpha &= \lambda(\tau)\dot{\theta}_\alpha \\ \delta y &= \frac{1}{2}\theta^\alpha\delta\theta_\alpha \\ \delta e &= 0 \quad .\end{aligned} \tag{7.8}$$

Eingesetzt in die Variation δp,

$$\begin{aligned}\delta p &= \frac{1}{2}\partial_\tau(\theta^\alpha\delta\theta_\alpha) - \frac{1}{2}\delta\theta^\alpha\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\theta^\alpha\delta\dot{\theta}_\alpha \\ &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^\alpha\delta\theta_\alpha + \frac{1}{2}\theta^\alpha\delta\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\delta\theta^\alpha\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\theta^\alpha\delta\dot{\theta}_\alpha \\ &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^\alpha\lambda(\tau)\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\lambda(\tau)\dot{\theta}^\alpha\dot{\theta}_\alpha \\ &= 0 \quad ,\end{aligned}$$

verschwindet diese sofort.

7.5 Schlußfolgerung

Die chirale Hypersymmetrie läßt sich problemlos auf das relativistische Punktteilchen anwenden. Die Bewegungsgleichungen sind jedoch sehr einfach und geben keine bemerkenswerten Lösungen. Im wesentlichen ergibt sich aus der ersten Bewegungsgleichung die Aussage, daß $p = 0$ ist. Damit werden die anderen beiden Bewegungsgleichungen trivial.

Aus diesem Grund soll nun mit einer Verallgemeinerung der Wirkung auf den String fortgefahren werden, dem Interessenschwerpunkt dieser Arbeit.

Kapitel 8

Der chirale hypersymmetrische String

In diesem Kapitel sollen die Überlegungen aus Kapitel 6 auf den String angewandt werden.

Das letzte Kapitel hat gezeigt, daß dieser Formalismus auf das Punktteilchen anwendbar, die Lösung der Bewegungsgleichungen jedoch trivial ist. Aufgrund der Tatsache, daß zur Beschreibung der Weltfläche des Strings zwei Parameter benötigt werden, besteht die Möglichkeit, daß dieser Formalismus auf den String angewandt, das Problem der nichtlinearen Bewegungsgleichungen lösen könnte.

8.1 Konstruktion der chiralen hypersymmetrischen String-Wirkung

Die Ersetzung der Bispinoren $\Pi_{\alpha\dot{\alpha},a}$ in der verallgemeinerten hypersymmetrischen Polyakov-Wirkung (4.1) durch skalare Koordinaten Π_a, liefert eine neue Wirkung $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} \;=\; \frac{1}{\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{h}\; h^{ab}\Pi_a\Pi_b \quad . \tag{8.1}$$

Π_a ist hier die Verallgemeinerung von p des chiralen Hyperteilchens aus dem letzten Kapitel auf den chiralen String

$$\Pi_a \equiv (\partial_a Y - \frac{1}{2}\theta^\alpha\partial_a\theta_\alpha) \quad .$$

Die von $\mathcal{Q}_\alpha$ generierten chiralen Hypersymmetrie-Transformationen waren gegeben als

$$
\begin{aligned}
\delta\theta^i_\alpha &= \eta^i_\alpha \\
\delta Y &= \frac{1}{2}\sum_i \eta^{\alpha i}\theta^i_\alpha \quad .
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

Es zeigt sich, daß die Variation

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi_a &= \delta\partial_a Y - \frac{1}{2}\sum_i \delta\theta^{\alpha i}\partial_a\theta^i_\alpha - \frac{1}{2}\sum_i \theta^{\alpha i}\delta\partial_a\theta^i_\alpha \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \eta^{\alpha i}\partial_a\theta^i_\alpha - \frac{1}{2}\sum_i \eta^{\alpha i}\partial_a\theta^i_\alpha - \frac{1}{2}\sum_i \theta^{\alpha i}\underbrace{\partial_a\eta^i_\alpha}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

unter chiralen Hypersymmetrie-Transformationen mit beliebig vielen chiralen hypersymmetrischen Partnern $N \in \mathbb{N}$ verschwindet.

8.2 Bewegungsgleichungen des chiralen Hyperstrings

Aufschluß über eine möglich κ-Symmetrie gibt die Analyse der Bewegungsgleichungen, diese folgen aus

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{\alpha'}\sqrt{h}\; h^{ab}\Pi_a\Pi_b
\tag{8.3}
$$

als

$$
\begin{aligned}
\alpha'\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h^{ab}} &= -\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{h}}h_{ab}h^{cd}\Pi_c\Pi_d + \sqrt{h}\;\Pi_a\Pi_b = 0 \\
\frac{\alpha'}{2}\partial_c\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c y} &= \partial_c\left(\sqrt{h}h^{cb}\Pi_b\right) = 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\alpha} - \partial_c\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c\theta^\alpha} &\propto \sqrt{h}h^{ab}\partial_a\theta_\alpha\Pi_b = 0 \quad ,
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

wobei die erste dem Verschwinden des Energie-Impuls-Tensors

$$
T_{ab} \equiv -\frac{1}{4}h_{ab}h^{cd}\Pi_c\Pi_d + \frac{1}{2}\Pi_a\Pi_b
\tag{8.5}
$$

entspricht.

