3. Präsenzübung zur Quantentheorie II, SS 2001

(zu bearbeiten am Donnerstag, 19.4.2001)

Aufgabe P5 *Zusammengesetzte Systeme*

Betrachten Sie den Singlett-Zustand

$$|\psi\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A\,|1\rangle_B - |1\rangle_A\,|0\rangle_B) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)\ .$$

a) Berechnen Sie die reduzierten Dichteoperatoren ϱ_A und ϱ_B.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte für die Spinkomponenten der beiden Teilsysteme sowie deren Korrelationen, d.h. $\langle\sigma_i \otimes \mathbb{1}\rangle$ und $\langle\mathbb{1} \otimes \sigma_i\rangle$, sowie $\langle\sigma_i \otimes \sigma_j\rangle$.

c) Berechnen Sie dieselben Größen wie in a) und b) für das Gemisch $\varrho = \frac{1}{2}\,|01\rangle\langle 01| + \frac{1}{2}\,|10\rangle\langle 10|$ und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe P6 *Bayes'sches Theorem*

Die *gemeinsame* Wahrscheinlichkeit für das Auftreten zweier Ereignisse $A = a$ und $B = b$ ist gegeben durch

$$W(a \cap b) \;=\; W(a|b)\cdot W(b) \;=\; W(b|a)\cdot W(a)\ ,$$

wobei $W(a|b)$ die *bedingte* Wahrscheinlichkeit für $A = a$ ist, wenn $B = b$ ist.
Damit findet man das Theorem von Bayes (1763):

$$W(a|b) \;=\; W(b|a)\cdot W(a)/W(b)\ .$$

Nun sei A eine Präparation, B eine Messung. Die Quantentheorie sagt $W(b|a)$ voraus. Wir möchten jedoch in Kenntnis von $B = b$ die Präparation $A = a$ schätzen, d.h. $W(a|b)$ angeben.
Beantworten Sie mit Hilfe des Theorems folgende Frage: Es sei ein linearer Polarisator A mit unbekannten Winkel θ zur z-Achse gegeben ($a = \theta$), der somit polarisierte Photonen präpariert. Ein zweiter Polarisator B sei in z-Richtung orientiert und diene als Meßapparat. Bei einer Messung dreier Photonen passieren zwei den Polarisator B und eines nicht, also $b = {+}{+}{-}$ (die Reihenfolge sei unbekannt). Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit $W(a \in [\theta, \theta{+}d\theta]\,|\,b = {+}{+}{-})$, daß der Winkel des Polarisators A im Intervall $[\theta, \theta{+}d\theta]$ liegt? Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $W/d\theta$ als Funktion von θ in einem Polarplot.

Hinweise: Die Passier-Wahrscheinlichkeit eines Photons ist bekanntlich $\cos^2\theta$. Bei mehreren Photonen ergibt sich eine Binomialverteilung für $W(b\,|\,a{=}\theta)$. Nehmen Sie an, daß die Wahrscheinlichkeit für die Stellung des Polarisators A gleichverteilt ist (Bayes-Postulat). Der Nenner $W(b)$ hat nur zur Folge, daß die linke Seite normiert ist.