Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 13 (optional) **SoSe 2024** **Abgabe: 07.07.2024**

[H33] Messungen an einem Satz von Operatoren (2 Punkte)

Betrachten Sie die Operatoren

$$L_x \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad L_y \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}, \qquad L_z \doteq \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(a) Welche Meßergebnisse für L_z gibt es? Berechnen Sie $\langle L_y\rangle$, $\langle L_y^2\rangle$ und ΔL_y im Zustand $|L_z = +1\rangle$.

(b) Was sind die prinzipiell möglichen Ergebnisse, wenn man L_x messen würde?

(c) Gegeben sei der Zustand

$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{2}|L_z = +1\rangle + \tfrac{1}{2}|L_z = 0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|L_z = -1\rangle\,.$$

Wenn L_z^2 gemessen wird und das Ergebnis $+1$ ist, was ist der Zustand nach dieser Messung? Wie wahrscheinlich war dieses Ergebnis?

(d) Geben Sie die möglichen Ergebnisse bei einer L_z-Messung und deren Wahrscheinlichkeiten für den Zustand $|\psi\rangle$ aus Punkt (c) an.

[H34] Transmission und Reflexion (2 Punkte)

Berechnen Sie Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für das Potential

$$V(x) = A\,\delta(x) + B\,\Theta(x)$$

mit Potentialstrufe Θ und δ-Funktion am selben Ort, wobei $A, B > 0$. Das Teilchen (der Masse m) laufe von links ein mit Energie $E > B$.

[H35] Bilokalisiertes Teilchen (2 Punkte)

Ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension sei zum Zeitpunkt $t = 0$ an den Orten $x = \pm a$ lokalisiert:

$$\psi(x,0) = \lambda\,\delta(x-a) + (1-\lambda)\,\delta(x+a)\,,$$

wobei λ die relative Amplitude für die beiden Positionen $x = \pm a$ parametrisiert.

(a) Bestimmen Sie die (nicht normierte) Wellenfunktion $\psi(x,t)$ des Teilchens für einen späteren Zeitpunkt $t > 0$.

(b) Berechnen Sie die (nicht normierte) Wahrscheinlichkeitsdichte $W_a(t)$, dass das Teilchen zum Zeitpunkt t am Ort $x = a$ lokalisiert, sich also im Zustand mit der Wellenfunktion

$$\psi_a(x,t) = \delta(x-a)$$

befindet. Ignorieren Sie zeitunabhängige Gesamtfaktoren und nehmen Sie an, dass die Normierung keine zeitabhängigen Faktoren enthält.

Skizzieren Sie qualitativ den zeitlichen Verlauf $W_a(t)$ für $t > 0$.

Bitte wenden

[H36] Oszillatormodell für den Drehimpuls **(2 Punkte)**

Betrachten Sie zwei ungekoppelte eindimensionale harmonische Oszillatoren und beschreiben Sie sie durch Erzeuger $a^\dagger$, $b^\dagger$ und Vernichter a, b:

$$[a, a^\dagger] = \mathbf{1}\,, \qquad [b, b^\dagger] = \mathbf{1}\,, \qquad \text{alle anderen Kommutatoren} = 0\,.$$

Definieren Sie $L_+ \equiv a^\dagger b$.

(a) Drücken Sie $L_- = (L_+)^\dagger$ und $L_3 = \frac{1}{2}[L_+, L_-]$ durch Erzeuger und Vernichter aus.

(b) Verifizieren Sie $[L_3, L_\pm] = \pm L_\pm$. Damit ist die Drehimpuls-Algebra realisiert.

(c) Als Basiszustände wählen Sie die gemeinsamen Eigenkets der beiden Anzahl-Operatoren $N_a = a^\dagger a$ und $N_b = b^\dagger b$:

$$N_a|n_a, n_b\rangle = n_a\,|n_a, n_b\rangle \quad \text{und} \quad N_b|n_a, n_b\rangle = n_b\,|n_a, n_b\rangle\,.$$

Berechnen Sie die Wirkung der Operatoren L_3, L_+, L_- und $\vec{L}^2 = L_3^2 + \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+)$ auf die Zustände $|n_a, n_b\rangle$.

(d) Welche Beziehung zwischen den Eigenwerten (n_a, n_b) und den üblichen Quantenzahlen (ℓ, m) finden Sie?

[H37] Relativistischer Oszillator: Störungstheorie **(2 Punkte)**

Die relativistische Energie eines Teilchens $E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$ kann für kleine Geschwindigkeiten in $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} + \mathcal{O}(p^6)$ entwickelt werden.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Näherung in erster Ordnung Störungstheorie die relativistischen Korrekturen zu den Energieniveaus des harmonischen Oszillators,

$$H = H_0 + V\,, \qquad H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2\,, \qquad V = -\frac{1}{8m^3c^2}P^4$$

(die Ruheenergie mc^2 kann in diesem Zusammenhang ignoriert werden).

(b) Welche Bedingung muss ω erfüllen, damit dieses Ergebnis eine gute Näherung sein kann?

Hinweis: Drücken Sie P^4 durch a und $a^\dagger$ aus!