Anders als im Fall des Hyperteilchens aus Kapitel 3, wird hier nicht über den Spinorindex α summiert, was bedeutet, daß die dritte Bewegungsgleichung für beide Spinorkoordinaten θ_1 und θ_2 getrennt gelten muß, es also keine Abhängigkeit der Spinorgleichungen voneinander geben kann[1]. Aufgrund

[1] Bermerkt sei an dieser Stelle, daß es auch hier nicht möglich ist, einen chiralen hypersymmetrischen WZ-Term zu konstruieren.

der einfachen Struktur der Skalare Π_a, ist es jedoch möglich, die Lösungen der Bewegungsgleichungen (8.4) auch ohne die *Lichtkegel-Eichung*, für die eine κ-Symmetrie notwendig wäre, zu finden.

Eine zusätzliche Vereinfachung der Bewegungsgleichungen ergibt sich durch Ausnutzung der *lokalen* Reparametrisierungsinvarianz von $\$$,

$$\begin{aligned}
\delta Y &= \xi^c \partial_c Y \\
\delta \theta_\alpha &= \xi^c \partial_c \theta_\alpha \\
\delta h^{ab} &= \xi^c \partial_c h^{ab} - h^{ac}\partial_c \xi^b - h^{bc}\partial_c \xi^a \\
\delta \sqrt{h} &= \partial_c(\xi^c \sqrt{h})
\end{aligned} \tag{8.6}$$

sowie Invarianz unter Weyl-Reskalierung, d.h

$$\delta h^{ab} = \Lambda h^{ab} \quad . \tag{8.7}$$

Die drei beliebigen Parameter der *lokalen* Reparametrisierung und der Weyl-Reskalierung ξ^a und Λ erlauben es nun, die drei unabhängigen Einträge in h^{ab} festzulegen, und zwar so, daß

$$h^{ab} \Rightarrow \eta^{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich dann zu

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\eta_{ab}\eta^{cd}\Pi_c\Pi_d + \Pi_a\Pi_b &= 0 \\
\partial_c\left(\eta^{cb}\Pi_b\right) &= 0 \\
\eta^{ab}\partial_a\theta_\alpha\Pi_b &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Aus der Auswertung der ersten Bewegungsgleichung folgen die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\eta_{00}(\eta^{00}\Pi_0\Pi_0 + \eta^{11}\Pi_1\Pi_1) + \Pi_0\Pi_0 = 0 \\
-\frac{1}{2}\eta_{11}(\eta^{00}\Pi_0\Pi_0 + \eta^{11}\Pi_1\Pi_1) + \Pi_1\Pi_1 = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

diese liefern jedoch beide die Bedingung

$$\frac{1}{2}(\Pi_0\Pi_0 + \Pi_1\Pi_1) = 0 \quad ,$$

also

$$\Pi_0\Pi_0 \;=\; -\Pi_1\Pi_1 \quad . \tag{8.8}$$

Da Π_a eine reelle skalare Größe ist, kann die Gleichung nur erfüllt werden, wenn sowohl Π_0 als auch Π_1 verschwindet. Die beiden anderen Bewegungsgleichungen werden aufgrund der Tatsache, daß sie auch Π_a enthalten redundant.

Es gilt also eine Lösung der Gleichung

$$\Pi_a = 0 \iff \partial_a Y = \frac{1}{2}\theta^\alpha \partial_a \theta_\alpha \tag{8.9}$$

zu finden. Differentiation von (8.9) liefert

$$\partial_b\partial_a Y = \frac{1}{2}\partial_b\theta^\alpha\partial_a\theta_\alpha + \frac{1}{2}\theta^\alpha\partial_b\partial_a\theta_\alpha \quad .$$

