

Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 11

SoSe 2024

Abgabe: 23.06.2024

[H27] Paramagnetische Elektronspin-Resonanz (3 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m , Ladung e und Spin $1/2$ befindet sich in einem zeitabhängigen Magnetfeld $\vec{B}(t)$. Der Hamiltonoperator dieses Systems lautet

$$H = \frac{e\hbar}{mc} \vec{B}(t) \cdot \vec{S} = \frac{e\hbar}{mc} (B_1 S_x \cos \omega t + B_1 S_y \sin \omega t + B_0 S_z) .$$

(a) Verwenden Sie zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung den Ansatz

$$\begin{pmatrix} \langle + | \psi(t) \rangle \\ \langle - | \psi(t) \rangle \end{pmatrix} = \exp(i\lambda t) \begin{pmatrix} a_1 e^{-\frac{i\omega t}{2}} \\ a_2 e^{+\frac{i\omega t}{2}} \end{pmatrix} .$$

Welche Werte für λ sind möglich? Die Rotationsfrequenz des Magnetfeldes sei gleich der Präzessionsfrequenz des Teilchens: $\omega = eB_0/mc$ (Siehe Präsenzübung [P27]). Bestimmen Sie a_1 und a_2 für alle erlaubten Werte von λ .

(b) Zur Zeit $t = 0$ ist das System im Eigenzustand von S_z mit Eigenwert $s_z = 1/2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit $t > 0$ der Wert $s_z = -1/2$ gefunden wird.

[H28] Spin-Bahn-Kopplung (3 Punkte)

Die Bewegung eines Protons (Spin $1/2$) in einem rotationssymmetrischen Zentralpotential wird durch den Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ mit

$$H_0 = \frac{1}{2m} P^2 + V(R) \quad \text{und} \\ H_1 = \alpha \hat{L} \cdot \hat{S} \quad \text{für } \alpha = \text{konst.}$$

beschrieben. H_1 beschreibt dabei die Spin-Bahn-Kopplung.

Im Fall fehlender Spin-Bahn-Kopplung ($\alpha=0$) lassen sich die Eigenzustände von H als Tensorprodukt

$$|n, \ell m_\ell, s m_s\rangle = |n \ell m_\ell\rangle \otimes |s m_s\rangle$$

aus einem Bahndrehimpuls-Eigenzustand $|n \ell m_\ell\rangle$ und einem Spin-Eigenzustand $|s m_s\rangle$ schreiben (n ist eine weitere Quantenzahl). Die Eigenenergien für $\alpha=0$ sind $E_{n,\ell}^0$. Betrachten Sie im folgenden den Fall $\alpha \neq 0$.

(a) Verwenden Sie die Tensorprodukt-Basiszustände $\{|n, \ell m_\ell, s m_s\rangle\}$ und geben Sie H bei festem n explizit in dieser Darstellung für $\ell=0$ und $\ell=1$ an. Es gilt die Beziehung:

$$\hat{L} \cdot \hat{S} = \frac{1}{2} (\hat{L}_+ \hat{S}_- + \hat{L}_- \hat{S}_+) + \hat{L}_z \hat{S}_z .$$

Bitte wenden

- (b) Geben Sie die Eigenzustände und Eigenenergien von H an. Benutzen Sie hierzu, dass die Drehimpulsoperatoren \hat{J}^2 , \hat{L}^2 , \hat{S}^2 und J_z miteinander vertauschen.

Bemerkung: Man kann nun die Eigenvektoren von H in (b) durch die Produktzustände $\{|n, \ell m_\ell, s m_s\rangle\}$ ausdrücken. Ein Vergleich mit (b) gibt dann die Basistransformation. Die dabei auftretenden Koeffizienten heißen *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* (Siehe Präsenzübung [P28]).

[H29] Dreidimensionaler harmonischer Oszillator (4 Punkte)

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{m\omega^2}{2}r^2\right)\psi_E = E\psi_E.$$

- (a) Machen Sie den Separationsansatz $\psi_E(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r}\chi_{E,\ell}(r)Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)$ und zeigen Sie, dass $\chi_{E,\ell}(r)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\chi_{E,\ell}(r)}{dr^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \lambda^2 r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)\chi_{E,\ell}(r) = 0$$

mit $\lambda = m\omega/\hbar$ erfüllt.

- (b) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $\chi_{E,\ell}(r)$ für $r \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$. Setzen Sie

$$\chi_{E,\ell}(r) = r^{\ell+1} e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} u_{E,\ell}(r)$$

und finden Sie die Differentialgleichung für $u_{E,\ell}(r)$.

- (c) Substituieren Sie $u_{E,\ell}(r) = v_{E,\ell}(\eta)$ mit $\eta = \lambda r^2$ und geben Sie die Differentialgleichung für $v_{E,\ell}(\eta)$ an. Entwickeln Sie $v_{E,\ell}(\eta)$ in eine Potenzreihe

$$v_{E,\ell}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n$$

und bestimmen Sie die Rekursionsbeziehung für die Koeffizienten.

- (d) Die Forderung nach polynomialen Lösungen liefert eine Abbruchbedingung für die Rekursionsbeziehung der Koeffizienten. Berechnen Sie über die Abbruchbedingung die Energieeigenwerte $E_{N,\ell}$, wobei $N = 0, 1, \dots$ geschickt zu wählen ist. In kartesischen Koordinaten findet man übrigens $E_{n_1, n_2, n_3} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})$. Verifizieren Sie, dass Sie tatsächlich die gleichen Energien und Entartungsgrade gefunden haben.