Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 8 **SoSe 2024** **Abgabe: 02.06.2024**

[H19] Nullpunktsenergie des harmonischen Oszillators **(3 Punkte)**

Leiten Sie mit Hilfe der Unschärferelation eine untere Grenze für die Energie eines harmonischen Oszillators,

$$H \;=\; \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}X^2\,,$$

in einem stationären Zustand her.

Hinweis: Drücken Sie $\langle H\rangle$ durch $\langle X^2\rangle$ aus und minimieren Sie.

[H20] Streuung am Delta-Potential **(4 Punkte)**

Ein Teilchen der Masse m wird gestreut am Potential

$$V(x) \;=\; v_0\,\delta(x) \qquad \text{mit} \qquad v_0 \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Setzen Sie die Wellenfunktion in den Bereichen $x > 0$ und $x < 0$ an. Welche Anschlussbedingungen muss die Wellenfunktion an der Stelle $x = 0$ erfüllen?

(b) Man bestimme die Transmissionsmatrix $Q(E)$ und die Streumatrix $S(E)$. Für welches Vorzeichen von v_0 und welche Energie gibt es einen Pol und was bedeutet er?

(c) Geben Sie Transmissions- und Reflexionskoeffizient als Funktion der Energie an (mit Skizze). Zeigen Sie, dass $R(E) + T(E) = 1$ gilt.

[H21] Reflexionsfreies Potential und Supersymmetrie **(3 Punkte)**

Betrachten Sie den Hamilton-Operator

$$H = \tfrac{1}{2}(Q^+Q^- - \mathbf{1})\,,$$

wobei die Operatoren $Q^\pm$ im Ortsraum durch die Differentialoperatoren

$$Q^\pm \;\doteq\; \mp\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \tanh x$$

gegeben sind. Wir haben $\hbar = m = 1$ gesetzt.

(a) Wie lautet das Potential $V(x)$ in diesem Hamilton-Operator?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $Q^-\psi_b = 0$. Was ist ψ_b in Bezug auf H?

(c) Betrachten Sie den mit H verwandten Hamilton-Operator

$$\widehat{H} \;=\; \tfrac{1}{2}(Q^-Q^+ - \mathbf{1})\,.$$

Wie lauten die Eigenfunktionen $\phi_k(x)$ und die Eigenwerte E_k von $\widehat{H}$?

(d) Berechnen Sie $\psi_k \;=\; Q^+\phi_k$. Welche Bedeutung hat ψ_k für den ursprünglichen Hamilton-Operator H? Geben Sie den Transmissionskoeffizienten für das Streuproblem am Potential $V(x)$ an.