Vertauschen der Indizes a und b und Subtraktion der beiden Ausdrücke ergibt

$$\begin{aligned}
\partial_b\partial_a Y - \partial_a\partial_b Y &= \frac{1}{2}\partial_b\theta^\alpha\partial_a\theta_\alpha + \frac{1}{2}\theta^\alpha\partial_b\partial_a\theta_\alpha \\
&\quad - \frac{1}{2}\partial_a\theta^\alpha\partial_b\theta_\alpha - \frac{1}{2}\theta^\alpha\partial_a\partial_b\theta_\alpha \\
0 &= \frac{1}{2}\partial_b\theta^\alpha\partial_a\theta_\alpha - \frac{1}{2}\partial_a\theta^\alpha\partial_b\theta_\alpha \quad ,
\end{aligned}$$

also

$$\partial_b\theta^\alpha\partial_a\theta_\alpha = 0 \quad .$$

Zusätzlich zu (A.26) ergibt sich damit die Bedingung

$$\dot\theta^\alpha\theta'_\alpha = 0 \quad . \tag{8.10}$$

8.3 Lösung der Bewegungsgleichungen des chiralen Hyperstrings

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Diskussion möglicher Lösungen der Differentialgleichung (8.9),

$$\begin{aligned}
\partial_a Y(\sigma,\tau) &= \frac{1}{2}\theta^\alpha\partial_a\theta_\alpha \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon^{12}\theta_2\partial_a\theta_1 + \epsilon^{21}\theta_1\partial_a\theta_2) \\
&= \frac{1}{2}(\theta_2\partial_a\theta_1 - \theta_1\partial_a\theta_2) \quad .
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $d\sigma^a$ ergibt

$$2\,dY = \theta_2 d\theta_1 - \theta_1 d\theta_2 \quad ,$$

da $df = (\partial_a f)\; d\sigma^a$. Umgeformt wird daraus

$$\begin{aligned} \frac{2}{\theta_1\theta_2} dY &= \frac{d\theta_1}{\theta_1} - \frac{d\theta_2}{\theta_2} \\ &= d\ln\theta_1 - d\ln\theta_2 \\ &= d\left(\ln\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) \quad . \end{aligned}$$

Substitution von $p \equiv \theta_1\theta_2$ und $q \equiv \ln\frac{\theta_1}{\theta_2}$ ergibt

$$2\,dY = p\;dq \quad ,$$

wobei Y, p und q beliebige Funktionen von σ und τ sind. pdq ist ein *exaktes* Differential. Aus der Bedingung $d(dY) = 0$ folgt

$$0 = 2\;d(dY) = dp \wedge dq + p \wedge d(dq) = dp \wedge dq \quad .$$

dp und dq sind also linear abhängig, dieses läßt sich ausdrücken als

$$dq = \lambda(p)dp \quad .$$

$q(p)$ ergibt sich dann als

$$q(p) = \int_{p_0}^{p} dp'\lambda(p') \quad . \tag{8.11}$$

Für eine Wahl von $\lambda(p)$ läßt sich $q(p)$ berechnen, die Spinoren θ_1 und θ_2 ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} \theta_1(p) &= \sqrt{p}e^{+q(p)/2} \\ \theta_2(p) &= \sqrt{p}e^{-q(p)/2} \quad . \end{aligned} \tag{8.12}$$

Die Wahl von $p(\sigma, \tau)$ bestimmt dann die σ- und τ-Abhängigkeit der Spinoren, $\theta_\alpha(\sigma, \tau)$. $Y(p)$ folgt mit

$$2dY = \lambda(p)pdp \tag{8.13}$$

als

$$Y(p) = \frac{1}{2}\int_{p_0}^{p} dp'\; p'\; \lambda(p') \quad .$$

Die σ- und τ-Abhängigkeit von $Y(\sigma, \tau)$ wird auch hier allein durch $p(\sigma, \tau)$ bestimmt.

$p(\sigma, \tau)$ ist frei wählbar; die zeitliche Entwicklung von Y und θ_α ist nicht durch die Anfangsbedingungen, sondern allein durch die Wahl von $p(\sigma, \tau)$ festgelegt. Es handelt sich also um eine Eichfreiheit, denn jegliche Dynamik wird mit der Wahl von $p(\sigma, \tau)$ von außen vorgegeben, was im wesentlichen daran liegt, daß die Bewegungsgleichung (8.9) die beiden übrigen Bewegungsgleichungen trivial löst. Es existiert also keine zusätzliche Bewegungsgleichung, die die Dynamik der Spinorfreiheitsgrade festlegt. Die Vereinfachung auf den chiralen hypersymmetrischen String wird also als Raumzeit-Formulierung des N=2 NSR-Strings unbrauchbar.

Kapitel 9

Zusammenfassung der Ergebnisse

Ließ sich die in Kapitel 2 definierte *Hypersymmetrie* noch problemlos auf das relativistische Punktteilchen anwenden, entstanden bei der Verallgemeinerung auf den String gravierende Probleme, welche aber zunächst auch beim GS-String entstehen. Ein zusätzlicher WZ-Term zieht als Konsequenz eine Eichsymmetrie, die κ-Symmetrie, nach sich. Diese Eichsymmetrie erlaubt dann eine Quantisierung in der Lichtkegel-Eichung auch für die Spinorkoordinaten. Die Bewegungsgleichungen werden linear und können gelöst werden. Aufgrund der *Kommutativität* der Spinoren bei der Hypersymmetrie war es nicht möglich, einen solchen WZ-Term *hypersymmetrisch* zu konstruieren; vielmehr zeigte sich, daß auch eine κ-Symmetrie der Hyperstring-Wirkung nicht erreicht werden kann.

