Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur SRT

von DOMENICO GIULINI

Blatt 2

Vorbereitendes

Als $n+1$ dimensionalen Minkowskiraum M^{n+1} bezeichnen wir den $n+1$ dimensionalen reellen affinen Raum dessen zugehöriger Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ mit dem „Minkowski-Skalarprodukt“ $\eta(v, w) := v \cdot w$ versehen ist. Für die Standardbasis $\{e_0, e_1, \cdots e_n\}$ gilt

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu} := \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{für } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1}$$

Wir schreiben $v^2 := v \cdot v$ und definieren eine „Minkowski Norm“

$$\|v\|_\eta := \sqrt{|v \cdot v|} \tag{2}$$

die natürlich keine Norm im eigentlichen Sinne ist (warum nicht). Ein Vektor v heisst zeit-, licht- oder raumartig, je nachdem $v^2 > 0, = 0$ oder < 0 ist. Der Nullvektor wird meist mit zu den lichtartigen Vektoren gerechnet. Ein Vektor $\neq 0$ heisst kausal, wenn er entweder zeit- oder lichtartig ist. Ein linearer Unterraum $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt raumartig, lichtartig, oder zeitartig, je nachdem $\eta\big|_V$ positiv definit, nicht positiv definit aber positiv semidefinit, oder aber indefinit ist. Das Orthokomplement eines Vektors $v \neq 0$ ist der Unterraum

$$v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \cdot w = 0\}\,. \tag{3}$$

Es ist n dimensional und zeit-, licht- oder raumartig, falls v raum-, licht- bzw. zeitartig ist (siehe unten). Beachten Sie: Ist v lichtartig so ist $\{v\} \cap v^\perp = \{v\}$, andernfalls ist der Durchschnitt leer.

Aufgabe 1 (Kausale Vektoren)

Seien v und w kausal. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \text{entweder} \qquad & v^0 w^0 > 0 \quad \text{und} \quad v \cdot w \geq 0 \\ \text{oder} \qquad & v^0 w^0 < 0 \quad \text{und} \quad v \cdot w \leq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

wobei die Gleichheitszeichen in $\geq$ und $\leq$ genau dann gelten, wenn v und w lichtartig und parallel bzw. antiparallel sind. (Tipp: Benutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für den räumlichen Teil des Skalarproduktes.) Insbesondere gelten die Ungleichungen streng, wenn einer der Vektoren zeitartig ist. Schließen Sie daraus, dass jeder Vektor, der zu einem zeitartigen Vektor orthogonal ist (im Sinne von $v \cdot w = 0$) raumartig sein muss und dass jeder Vektor, der zu einem lichtartigen Vektor orthogonal ist, raum- oder lichtartig sein muss, wobei im letzteren Fall beide linear abhängig sein müssen. Schließlich argumentieren Sie direkt, dass im $\mathbb{R}^{n+1}$ für $n \geq 2$ die zu einem raumartigen Vektor orthogonalen Vektoren raum-, licht- oder zeitartig sein können.

Aufgabe 2 (Zeitorientierung)

Zeigen Sie: Die Relation $v \sim w \Leftrightarrow v \cdot w > 0$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der zeitartigen Vektoren mit zwei Äquivalenzklassen. Diese nennt man „Zeitorientierungen“. Zwei zeitartige Vektoren v, w haben also die gleiche oder entgegengesetzte Zeitorientierung, je nachdem $v \cdot w > 0$ oder < 0 gilt. (Tipp: Nur die Transitivität der Relation ist nicht trivial. Sind also u, v, w zeitartig mit $u \cdot v > 0$ und $v \cdot w > 0$, so muss $u \cdot w > 0$ gezeigt werden. Dazu zerlege man u und w in ihre Anteile parallel und senkrecht zu v.) Zeigen Sie weiter, dass zeitartige Vektoren gleicher Zeitorientierung einen Kegel bilden, d.h. dass mit v auch λv für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ und mit v und w auch $v + w$ dieser Äquivalenzklasse angehören.

Aufgabe 3 (Cauchy-Schwarz- und Dreiecksungleichung)

In einem Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt folgt bekanntlich aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$v^2 w^2 \geq (v \cdot w)^2 \tag{5}$$

die Dreiecksungleichung

$$\|v\| + \|w\| \geq \|v + w\| \,, \tag{6}$$

wobei Gleichheit in (5) und (6) genau dann gilt, wenn v und w linear abhängig bzw. parallel ($v = \lambda w$ mit $\lambda > 0$) sind. Wie vorher betrachte man nun den Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 2$) mit indefinitem Skalarprodukt (1). Zeigen Sie, dass nun die folgende modifizierten Cauchy-Schwarz-Ungleichungen gelten:

$$v^2 w^2 \star (v \cdot w)^2 \,, \quad \text{wobei} \star \begin{cases} \geq & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ raumartig} \\ = & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ lichtartig} \\ \leq & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ zeitartig} \end{cases} \tag{7}$$

Überlegen Sie sich mögliche Dreiecksungleichungen als Folge von (7) mit der verallgemeinerten „Norm" (2). Zeigen Sie insbesondere, dass für zeitartige Vektoren v, w gleicher Zeitorientierung die „umgekehrte Dreiecksungleichung" gilt:

$$\|v + w\|_\eta \geq \|v\|_\eta + \|w\|_\eta \,. \tag{8}$$

Sie ist Grundlage des sogenannten „Zwillingsparadoxons".

