Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 11 **SoSe 2024** **18./19.06.2024**

[P27] Teilchen im konstanten Magnetfeld

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin 1/2, Ladung e und Masse m.

(a) Geben Sie die Eigenwerte der Spinoperatoren S_x, S_y und S_z an.

(b) Das Teilchen sei in einem Eigenzustand von S_x. Man misst S_z. Welche Messwerte sind möglich und mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden sie erhalten?

(c) Der Hamiltonoperator dieses Teilchens im konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ sei gegeben durch

$$H = \frac{e\hbar}{mc} B S_z \,.$$

Das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Eigenzustand von S_x mit dem Eigenwert 1/2. Berechnen Sie den Zustand zur Zeit $t > 0$.

(d) In diesem System wird dann (also zu einem Zeitpunkt $t > 0$) S_x gemessen. Was ist das Ergebnis? Was ergibt sich bei einer S_z-Messung? Diskutieren Sie die Ergebnisse, insbesondere die Abhängigkeiten von t.

(e) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ und $\langle S_z \rangle$.

[P28] Kopplung von Drehimpulsen

Ein Elektron (Spin $s = 1/2$) befinde sich in einem Zustand mit Bahndrehimpuls $\ell = 1$. Berechnen Sie die *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* $\langle m_\ell, m_s | j, m \rangle$ für die Basistransformation

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_\ell, m_s \\ m_\ell + m_s = m}} |m_\ell, m_s\rangle \langle m_\ell, m_s | j, m\rangle$$

bei der Kopplung des Bahndrehimpulses an den Spin des Elektrons. Der Zustand $|m_\ell, m_s\rangle$ bezeichnet dabei das Tensorprodukt $|\ell, m_\ell\rangle \otimes |s, m_s\rangle$.

Verwenden Sie die Auf- und Absteige-Operatoren

$$J_+ = \hat{L}_+ + \hat{S}_+ \qquad \text{und} \qquad J_- = \hat{L}_- + \hat{S}_- \,.$$

Machen Sie sich klar, dass damit – sofern L und S miteinander kommutieren – gilt:

$$\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\, |j, m\pm1\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - m_\ell(m_\ell\pm1)}\, |m_\ell\pm1, m_s\rangle + \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s\pm1)}\, |m_\ell, m_s\pm1\rangle \,.$$