Die Untersuchung des Restterms in beliebigen Dimensionen in Kapitel 5 zeigte, daß es in keiner Dimension $p+q$ möglich ist, κ-Symmetrie, bzw. einen hypersymmetrischen WZ-Term zu erhalten. Es existiert folglich in keiner Dimension $p+q$ eine Eichsymmetrie, die es möglich macht, die nichtlinearen Bewegungsgleichungen zu linearisieren, wie es beim GS-String der Fall ist.

Aus diesem Grund wurde in Kapitel 6 auf eine *chirale Hypersymmetrie* reduziert. Die Vereinfachung der Hypersymmetrie auf einen der beiden Majorana-Weyl-Spinoren ließ sich wiederum problemlos auf das relativistische Punktteilchen anwenden.

Bei der Verallgemeinerung auf den String in Kapitel 8 ergab sich zwar wieder keine Eichsymmetrie, die Bewegungsgleichungen konnten jedoch durch Ausnutzen der lokalen Reparametrisierungsinvarianz und der Weyl-Reskalierung gelöst werden. Die Bewegungssgleichung, die die Dynamik der Spinoren beschreibt, wird aufgrund von $\Pi_a = 0$ redundant. Jegliche Dynamik der Koordinaten Y und θ_α ist, anstatt durch die Bewegungsgleichungen, allein durch die beliebige Wahl des Parameters $p(\sigma,\tau)$ festgelegt, wird also von außen vorgegeben. Es handelt sich folglich um eine reine Eichfreiheit, eine Beschreibung der physikalischen Stringfreiheitsgrade durch den chiralen Hyperstring ist also nicht möglich.

Als Ergebnis bleibt somit festzuhalten, daß es nicht möglich ist, auf der Grundlage von *Hypersymmetrie* eine Raumzeit-Formulierung des N=2 NSR-Strings zu konstruieren.

Anhang A

Lorentz- und Spinor-Notation

A.1 σ- und γ-Matrizen in 2+2 Dimensionen

Vierervektoren x^μ bestehen aus den Komponenten (x^0, x^1, x^2, x^3), die Metrik zum Heben und Senken der Lorentzindizes in 2+2 Dimensionen ist

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu} \quad . \tag{A.1}$$

Die Paulimatrizen sind definert als

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.2}$$

diese besitzen in drei Dimensionen die Spinorindexstruktur $(\sigma_i)_\alpha^{\ \beta}$.

Die erweiterten Paulimatrizen sind definiert als

$$\sigma_\mu = \left\{ \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{A.3}$$

sie tragen die Spinorindizes $(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha}$, den $SO(2,2)$ Vektorindizes entsprechen so zwei $SL(2,\mathbb{R})$ Spinorindizes. Die gequerten erweiterten Paulimatrizen $(\tilde\sigma_\mu)^{\dot\alpha\alpha}$ erhält man durch Anwendung des ϵ-Tensors

$$(\tilde\sigma_\mu)^{\dot\alpha\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\sigma_\mu)_{\beta\dot\beta} \quad . \tag{A.4}$$

Man erhält so zwei Sätze von erweiterten Paulimatrizen

$$\begin{aligned} \sigma_\mu &= (\mathbb{1}, +\vec\sigma) \\ \tilde\sigma_\mu &= (\mathbb{1}, -\vec\sigma) \quad , \end{aligned} \tag{A.5}$$

welche den Beziehungen

$$\begin{aligned}
(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\beta}} &= -2\delta_\alpha^{\ \beta}\delta_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}} \\
Tr\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu &= -2\eta^{\mu\nu} \\
(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha^{\ \beta} &= -2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^{\ \beta} \\
(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} &= -2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

genügen. Der ϵ-Tensor ist definiert als

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \\
\epsilon^{\alpha\beta} &= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

er genügt den Beziehungen

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma} &= \delta^\alpha_\gamma \\
\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} &= \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\gamma}} \quad .
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Die γ Matrizen sind definiert als

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{A.9}$$

Sie genügen der Clifford-Algebra $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}$. Multiplikation der γ-Matrizen, $\gamma_5 = -\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, liefert

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \tag{A.10}$$

welche mit allen γ-Matrizen antikommutiert $\{\gamma_5, \gamma_\nu\} = 0$.

A.2 Spinoren und Bispinoren

Ein allgemeiner Dirac d-Spinor ist gegeben durch

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \ldots \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad . \tag{A.11}$$

Dieser läßt sich in geraden Dimensionen d darstellen als

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad . \tag{A.12}$$

χ_α und $\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$ sind die beiden $\frac{d}{2}$-komponentigen Weyl-Spinoren.

