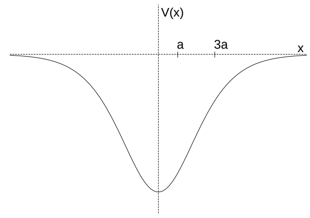
31) Kleine Schwingung (Reihe, um ein Problem vorweg zu vereinfachen)

Ein Teilchen (m) bewegt sich in der 1D Potentialmulde



$$V(x) \;=\; \kappa\, a^2 f\big(\tfrac{x}{a}\big) \quad \text{mit} \quad f(s) \;=\; -\,\frac{1}{\operatorname{ch} s}\ln\left(1+\operatorname{ch} s\right)$$

Bei hinreichend kleiner Amplitude (alle $|x| \ll a$) wird die Schwingung nahezu harmonisch.

(a) Also entwickeln wir f um $s=0$ bis einschließlich $O(s^2)$ und können durch Vergleich mit dem Federpotential die Kreisfrequenz ω der harmonischen Schwingung angeben. Wieso muß man und wie kann man sich hierbei vergewissern, daß $\ln 2 > 1/2$?

(b) Alternativ kann man zunächst exakt die Kraft $F = -\partial_x V$ bilden, diese sodann (bis wohin?) entwickeln, die Bewegungsgleichung in „harmonischer Näherung” aufschreiben und aus dieser auf ω schließen. 3

32) Potenzreihe als Ansatz.

Zu der anharmonischen Schwingung

$$\ddot{x} \;=\; \frac{6\omega^2}{a}\,x^2 \;-\; \frac{8\omega^2}{a^2}\,x^3 \quad , \qquad x(0)=a \quad , \qquad \dot{x}(0)=0 \quad ,$$

sollen die Koeffizienten c_0 bis c_4 in $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \ldots$ bestimmt werden. Wenn wir die Reihe zuerst in die Anfangsbedingungen einsetzen und sodann $\ddot{x}$ bilden, dann können wir auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung ziemlich faul werden. Das x–Resultat bis $O(t^4)$ läßt *erraten*, wie die geschlossene Form für $x(t)$ aussieht (Probe!). Wir bilden und skizzieren noch das Potential $V(x)$ der obigen Kraft ($m := 1$), geben die Energie E des Teilchens an und verstehen nun das Verhalten von $x(t)$ bei $t \to \infty$.

Man schließe aus diesem Beispiel bitte nicht, daß die Bewegungsgleichung für eine anharmonische Kraft immer exakt lösbar sei – dies geht hier nur wegen ganz speziell gewählter Anfangsbedingungen! 4

33) Potenzreihe durch Iteration.

Ein Teilchen (Masse m, Ladung q) rast auf der x–Achse von links mit großer Geschwindigkeit v_0 auf einen Raumbereich zu, in dem das Magnetfeld $\vec{B} \doteq (0,0,B)$ herrscht. Eintritt bei $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Nun sagt jemand: „Ich weiß ja, daß $\vec{r}^{\,(0)}(t) \doteq (v_0 t, 0, 0)$ eine gute nullte Näherung ist, also setze ich letztere in die Lorentzkraft ein, um diese zu einer Funktion der Zeit zu machen. Dann löse ich die Bewegungsgleichung und nenne die Lösung $\vec{r}^{\,(1)}(t)$. Hiermit wiederhole ich das Iterationsverfahren und erhalte $\vec{r}^{\,(2)}(t)$. Dies sollte für kleines Magnetfeld bereits eine vernünftige Näherung sein.” Bitte nachrechnen!

Andererseits beschreibt — angeblich — das Teilchen im Magnetfeld eine Kreisbahn, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird (mit welcher Kreisfrequenz ω und welchem Radius R ?). Wenn man nun das exakte Resultat für $\vec{r}(t)$ in Potenzen von B entwickelt, müßte eigentlich obiges Iterationsresultat wieder herauskommen!?

Erinnerung: Lorentzkraft ist $\vec{F} = q\,(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$; Kreisbahn ist $\vec{r}(t) \doteq (R\sin\omega t, -R + R\cos\omega t, 0)$. 5

FROHES FEST UND GUTEN RUTSCH !