12. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2001

(zu bearbeiten am Donnerstag, 28.6.2001)

Aufgabe P19 *Relativistische Formulierung der Elektrodynamik*

Wiederholen Sie die relativistische Formulierung der Elektrodynamik: das Viererpotential ist definiert als $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, der Viererstrom als $J^\mu = (\rho, \vec{j})$, und der Feldstärketensor als $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

a) Die Lagrange-Dichte ist gegeben durch

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - 4\pi J^\mu A_\mu \ .$$

Finden Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in der relativistischen Formulierung.

b) Berechnen Sie die Komponenten $F^{\mu\nu}$ sowie daraus durch geeignete Multiplikation mit dem metrischen Tensor $g_{\rho\sigma}$ die Komponenten $F_{\mu\nu}$.

c) Drücken Sie den Skalar $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ sowie den Pseudoskalar $\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ durch die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

d) Die spezielle Lorentz-Transformation einer Bewegung in x-Richtung ist gegeben durch

$$U^\rho{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\beta = v$ und $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Berechnen Sie das Transformationsverhalten der Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ aus

$$F^{\rho\sigma} = U^\rho{}_\mu U^\sigma{}_\nu F'^{\mu\nu} \ .$$

Anmerkung: Hier und im folgenden gelte $c = 1$ und $\hbar = 1$.

b.w.

Aufgabe P20 *Die Lorentzgruppe*

Die antisymmetrischen Darstellungsmatrizen $J^{\alpha\beta}$ der Lorentzgruppe erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}] = i(g^{\beta\gamma}J^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma}J^{\beta\delta} - g^{\beta\delta}J^{\alpha\gamma} + g^{\alpha\delta}J^{\beta\gamma}) \ .$$

a) Die Generatoren von Rotationen und Boosts sind definiert als

$$L^i = \tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk} \quad , \quad K^i = J^{0i} \ ,$$

mit $i = 1, 2, 3$. Eine infinitesimale Lorentztransformation kann dann geschrieben werden als

$$\Phi \to (\mathbb{1} - i\vec{\theta}\cdot\vec{L} - i\vec{\beta}\cdot\vec{K})\Phi \ .$$

Bestimmen Sie die Kommutatorrelationen $[K^i, K^j]$ sowie $[L^i, K^j]$. Es gilt ferner $[L^i, L^j] = i\epsilon^{ijk}L^k$. Zeigen Sie, daß die Kombinationen $\vec{J}_+ = \frac{1}{2}(\vec{L} + i\vec{K})$ und $\vec{J}_- = \frac{1}{2}(\vec{L} - i\vec{K})$ miteinander kommutieren und jeweils die Vertauschungsrelationen des Drehimpulses erfüllen.

b) Das Resultat von Teil a) bedeutet, daß alle endlich-dimensionalen Darstellungen der Lorentzgruppe Paaren von erlaubten Drehimpulswerten (ganz- oder halbzahlig) entsprechen, (j_+, j_-). In der Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung des Drehimpulses gilt $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$. Schreiben Sie damit explizit die Transformationen, die der $(\frac{1}{2}, 0)$ und der $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentzgruppe entsprechen. Sie erhalten die in der Vorlesung gezeigte Transformation der Weyl-Spinoren ψ_L und ψ_R.

Raten Sie, welche Objekte (Spinoren, Tensoren?) mit den Matrizen der Darstellungen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(1, 0)$ transformieren (Dimensionalität?).