Majorana-Spinoren, die die Bedingung $\Psi = \Psi^c$ erfüllen, sind definiert als

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad . \tag{A.13}$$

In $p+q$ Dimensionen können die Weyl-Spinoren zusätzlich die Majorana-Bedingung erfüllen, wenn die Signatur der Metrik $p-q=0$ mod 8 ist.

Das Heben und Senken der Spinor-Indizes α und $\dot{\alpha}$ erfolgt durch den antisymmetrischen ϵ-Tensor

$$V^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} V_\beta \ , \ V_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} V^\beta \ , \ V^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} V_{\dot{\beta}} \ , \ V_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} V^{\dot{\beta}} \quad . \tag{A.14}$$

Mit Hilfe der σ- Matrizen lassen sich Vektoren in Bispinoren verwandeln. In drei Dimensionen werden dazu die Paulimatrizen verwendet,

$$x_\alpha^\beta = (\sigma_i)_\alpha^\beta x_i = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad . \tag{A.15}$$

Anwendung des ϵ-Tensors liefert

$$x_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\gamma} x_\alpha^\gamma = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.16}$$

$x_{\alpha\beta}$ ist also symmetrisch in α und β.

In 2+2 Dimensionen erhält man die Bispinoren durch Kontraktion der Vektorindizes mit den erweiterten Paulimatrizen,

$$\begin{aligned} x_{\alpha\dot{\alpha}} &= (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + x^2 \\ x^1 - x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \\ x^{\dot{\alpha}\alpha} &= (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 - x^2 \\ -x^1 + x^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{A.17}$$

Ebenso läßt sich die Ableitung ∂_μ schreiben als

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \\ \partial^{\dot{\alpha}\alpha} &= (\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \quad . \end{aligned} \tag{A.18}$$

Das Heben und Senken der Spinorindizes der Bispinoren erfolgt wiederum mit dem ϵ-Tensor

$$V^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}V_{\beta\dot{\beta}} \quad . \tag{A.19}$$

Ableitungen der Bispinoren werden zu

$$\partial_{\alpha\dot{\alpha}}x^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_{\alpha}^{\ \beta}\delta_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}} \quad . \tag{A.20}$$

Auf die gleiche Weise lassen sich auch die Indizes von Tensoren mit Rang zwei in Spinorindizes aufspalten. Dieses folgt aus

$$x_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} = (\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}(\sigma^{\nu})_{\beta\dot{\beta}}x_{\mu\nu} \quad . \tag{A.21}$$

Für eine vollständige Beschreibung dieser Methoden wird hier an [7] verwiesen.

A.3 Kommutierende Spinoren in 2+2 Dimensionen

Die $SO(2,2)$ Spinoren lassen sich aufgrund $p-q=2-2=0$ in 2+2 Dimensionen als Majorana-Weyl-Spinoren schreiben. Dieses bedeutet, daß $(\chi_{\alpha})^* = \chi_{\alpha}$ und $(\bar{\eta}^{\dot{\alpha}})^* = \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$ gilt, d.h. die beiden chiralen Weyl-Spinoren reell sind.

Die beiden rellen Majorana-Weyl-Spinoren lassen sich zu einem Dirac-Spinor zusammenfassen

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad . \tag{A.22}$$

Der Unterschied zu 3+1 Dimensionen besteht hier darin, daß dort die beiden Chiralitäten der Weyl-Spinoren nicht reell sind, vielmehr ist $(\chi_{\alpha})^* = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ und $(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^* = \chi^{\alpha}$ (siehe z.B. [7, 8]). Da χ_{α} und $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ in 2+2 Dimensionen Majorana-Weyl-Spinoren sind, existiert anders als in 3+1 Dimensionen keine Abbildung zwischen der gepunkteten und ungepunkteten Darstellung.

Aufgrund der Signatur $(2,2)$ der Metrik ist der zu Ψ adjungierte Spinor $\bar{\Psi}$ nicht wie gewöhnlich $\bar{\Psi} \equiv \Psi^{\dagger}\gamma_0$, sondern[1]

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^{T}\gamma_0\gamma_2 \quad , \tag{A.23}$$

aus dem $\dagger$ wird ein T, da alle Spinorkoordinaten reell sind. Die hermitesch-konjugierten γ-Matrizen sind durch

$$\gamma^{\mu\dagger} = -\gamma^2\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0\gamma^2 \tag{A.24}$$

[1] Im allgemeinen muß der hermitesch-konjugierte Spinor von rechts mit allen γ-Matrizen der zeitartigen Dimensionen multipliziert werden.

definiert. Der Unterschied zum Verhalten in 3+1 Dimensionen liegt darin, daß die γ-Matrix von links und rechts mit den γ-Matrizen der zeitartigen Dimensionen multipliziert werden muß, um die hermitesch-konjugierte γ-Matrix zu erhalten. Das negative Vorzeichen hängt davon ab, welches Vorzeichen den zeitartigen bzw. raumartigen Koordinaten in der Metrik zugeordnet wird (siehe z.B. [19]).

