10. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2001

(abzugeben am Dienstag, 19.6.2001)

Aufgabe H27 *Pfadintegral für den harmonischen Oszillator - Fortsetzung* (6 Punkte)

In Aufgabe H26 hatten Sie begonnen, den Zeitentwicklungsoperator für den harmonischen Oszillator zu berechnen: mit $\int d\eta e^{i\eta^T B\eta} = (i\pi)^{\frac{N-1}{2}} (\det B)^{-\frac{1}{2}}$ folgt

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ N\to\infty}} \Big(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t \det B}\Big)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}S[x_{kl}]} \ ,$$

wobei Sie gezeigt hatten, daß

$$B = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots \\ y & x & y & 0 & \dots \\ 0 & y & x & y & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad , \quad x = 2\Big(1 - \frac{\Delta t^2\omega^2}{4}\Big) \quad , \quad y = -\Big(1 + \frac{\Delta t^2\omega^2}{4}\Big) \ .$$

Seien nun die Determinanten der $n \times n$-Untermatrizen von B (die jeweils das obere linke Element von B enthalten) mit I_n bezeichnet. Sie erfüllen die Rekursionsrelation

$$I_{n+1} = xI_n - y^2 I_{n-1} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

wobei $I_{-1} = 0$ und $I_0 = 1$ ist. Überprüfen Sie diese Beziehung für $n \leq 2$. Zeigen Sie, daß

$$\frac{I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}}{\Delta t^2} = -\frac{\omega^2}{2}\Big(I_n + I_{n-1} + \frac{\Delta t^2\omega^2}{8} I_{n-1}\Big) \ .$$

Führen Sie nun eine neue Funktion ein,

$$\phi(t_n - t_i) = \phi(n\Delta t) := \Delta t I_n \ ,$$

so daß für den Kontinuumslimes gilt

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ N\to\infty}} \Delta t \det B = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ N\to\infty}} \Delta t I_{N-1} = \phi(t_f - t_i) = \phi(T) \ .$$

Überlegen Sie sich die Anfangsbedingungen $\phi(0)$ und $\dot\phi(0)$ im Kontinuumslimes aus der Definition von ϕ. Zeigen Sie mit Hilfe der oben hergeleiteten Beziehung für I_n, daß im Limes $\Delta t \to 0$ die Funktion $\phi(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = -\omega^2\phi(t)$$

erfüllt, lösen Sie diese und finden Sie somit die Gestalt von $U(t_f, x_f; t_i, x_i)$.

b.w.

Aufgabe H28 *Paritätstransformation und Zeitumkehr* (4 Punkte)

a) Eine Paritätstransformation ändert das Vorzeichen des Ortsvektors, d.h. die Wellenfunktion transformiert sich gemäß $\psi'(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$. Zeigen Sie, daß diese Transformation das Skalarprodukt erhält. Damit ist sie nach Wigner entweder unitär oder antiunitär (d.h. antilinear, $U(\alpha\,|\psi_1\rangle + \beta\,|\psi_2\rangle) = \alpha^* U\,|\psi_1\rangle + \beta^* U\,|\psi_2\rangle$). Argumentieren Sie, daß die antiunitäre Transformation $\psi'(\vec{x}) = \psi^*(-\vec{x})$ nicht akzeptabel wäre, indem Sie sich die Wirkung dieser Transformation auf die Wellenfunktion $\psi = e^{-iEt/\hbar} f(x)$ eines Hamiltonoperators ansehen, dessen Spektrum nach unten begrenzt ist.

b) Unter einer Zeitumkehrtransformation wird die Dynamik eines Prozesses invertiert: aus dem Anfangszustand wird der Endzustand und umgekehrt. Zeigen Sie hiermit, daß die Zeitumkehr ein antiunitärer Operator sein muß. Betrachten Sie dazu die Zeitentwicklung

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1)\,|\psi(t_1)\rangle \quad .$$

Die zeittransformierte Wellenfunktion sei mit $\left|\psi^T(t_i)\right\rangle$ bezeichnet. Welche Zeitentwicklung muß die zeittransformierten Wellenfunktionen $\left|\psi^T(t_1)\right\rangle$ und $\left|\psi^T(t_2)\right\rangle$ ineinander überführen? Zeigen Sie somit, daß

$$\langle\psi(t_2)|\,\psi^T(t_1)\rangle = \langle\psi(t_1)|\,\psi^T(t_2)\rangle$$

gelten muß, und folgern Sie hieraus die Antilinearität des Zeitumkehroperators.

Aufgabe H29 *Chiralität* (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß Lösungen der freien Diracgleichung

$$(i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu - mc)\psi = 0 \quad , \quad \nu = 0,1,2,3$$

mit der Eigenschaft $\psi = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)\psi$ Teilchen mit der Ruhemasse $m = 0$ beschreiben.

b) Gewinnen Sie darstellungsunabhängig die Form des Hamiltonoperators für $m = 0$:

$$H = -ic\gamma_5\vec{\sigma}\vec{p}\,.$$

Hinweise: Der Vektor $\vec{\sigma}$ ist definiert über $\sigma^1 = i\gamma^2\gamma^3$ und zyklisch. Es gilt

$$-\gamma_5 = \gamma^5 := \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad , \quad \{\gamma^\nu, \gamma_5\} = 0 \quad , \quad (\gamma_5)^2 = \mathbb{1} \quad , \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \quad , \quad (\gamma^\alpha)^2 = -\mathbb{1} \quad , \; \alpha = 1,2,3\,.$$