Aufgabe 4 (nochmals „umgekehrte" Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Zeigen Sie: Die strenge „umgekehrte" Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$v^2 w^2 < (v \cdot w)^2 \tag{9}$$

gilt für festes v genau dann für jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ der linear unabhängig zu v ist, wenn v zeitartig ist. [Tipp: Zerlegen Sie w in seine Komponenten parallel und orthogonal zu v.]

Wir betrachten nun eine Gerade durch einen Punkt $r \in M^{n+1}$ in Richtung v:

$$G_r(v) := \{r + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \,, \tag{10}$$

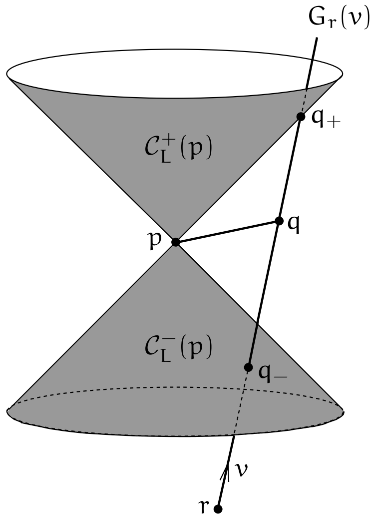
und den Lichtkegel mit Vertex am Punkte $p \notin G_r(v)$:

$$\mathcal{C}_L(p) := \{x \in M^{n+1} \mid \|x - p\|_\eta = 0\} \,. \tag{11}$$

Zeigen Sie: ist v zeitartig, so existieren immer genau zwei Schnittpunkte. Ist hingegen v lichtartig, so existiert genau ein Schnittpunkt falls $p - r \notin v^\perp$ und kein Schnittpunkt falls $p - r \in v^\perp$.

Aufgabe 5 (Ein erstaunlicher „Höhensatz" im Minkowskiraum)

$G_r(v)$ sei eine zeitartige Gerade durch r in Richtung v (vgl. (10)) und $\mathcal{C}_L(p)$ der Lichtkegel mit Vertex an einem Punkt $p \notin G_r(V)$ (vgl. (11)). Wie in Aufgabe 4 gezeigt, schneidet die Gerade den Lichtkegel in zwei Punkten q_+ und q_-. Sei q ein beliebiger Punkt auf $G_r(n)$ zwischen q_+ und q_-; siehe Abbildung.



Zeigen Sie:

$$\|p - q\|_\eta^2 = \|q_+ - q\|_\eta \cdot \|q - q_-\|_\eta \,. \tag{12}$$

Dieser Sachverhalt entspräche einem Analogon des Höhensatzes in der Euklidischen Geometrie, wenn $p - q$ orthogonal zur Geraden $G_r(n)$ stünde, das ist aber nicht gefordert. Die Beziehung (12) gilt für *jedes* q zwischen q_+ und q_-!

[Tipp: Die Vektoren $(q_+ - p) = (q - p) + (q_+ - q)$ und $(q_- - p) = (q - p) + (q_- - q)$ sind Lichtartig. Also gilt

$$\|q - p\|_\eta^2 = (q_+ - q)^2 + 2(q - p) \cdot (q_+ - q) \,, \tag{13}$$

$$\|q - p\|_\eta^2 = (q_- - q)^2 + 2(q - p) \cdot (q_- - q) \,. \tag{14}$$

Nutzen Sie, dass $q_+ - q$ und $q - q_-$ parallel sind, so dass gilt $q_+ - q = \lambda(q - q_-)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Multiplizieren Sie nun (14) mit λ und addieren Sie das zu (13).]

Zeigen Sie weiter: $p - q$ steht genau dann orthogonal zu $G_r(v)$, d.h. $(p - q) \cdot v = 0$, wenn q in der Mitte zwischen q_+ und q_- liegt. Also sind gemäß der Einsteinschen Synchronisationsvorschrift alle bezüglich $G_r(v)$ zu q gleichzeitigen Ereignisse durch $q + v^\perp$, d.h. die zu $G_r(v)$ orthogonale Hyperfläche durch q gegeben.