Der zu Ψ adjungierte Spinor läßt sich nun explizit angeben:

$$
\begin{aligned}
\bar{\Psi} &= \left(\chi_1, \chi_2, \bar{\chi}^{\dot{1}}, \bar{\chi}^{\dot{2}} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \tilde{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\chi_1, \chi_2, \bar{\chi}^{\dot{1}}, \bar{\chi}^{\dot{2}} \right) \cdot \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \\
&= \left(\chi_2, -\chi_1, -\bar{\chi}^{\dot{2}}, \bar{\chi}^{\dot{1}} \right) \\
&= \left(\chi^1, \chi^2, \bar{\chi}_{\dot{1}}, \bar{\chi}_{\dot{2}} \right) \\
&= (\chi^\alpha, \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}) \quad . \qquad \text{(A.25)}
\end{aligned}
$$

Das Spinor-Skalarprodukt ist definiert als

$$
\begin{aligned}
\chi^\alpha \chi_\alpha &= \chi^1 \chi_1 + \chi^2 \chi_2 = \epsilon^{12} \chi_2 \chi_1 + \epsilon^{21} \chi_1 \chi_2 \\
&= \chi_2 \chi_1 - \chi_1 \chi_2 = \chi_2 \chi_1 - \chi_2 \chi_1 \\
&= 0 \quad , \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &= \bar{\chi}_{\dot{1}} \bar{\chi}^{\dot{1}} + \bar{\chi}_{\dot{2}} \bar{\chi}^{\dot{2}} = \epsilon^{\dot{1}\dot{2}} \bar{\chi}_{\dot{1}} \bar{\chi}_{\dot{2}} + \epsilon^{\dot{2}\dot{1}} \bar{\chi}_{\dot{2}} \bar{\chi}_{\dot{1}} \\
&= \bar{\chi}_{\dot{1}} \bar{\chi}_{\dot{2}} - \bar{\chi}_{\dot{2}} \bar{\chi}_{\dot{1}} = \bar{\chi}_{\dot{1}} \bar{\chi}_{\dot{2}} - \bar{\chi}_{\dot{1}} \bar{\chi}_{\dot{2}} \\
&= 0 \quad . \qquad \text{(A.27)}
\end{aligned}
$$

Zudem gilt

$$
\eta^\alpha \chi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \eta_\beta \epsilon_{\alpha\gamma} \chi^\gamma = -\epsilon^{\beta\alpha} \epsilon_{\alpha\gamma} \eta_\beta \chi^\gamma = -\delta^\beta{}_\gamma \eta_\beta \chi^\gamma = -\eta_\beta \chi^\beta = \chi_\alpha \eta^\alpha . \qquad \text{(A.28)}
$$

Eine Ausnahme des Hebens und Senkens von Spinorindizes tritt bei den partiellen Ableitungen nach Spinoren auf. Diese sind definiert als

$$
\begin{aligned}
\partial_\alpha &\equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \\
\partial^\alpha &\equiv \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \\
\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} &\equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \\
\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} &\equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \quad . \qquad \text{(A.29)}
\end{aligned}
$$

Anders als bei den Spinoren gilt hier

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta &= -\partial^\alpha \\ \epsilon_{\alpha\beta}\partial^\beta &= -\partial_\alpha \quad . \end{aligned} \tag{A.30}$$

Dieses zeigt sich durch

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta\theta^\gamma = \epsilon^{\alpha\beta}\delta_\beta^{\ \gamma} &= \epsilon^{\alpha\gamma} \\ \partial^\alpha\theta^\gamma = \partial^\alpha\epsilon^{\gamma\delta}\theta_\delta = \epsilon^{\gamma\delta}\delta^\alpha_\delta = \epsilon^{\gamma\alpha} &= -\epsilon^{\alpha\gamma} \\ \rightarrow \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta &= -\partial^\alpha \quad . \end{aligned}$$

Das gleiche gilt analog für die gepunkteten Indizes.

