28) Ein Leitfähigkeitstensor

Durch ein anisotropes Medium fließt proportional zum angelegten elektrischen Feld $\vec{E}$ die folgende Ladung pro Zeit und Fläche :

$$\begin{aligned} j_1 &= 6\,\sigma_0\,E_1 + 4\,\sigma_0\,E_2 \\ j_2 &= 4\,\sigma_0\,E_1 + 6\,\sigma_0\,E_2 + 3\,\sigma_0\,E_3 \\ j_3 &= 3\,\sigma_0\,E_2 + 6\,\sigma_0\,E_3 \end{aligned}$$

Welchen Leitfähigkeitstensor $\hat{\sigma}$ hat das Medium ? ($\hat{\sigma} =: \sigma_0 \hat{H}$, $H = ?$) In Richtung welches Einheitsvektors $\vec{f}$ fließt der Strom am besten ? Zur Probe werde $\hat{\sigma}$ auf $\vec{f}$ angewandt. Wie lang sind die Halbachsen des Maßellipsoids $\vec{E} \cdot \hat{\sigma}\,\vec{E} = c = \text{const.}$? (3)

29) Hauptachsen–Transformation in 3D

Zur Zeit $t = 0$ durchläuft ein Teilchen (m) den Punkt $\vec{r}\,(0) \doteq \frac{1}{3}(2,2,1)R$ mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}\,(0) \doteq \frac{1}{3}(2,-1,-2)R\omega$. Es ist anisotrop an den Ursprung gebunden:

$$\vec{F} = -m\omega^2\,\hat{A}\,\vec{r} \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{r}\,(t) = ? \quad \text{Skizze!}$$

Hier ist die Hauptachsen–Transformation zu A durchzuführen, sodann $\underline{r}'(0)$ und $\dot{\underline{r}}'(0)$ zu ermitteln, die Bewegungsgleichung für $\underline{r}'(t)$ aufzustellen und in Komponenten zu lösen. Nach Skizze der Bahnkurve in der x'–y'–Ebene liefert die Rücktransformation die endgültige Lösung.
Zwischenresultate: $\underline{f}_1 \sim (2,2,1)$, $\underline{f}_2 \sim (2,-1,-2)$, $z'(t) \equiv 0$. $(5\frac{1}{2})$

30) Optimistisches Bevölkerungsmodell

Die Anzahl der Bewohner einer Insel (gegenwärtig $N(0) = N_0$) möge der „Bewegungsgleichung“

$$\dot{N} = G(N) \cdot N - S_0 \cdot N \qquad \text{mit} \qquad G(N) = G_0 - \beta \cdot N$$

folgen. Hierbei sei die Sterberate S_0 eine Konstante; die Geburtenrate $G(N)$ halte sich streng proportional an den Bestand von Nutzpflanzen, welcher wiederum (wie angegeben) linear mit N abnehme. Günstige Abkürzung: $G_0 - S_0 =: \alpha$; wähle α, β positiv.

Wenn wir nun mit $N(t) =: 1/y(t)$ eine neue unbekannte Funktion $y(t)$ einführen und aus der N-Differentialgleichung eine für y gewinnen, sollte sich ein einfacher Ansatz für $y(t)$ aufdrängen. Nach Lösen für $y(t)$ rekonstruiere man $N(t)$ und skizziere N über t.

Welche fernere Zukunft $N(\infty)$ haben die Insulaner?
Zu welchen Anfangswerten N_0 wächst die Bevölkerung monoton?
Welchen Langzeit-Grenzwert erreicht die relative Geburtenrate $G(N)/S_0$? $(3\frac{1}{2})$