Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 13 **SoSe 2024** **02./03.07.2024**

[P31] Aufsummieren der Störungsreihe

Betrachten Sie den Hamilton-Operator $H = H_0 + \lambda V$ eines Zwei-Niveau-Systems. In einer H_0-Eigenbasis $\{|1^0\rangle, |2^0\rangle\}$ sei H gegeben durch

$$H = E_1^0|1^0\rangle\langle 1^0| + E_2^0|2^0\rangle\langle 2^0| + \lambda\Gamma|1^0\rangle\langle 2^0| + \lambda\Gamma^*|2^0\rangle\langle 1^0|\,,$$

wobei $E_1^0 > E_2^0$. Wir definieren noch die Projektoren $P_1 = |1^0\rangle\langle 1^0|$ und $P_2 = |2^0\rangle\langle 2^0|$. Das gestörte Eigenwert-Problem lautet $H|m\rangle = E_m|m\rangle$ für $m = 1, 2$.

(a) Verwenden Sie für $|1\rangle = |1^0\rangle + O(\lambda)$ und $E_1 = E_1^0 + O(\lambda)$ die ganze Störungsreihe

$$|1\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{E_1^0 - H_0}\,P_2\,(\lambda V - \Delta_1)\right)^k |1^0\rangle \qquad \text{und}$$
$$E_1 = E_1^0 + \Delta_1 = E_1^0 + \langle 1^0|\lambda V|1\rangle\,,$$

um den gestörten Eigenzustand und seine Energie zu allen Ordnungen zu bestimmen. Dazu benötigen Sie auch die entsprechenden Gleichungen für

$$|2\rangle = |2^0\rangle + O(\lambda) \qquad \text{und} \qquad E_2 = E_2^0 + O(\lambda)\,.$$

Unter welcher Voraussetzung kann man die Störungsreihe aufsummieren?

(b) Berechnen Sie die Energien $E_m(\lambda)$ und Eigenzustände exakt, indem Sie H diagonalisieren. Vergleichen Sie mit (a).

[P32] Entartete Störungstheorie im Drei-Zustands-System

Betrachten Sie ein Drei-Zustands-System mit

$$H \doteq \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 & a \\ 0 & E_2^0 & b \\ a^* & b^* & E_3^0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit Entartung} \quad E_2^0 = E_1^0\,,$$

wobei $E_1^0 > E_3^0$ und die Störungen $|a|, |b| \ll E_1^0 - E_3^0$. Berechnen Sie die gestörten Eigenwerte E_1, E_2, E_3 in zweiter Ordnung Störungstheorie, also

$$E_i \approx E_i^0 + \langle i^0|V|i^0\rangle + \sum_{n(\neq i)} \frac{|\langle i^0|V|n^0\rangle|^2}{E_i^0 - E_n^0} \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, 3\,,$$

wobei $|i^0\rangle$ die ungestörten Eigenzustände und V den nicht-diagonalen Teil von H bezeichnen. Vier Möglichkeiten bieten sich an:

(a) Benutzen Sie nicht-entartete Störungstheorie. Ist dies gerechtfertigt?

(b) Benutzen Sie entartete Störungstheorie (wählen Sie eine Diagonalbasis für V im Entartungsraum).

(c) Gehen Sie in eine Diagonalbasis $\{|1'\rangle, |2'\rangle\}$ von V^2 (!) im Entartungsraum und wiederholen Sie (b).

(d) Finden Sie die exakten Eigenwerte durch Diagonalisieren von H. Welche Vorschrift für die Störungsrechnung war korrekt?