Anhang B

Zusammenhang zwischen Spinor- und Vektor-Notation

Da es sich in Kapitel 5 als vorteilhaft erweist, an Stelle der Spinor- die Vektor-Notation zu benutzen, soll hier der Zusammenhang zwischen beiden verdeutlicht werden:

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_a\phi &= (\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \begin{pmatrix} 0 & -(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_a\phi_\beta \\ \partial_a\bar{\phi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\
&= (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_a\phi_\beta - (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\theta^\alpha\partial_a\bar{\phi}^{\dot{\beta}} \\
&= (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}(\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_a\phi_\beta - \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\epsilon_{\alpha\beta}\theta^\alpha\partial_a\bar{\phi}^{\dot{\beta}}) \\
&= (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}(\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_a\phi_\beta - \theta_\beta\partial_a\bar{\phi}_{\dot{\alpha}}) \quad . \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

Hier ist darauf zu achten, daß je nach Signatur (p,q) der Metrik $\eta_{\mu\nu}$ der adjungierte Spinor $\bar{\theta}$ als $\bar{\theta} = \theta^\dagger\gamma_0\gamma_2...$ definiert ist. Für 2+2 Dimensionen ist dieses gerade gegeben durch (A.23).

Multiplikation mit $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}$ ergibt unter Benutzung von (A.6)

$$
\begin{aligned}
(\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_a\phi)_{\alpha\dot{\beta}} &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}(\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_a\phi_\beta - \theta_\beta\partial_a\bar{\phi}_{\dot{\alpha}}) \qquad \text{(B.2)} \\
&= -2\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}(\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_a\phi_\beta - \theta_\beta\partial_a\bar{\phi}_{\dot{\alpha}}) \\
&= +2(\theta_\alpha\partial_a\bar{\phi}_{\dot{\beta}} - \partial_a\phi_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\beta}}) \quad .
\end{aligned}
$$

Man gelangt also von der Vektor- zur Spinor-Notation durch

$$
\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\partial_a\phi \iff +2(\theta_\alpha\partial_a\bar{\phi}_{\dot{\beta}} - \partial_b\phi_\alpha\bar{\theta}_{\dot{\beta}}) \quad . \qquad \text{(B.3)}
$$

Die Verwendung von γ_5, definiert durch (A.10), läßt sich damit begründen, daß die Hypersymmetrie-Generatoren Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ aus Kapitel 2, Abschnitt 2.2, angewandt auf $X_{\alpha\dot{\alpha}}$ einen Bispinor $(\theta_\alpha \partial_a \bar{\phi}_{\dot{\beta}} - \partial_b \phi_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}})$ erzeugen, und es somit für die Invarianz unter Hypersymmetrie zwingend notwendig ist, daß dieser Ausdruck zwei unterschiedliche Vorzeichen hat. Die Äquivalenz von Vektor- und Spinor-Notation verlangt dann für *kommutierende* Spinoren ein zusätzliches γ_5 (allgemein $\tilde{\gamma}$). Anders ist dies in der Supersymmetrie, dort *antikommutieren* die Spinoren, so daß durch Änderung der Reihenfolge unterschiedliche Vorzeichen erreicht werden können.

Durch eine ähnliche Vorgehensweise wie (B.3) läßt sich zeigen, daß für *kommutierende* Majorana-Weyl-Spinoren in geraden Dimensionen die folgenden Identitäten gelten:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}\phi &= -\bar{\phi}\theta \\
\bar{\theta}\tilde{\gamma}\phi &= -\bar{\phi}\tilde{\gamma}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1}\phi &= +\bar{\phi}\gamma_{a_1}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1}\tilde{\gamma}\phi &= -\bar{\phi}\gamma_{a_1}\tilde{\gamma}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1a_2}\phi &= +\bar{\phi}\gamma_{a_1a_2}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1a_2}\tilde{\gamma}\phi &= +\bar{\phi}\gamma_{a_1a_2}\tilde{\gamma}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1\ldots a_3}\phi &= -\bar{\phi}\gamma_{a_1\ldots a_3}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1\ldots a_3}\tilde{\gamma}\phi &= +\bar{\phi}\gamma_{a_1\ldots a_3}\tilde{\gamma}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1\ldots a_4}\phi &= -\bar{\phi}\gamma_{a_1\ldots a_4}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1\ldots a_4}\tilde{\gamma}\phi &= -\bar{\phi}\gamma_{a_1\ldots a_4}\tilde{\gamma}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1\ldots a_5}\phi &= +\bar{\phi}\gamma_{a_1\ldots a_5}\theta \\
\bar{\theta}\gamma_{a_1\ldots a_5}\tilde{\gamma}\phi &= -\bar{\phi}\gamma_{a_1\ldots a_5}\tilde{\gamma}\theta \quad .
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Diese sind auch explizit in Kapitel 5 benutzt worden.

Anhang C

String-Weltflächen-Koordinaten

Die beiden Parameter mit denen die zweidimensionale *Weltfläche* des Strings parametrisiert wird sind σ und τ. Diese lassen sich zusammenfassen zu

$$\sigma^a = (\sigma, \tau) \quad . \tag{C.1}$$

Der ϵ-Tensor(dichte) auf der Weltfläche ist

$$\epsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{C.2}$$

Die Ableitungen nach den Weltflächen-Parametern sind definiert als

$$\begin{aligned} \dot{X} &\equiv \frac{\partial X}{\partial \tau} \\ X' &\equiv \frac{\partial X}{\partial \sigma} \end{aligned} \tag{C.3}$$

oder zusammengefaßt

$$\partial_a X \equiv \frac{\partial X}{\partial \sigma^a} \quad . \tag{C.4}$$

Beim Punktteilchen reduziert sich dieses lediglich auf den Parameter τ und die Ableitung ∂_τ.

