Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 10 **SoSe 2024** **11./12.06.2024**

[P25] Darstellungen der Drehimpulsalgebra und Drehgruppe für $\ell = 1$

Die gemeinsamen Eigenvektoren $|\ell, m\rangle$ zu $\vec{L}^2$ und L_3 erfüllen

$$\begin{aligned}
\vec{L}^2 \, |\ell, m\rangle &= \ell \, (\ell + 1) \, |\ell, m\rangle \, , \\
L_3 \, |\ell, m\rangle &= m \, |\ell, m\rangle \, , \\
L_+ \, |\ell, m\rangle &= \sqrt{(\ell + m + 1)(l - m)} \, |\ell, m{+}1\rangle \, , \\
L_- \, |\ell, m\rangle &= \sqrt{(\ell - m + 1)(l + m)} \, |\ell, m{-}1\rangle \, ,
\end{aligned}$$

und spannen für jeden Wert von ℓ einen $2\ell{+}1$-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{R}_\ell$ auf.

(a) Finden Sie für den Fall $\ell = 1$ (also Spin 1) eine Matrixdarstellung $\mathcal{D}_\ell$ der Operatoren L_+, L_- und L_3 bzw. L_1, L_2 und L_3 der Drehalgebra. Wählen Sie dazu

$$|1, 1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |1, 0\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |1, -1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Basis des Darstellungsraumes $\mathcal{R}_\ell$.

(b) Führen Sie eine unitäre Basistransformation aus mit der Matrix

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Wie lauten die Operatoren L_1, L_2 und L_3 in dieser Darstellung $\mathcal{D}'_\ell$?

(c) Auf dem Darstellungsraum $\mathcal{R}_\ell$ operiert die Darstellung $\mathcal{U}_\ell$ der Drehgruppe durch Exponentiation der Darstellung $\mathcal{D}_\ell$ der Drehalgebra,

$$\mathcal{U}_\ell(g = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_i L_i}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_i \mathcal{D}_\ell(L_i)} .$$

Finden Sie die Darstellung des Gruppenelementes

$$g = e^{-\mathrm{i}\theta L_3}$$

sowohl in der Darstellung $\mathcal{U}_\ell$ als auch in der Darstellung $\mathcal{U}'_\ell$.

Bitte wenden

[P26] Eigenfunktionen zum Drehimpuls für $\ell = 2$

Betrachten Sie die Drehimpulsalgebra in kartesischer Ortsraumdarstellung,

$$\begin{aligned} L_x &\doteq -\mathrm{i}(y\partial_z - z\partial_y)\,, \\ L_y &\doteq -\mathrm{i}(z\partial_x - x\partial_z)\,, \\ L_z &\doteq -\mathrm{i}(x\partial_y - y\partial_x)\,, \end{aligned}$$

wobei $\hbar = 1$ gesetzt wurde.

(a) Bilden Sie damit die Operatoren L_+ und L_-. Finden Sie ein homogenes Polynom $p_2(x,y,z)$ zweiten Grades, das eine Eigenfunktion zu L_z und $\vec{L}^2$ ist und von L_+ vernichtet wird, d.h.

$$\vec{L}^2\, p_2(x,y,z) = 6\, p_2(x,y,z)\,, \quad L_z\, p_2(x,y,z) = 2\, p_2(x,y,z)\,, \quad L_+\, p_2(x,y,z) = 0\,.$$

Dieses Polynom entspricht dem Zustand $|\ell, m\rangle$ mit höchstem Gewicht $m = \ell = 2$.

(b) Berechnen Sie für das soeben gefundene Polynom die weiteren Polynome

$$p_{2-k} = (L_-)^k\, p_2(x,y,z)$$

für $k = 1, \ldots, 5$. Proportionalitätsfaktoren dürfen vernachlässigt werden.

(c) Transformieren Sie schließlich die $p_m(x,y,z)$ in Kugelkoordinaten und nehmen Sie dabei an, dass $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist. Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der expliziten Form für die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{\ell,m}(\varphi,\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\, P_{\ell,m}(\cos\theta)\,,$$

wobei die benötigten assoziierten Legendre-Polynome definiert durch

$$P_{2,2} = 3\sin^2\theta\,, \quad P_{2,1} = 3\sin\theta\cos\theta\,, \quad P_{2,0} = \cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta$$

gegeben sind und die Symmetrien

$$P_{2,-1} = P_{2,1}\,, \qquad P_{2,-2} = P_{2,2}$$

besitzen.