

Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 9

SoSe 2024

Abgabe: 09.06.2024

[H22] Zwei Delta-Zacken (3 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einer Dimension im Potential

$$V(x) = -V_0 [\delta(x+a) + \delta(x-a)] \quad \text{mit} \quad V_0 > 0 \quad \text{und} \quad a > 0 .$$

- (a) Bestimmen Sie die Gleichungen für die Energieeigenwerte der Bindungszustände.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie des Potentials.

- (b) Lösen Sie die Gleichungen für die Grenzfälle $a \rightarrow 0$ und $a \rightarrow \infty$. Skizzieren Sie die Eigenwerte als Funktion von a .

Bemerkung: Dies ist ein Modell für das H_2^+ -Ion. Die Annäherung der Kerne ist energetisch günstig und führt zur chemischen Bindung.

[H23] Verallgemeinerter Potenzreihenansatz (4 Punkte)

Gegeben sei für ein Teilchen der Masse m auf der Halbachse $x > 0$ das Potential

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2} a^2 \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a} \right)^2 .$$

Durch die Einführung einer dimensionslosen Variable $\xi = \beta x$ wird die stationäre Schrödingergleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{\beta^4 a^4}{\xi^2} - \xi^2 + 2(\epsilon + \beta^2 a^2) \right] \psi(\xi) = 0 ,$$

wobei $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$ und $\epsilon = E/\hbar\omega$ sowie $\psi(\xi) = \hbar\omega/2 \phi_E(x)$.

- (a) Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion ψ für $\xi \rightarrow \infty$.
(b) Man mache den Ansatz

$$\psi(\xi) = W(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad \text{und} \quad W(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{s+n} \quad \text{mit} \quad a_0 \neq 0 .$$

Gewinnen Sie eine Differentialgleichung für W .

- (c) Akzeptieren Sie, dass $a_1 = 0$ und s die positive Lösung von

$$s(s-1) = \beta^4 a^4$$

ist. Leiten Sie eine Rekursionsbeziehung für die Koeffizienten a_n her.

- (d) Das asymptotische Verhalten von ψ erfordert, dass die Reihe für $W(\xi)$ abbricht. Jeder diskrete Energiewert E_m ist dadurch bestimmt, dass $a_n = 0$ für $n > 2m$ mit $m = 0, 1, 2, \dots$. Ermitteln Sie aus dieser Bedingung das Energiespektrum.

Bitte wenden

[H24] Kohärente Zustände**(3 Punkte)**

Ein harmonischer Oszillator befinde sich zur Zeit $t = 0$ in einem Eigenzustand des Vernichtungsoperators,

$$a|\alpha(t=0)\rangle = \alpha_0|\alpha(t=0)\rangle \quad \text{für ein } \alpha_0 \in \mathbb{C}.$$

- (a) Bestimmen Sie diesen Eigenzustand, indem Sie $|\alpha(t=0)\rangle$ nach den Energieeigenfunktionen $|n\rangle$ entwickeln und die Entwicklungskoeffizienten berechnen. Zeigen Sie, dass die zeitliche Entwicklung des Zustands gegeben ist durch

$$|\alpha(t)\rangle \sim e^{-i\omega t/2} e^{\alpha(t)a^\dagger} |0\rangle \quad \text{mit} \quad \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}.$$

- (b) Normieren Sie den Zustand $|\alpha(t)\rangle$ und berechnen Sie den Erwartungswert $\langle N \rangle$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit W_n an dafür, dass sich der Oszillator im n -ten Energieeigenzustand befindet, und drücken Sie diese als Funktion von $\langle N \rangle$ aus.
- (c) Betrachten Sie $\langle H \rangle$ für große $\langle N \rangle$. Welche Größe läßt sich im Vergleich zur klassischen Theorie als Amplitude der Schwingung interpretieren?