Das Integrationsmaß für den String wird als

$$d^2\sigma \equiv d\sigma d\tau \tag{C.5}$$

bezeichnet. Griechische Indizes bezeichnen fortdauernd Spinoren, während die lateinischen Weltflächenindizes sind.

$h^{ab}(\sigma,\tau)$ ist die inverse Metrik auf der Weltfläche, es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} h^{ab} &= h^{ba} \\ h &= -det(h_{ab}) \\ \delta h &= -h_{ab}(\delta h^{ab})h \quad . \end{aligned} \tag{C.6}$$

Die verwendeten Variablen tragen in Bezug auf die Weltfläche und die Raumzeit folgende Dimensionen:

	X	∂_τ	∂_σ	$d^2\sigma$	Π_a	θ	$\bar{\theta}$	α'
worldsheet d	0	1	1	-2	1	0	0	0
space-time D	-1	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2

Tabelle C.1: Weltflächen- und Raumzeit-Dimensionen der verwendeten Ableitungen, Spinoren, etc. . Die Einträge sind definiert als $1 \equiv GeV$ und $-1 \equiv GeV^{-1}$.

Literaturverzeichnis

[1] M.B. Green, J.H. Schwarz und E. Witten, *Superstring theory*, Volume I Introduction, Cambrige University Press 1996.

[2] M. Kaku, *Introduction to superstrings and M-theory*, Second Edition Springer 1999.

[3] F. Gliozzi, J. Scherk und D. Olive, *Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model*, Nucl. Phys. B122 (1977) 253.

[4] N. Marcus, *The N=2 open string*, Nucl. Phys. B387 (1992) 263;
A tour through N=2 strings, hep-th/9211059.

[5] C. Devchand und O. Lechtenfeld, *Extended self-dual Yang-Mills from the N=2 string*, hep-th/9712043, Nucl. Phys. B516 (1998) 255;
String-induced Yang-Mills coupling to self-dual gravity, Nucl. Phys. B539 (1999) 309.

[6] J. Wess und J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Cambridge University Press 1994.

[7] I.L. Buchbinder und S.M. Kuzenko, *Ideas and methods of supersymmetry and supergravity or a walk through superspace*, Institute of Physics Publishing Bristol 1995.

[8] L.H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press 1996.

[9] H. Kalka und G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner-Taschenbücher 1997.

[10] W. Siegel, *Hidden local supersymmetry in the supersymmetric particle action*, Phys. Lett. B128 (1983) 397.

[11] L. Brink und M.B. Green, *Point-like particles and off-shell supersymmetry algebras*, Phys. Lett. B106 (1981) 393.

[12] L. Brink und J.H. Schwarz, *Quantum superspace* Phys. Lett. B100 (1981) 310.

[13] B. deWit und J. Smith, *Field theory in particle physics*, Volume I, North Holland Physics Publishing 1986.

[14] M.B. Green und J.H. Schwarz, *Covariant description of superstrings*, Phys. Lett. B136 (1984) 367.

[15] J. Polchinski, *String theory*, Volume II, Cambridge University Press 1998.

[16] M.B. Green, *String and superstring theory*, in: Supersymmetry, supergravity, superstrings'86, Proceedings of the Trieste spring school.

[17] L. Brink, J.H. Schwarz und J. Scherk, *Supersymmetric Yang-Mills theories*, Nucl. Phys. B121 (1977) 77.

[18] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, 3. Auflage Oxford University Press 1997.

[19] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Volume I Foundations, Cambridge University Press 1995.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld für die Vergabe dieser Diplomarbeit und seiner ständigen Bereitschaft, immer freundlich und mit viel Geduld, meine unzähligen Fragen zu beantworten.

Zu großem Dank verpflichtet bin ich weiterhin Herrn Prof. Dr. Bengt Petersson, der sich bereit erklärt hat, die Zweitkorrektur dieser Arbeit zu übernehmen. Ohne ihn wäre diese auswärtige Diplomarbeit nicht möglich gewesen.

Mein Dank gilt außerdem Bernd Niemeyer, Helge Dennhardt sowie dem Rest meiner Arbeitsgruppe für die hilfreichen Diskussionen. Außerdem bedanke ich mich bei Carsten Luckmann für zahlreiche Tips im Umgang mit LaTeX.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei Franziska für die langjährige Unterstützung während meines Studiums bedanken.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.