11. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2001

(abzugeben am Dienstag, 26.6.2001)

Aufgabe H30 *Ortsoperator eines kräftefreien relativistischen Teilchens* (4 Punkte)

Berechnen Sie im Heisenbergbild die Zeitentwicklung des Ortsoperators $\vec{x}(t)$ eines kräftefreien relativistischen Teilchens und vergleichen Sie diese mit der aus der relativistischen Punktmechanik folgenden Bahn

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + c^2 \vec{p} E^{-1} t \quad \text{mit} \quad E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} \ .$$

Den Zusatzterm der quantenmechanischen Bewegung kann man als "Zitterbewegung" interpretieren.
Anleitung:
Für jede Observable gilt in einem festen Inertialsystem $\dot{M} = \frac{i}{\hbar}[H, M]$ mit dem Diracschen Hamiltonoperator $H = c\vec{\alpha}\vec{p} + mc^2\beta$. Leiten Sie die folgende DGl 1. Ordnung für $\vec{\alpha}(t)$ her,

$$\dot{\vec{\alpha}}(t) = -\frac{2i}{\hbar}(\vec{\alpha}(t) - c\vec{p}H^{-1})H$$

und integrieren Sie diese. Berechnen Sie daraus $\vec{x}(t)$. H und $\vec{p}$ sind Bewegungskonstanten.

Aufgabe H31 *Elektron im homogenen Magnetfeld* (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Energieeigenwerte eines Elektrons im homogenen Magnetfeld in z-Richtung (die sogenannten Landau-Niveaus), indem Sie aus der stationären Diracgleichung die "kleinen Komponente" φ_b eliminieren und das Eigenwertproblem der "großen Komponente" φ_a auf das eines eindimensionalen harmonischen Oszillators zurückführen.
Hinweise:
Benutzen Sie $\vec{A} = xB\vec{e}_y$. Zeigen Sie allgemein, daß $(\vec{\sigma}\vec{\pi})(\vec{\sigma}\vec{\pi}) = \vec{\pi}^2 - \hbar e \vec{\sigma}\vec{B}$, wobei $\vec{\pi} = (\vec{p} - e\vec{A})$, und setzen Sie dann das obige spezielle Vektorpotential ein. Machen Sie zur Lösung des Eigenwertproblems für φ_a einen geeigneten Produktansatz der Form $\varphi_a(\vec{x}) = u(x)g(y,z)$.

b.w.

Aufgabe H32 *Eindimensionales Streuproblem für polarisierte Spins* (6 Punkte)

Man betrachte das eindimensionale Streuproblem am Potential

$$e\phi = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ V_0 > 0 & z \geq 0 \end{cases}$$

mit Hilfe der Diracgleichung. Die einlaufende Welle für in positive z-Richtung polarisierte Spins lautet

$$\psi_e = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \qquad \eta := \frac{\hbar\omega - mc^2}{c\hbar k} \ ,$$

und habe die Energie $E > V_0 + mc^2$. Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = |\vec{j}_r|/|\vec{j}_e|$ und den Transmissionskoeffizienten $T = |\vec{j}_t|/|\vec{j}_e|$, wobei $\vec{j} = c\psi^\dagger \vec{\alpha}\psi$ die Stromdichte der einfallenden (e), reflektierten (r) bzw. transmittierten (t) Welle ist.
Zeigen Sie, daß R und T im nichtrelativistischen Grenzfall in die Ergebnisse der Schrödinger-Theorie übergehen:

$$R = \frac{(1-\varrho_s)^2}{(1+\varrho_s)^2} \quad , \quad T = \frac{4\varrho_s}{(1+\varrho_s)^2} \ ,$$

mit $\varrho_s := \sqrt{(E_s - V_0)/E_s}$ und $E_s := E - mc^2$. Erhöht oder erniedrigt die relativistische Korrektur den Transmissionskoeffizienten?
Anleitung:
Benutzen Sie den relativistischen Energiesatz $c^2\hbar^2k^2 = (E - e\phi)^2 - m^2c^4$. Die Eigenzustände zu positiver $(\vec{\sigma} \uparrow\uparrow \vec{p})$ bzw. negativer $(\vec{\sigma} \uparrow\downarrow \vec{p})$ Helizität lauten

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} \ .$$

Benutzen Sie als Ansatz für die reflektierte und transmittierte Welle eine Linearkombination von Eigenzuständen zu positiver und negativer Helizität mit entsprechender Phase und schließen Sie die Spinoren bei $z = 0$ stetig an.