Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 12 | **SoSe 2024** | **Abgabe: 30.06.2024**

[H30] Sphärischer Potentialtopf (4 Punkte)

Gegeben sei das dreidimensionale Potential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |\vec{r}| \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad V_0 > 0 \quad \text{und} \quad R > 0\,.$$

(a) Machen Sie einen Separationsansatz für den Winkel- und Radialanteil der stationären Wellenfunktion und formulieren Sie die radiale Schrödingergleichung. Man überprüfe explizit, dass

$$j_0 = \frac{\sin z}{z} \qquad \text{und} \qquad n_0 = -\frac{\cos z}{z}$$

mit $z = k_{\mathrm{i,a}} r$ Lösungen der radialen Gleichung für ℓ=0 sind, wobei k_{i} und k_{a} Konstanten im Innen- bzw. Außenraum sind.

(b) Wie lauten bei ℓ=0 die physikalisch erlaubten Wellenfunktionen der Bindungszustände im Innen- und Außenraum?

Hinweis: Im Außenraum wähle man zweckmäßigerweise die Hankelfunktionen $h_\ell^+ = j_\ell + \mathrm{i} n_\ell$ und $h_\ell^- = j_\ell - \mathrm{i} n_\ell$ als Basislösungen.

(c) Zeigen Sie, dass die Anschlußbedingung bei r=R auf folgende Gleichung führt:

$$\tan x = -\frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \qquad \text{mit} \qquad x = \sqrt{\tfrac{2mR^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)} \quad \text{und} \quad \alpha^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} R^2\,.$$

Diskutieren Sie die Bestimmungsgleichung für die Energie-Eigenwerte. Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

[H31] Grundzustand des Wasserstoffatoms (3 Punkte)

Ein Wasserstoff-Elektron befinde sich im Grundzustand $|\psi\rangle$, der durch

$$\langle \vec{r}\,|\psi\rangle = (\pi a_0^3)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-|\vec{r}|/a_0}$$

mit dem Bohrschen Radius $a_0 = \hbar^2/(me^2) \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$m beschrieben wird.

(a) Überprüfen Sie, dass die Wellenfunktion richtig normiert ist.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Elektron im Inneren einer Kugel vom Radius a_0?

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Hamiltonoperators H und des Drehimpulses $\vec{L}$.

Hinweis: In Kugelkoordinaten $\vec{\nabla}\psi(r) = \vec{e}_r\, \psi'(r)$, da $\psi(r)$ unabhängig von den Winkeln ist.

Bitte wenden

[H32] Erweiterte Symmetrie des Wasserstoffatoms **(3 Punkte)**

Betrachte das Wasserstoffatom mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{k}{R}\,, \qquad k = e^2\,, \qquad R = \sqrt{\vec{R}^2}\,.$$

Der Pauli–Runge–Lenz Operator ist definiert als

$$\vec{A} = \frac{1}{2m}\left(\vec{L}\times\vec{P} - \vec{P}\times\vec{L}\right) + \frac{k}{\hbar}\frac{\vec{R}}{R}\,.$$

(a) Ein Operator $\vec{\Omega}$ heißt *Vektoroperator* genau dann, wenn $[L_i, \Omega_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\Omega_k$ ist. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\vec{R}$, $\vec{P}$ und $\vec{L}$ Vektoroperatoren sind. Zeigen Sie, dass $[L_i, A_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}A_k$, also auch $\vec{A}$ ein Vektoroperator ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass das Kreuzprodukt $\vec{\Omega}\times\vec{\Gamma}$ zweier beliebiger Vektoroperatoren $\vec{\Omega}$, $\vec{\Gamma}$ wieder ein Vektoroperator ist. Nutzen Sie weiter, dass $[L_i, \vec{R}^2] = 0$ und damit auch $[L_i, R^{-1}] = 0$ ist. (Warum ist das so?)

(b) Man hat (dies zu zeigen ist nicht Teil der Aufgabe):

$$\vec{A}^2 = \frac{k^2}{\hbar^2} + \frac{2H}{m}\left(\vec{L}^2 + 1\right) \qquad (*)$$

$$[H, A_i] = 0\,, \qquad [A_i, A_j] = -\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}L_k\frac{2H}{m}\,.$$

Die Existenz von $\vec{A}$ lässt sich nutzen, um die Energienieveaus und deren Entartungsgrade im Wasserstoffatom zu finden. Betrachten Sie dazu den Eigenzustandsraum $\mathcal{H}(E)$ von H zu einem festen Eigenwert $E < 0$, und definieren Sie hierin die Operatoren

$$S_i = \frac{1}{2}\left(L_i - \alpha A_i\right)\,, \qquad T_i = \frac{1}{2}\left(L_i + \alpha A_i\right)\,, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\,.$$

Zeigen Sie folgende Relationen:

$$\vec{S}^2 = \vec{T}^2\,, \qquad [S_i, T_j] = 0\,, \qquad [S_i, S_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}S_k\,, \qquad [T_i, T_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}T_k\,.$$

Nutzen Sie jetzt die Eigenschaften der Drehimpulsalgebra-Darstellungen sowie die Beziehung $(*)$, um die Energieniveaus und Entartungsgrade im Wasserstoffatom für $E < 0$ zu finden.

Hinweis: $\vec{T}^2$ hat die Eigenwerte $= t(t+1)$ mit Entartung $(2t+1)$.