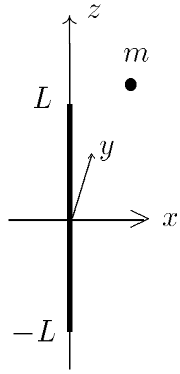
34) Gravitations–Potential eines Stabes

∞ viele Sterne (dM) wurden auf der z–Achse zu einem dünnen Stab (Gesamtmasse M, Länge $2L$) zusammengefügt. Ihre Gravitationskräfte auf eine Probemasse m bei $\vec{r}$ addieren sich vektoriell. Einfacher ist es aber, wie wir wissen, die Potentiale zu addieren. Bald werden wir das können. Das Resultat ist



$$V(\vec{r}) \;=\; \frac{\gamma m M}{2L} \ln \left(\frac{\sqrt{(L+z)^2+x^2+y^2}-(z+L)}{\sqrt{(L-z)^2+x^2+y^2}-(z-L)} \right) \quad .$$

Nützliche Abkürzungen : $\ln :=$ obiger Log. , $w_\pm := \sqrt{(L \pm z)^2+\rho^2}$, $\rho^2 := x^2+y^2$.

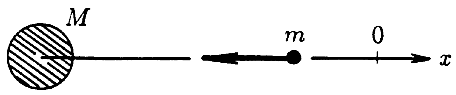
(a) $L \to 0$. Zusammenquetschen des Stabes (unter Festhalten von M und $x, y, z \neq 0$) sollte das Gravitationspotential $-\gamma m M/r$ einer Punktmasse M liefern. Ob dem so ist?

(b) $L \to \infty$. Um das Potential eines ∞ langen Stabes gegebener Massendichte $\sigma := M/(2L)$ zu erhalten, setzen wir $z = 0$ und rücken immer näher an den Ursprung heran : $\rho \to 0$ anstatt $L \to \infty$. Wie lautet der führende Term der klein–ρ–Asymptotik von V ?

(c) $\rho \to 0$ mit $z > L$. Jetzt führen wir die Probemasse auf der z–Achse oberhalb Stab spazieren. $V(0,0,z) = ?$ Komponente F_3 der Kraft auf m ? Mit welcher Potenz des Abstandes $\varepsilon := z - L$ nimmt $|F_3|$ zu, wenn sich m von oben her dem Stabende nähert ? 4

35) Störungsrechnung

Ein punktförmiger Meteorit (m) nähert sich der Erde (M, R) mit so großer Geschwindigkeit ($\dot{x}(0) = -v_0$, $x(0) = a$), daß seine kinetische Energie im Bereich $R < x < a$ stets viel größer als die durchlaufene Potential–Differenz bleibt (Skizze!). Folglich begnügen wir uns mit der Bewegungsgleichung $\dot{x} = \ldots + O(\gamma^2)$ (γ = Gravitationskonstante), überlegen, ob wir auf der rechten Seite für x die „nullte" Näherung ($:= x(t)$ bei $\gamma = 0$) einsetzen dürfen, und erhalten schließlich — korrekt bis auf $O(\gamma^2)$ — die Lösung $x(t)$. Dimensionsprobe!



Ergebnis: $\quad x(t) \;=\; a - v_0 t \;+\; \gamma\; [v_0 t/a + \ln(1 - v_0 t/a)]\; M/v_0^2 \;+\; O(\gamma^2) \quad .$ 4

36) Hall-Effekt

Ein geladenes Teilchen (q, m) im homogenen und konstanten elektromagnetischen Feld $\vec{E} \doteq (0, E, 0)$ und $\vec{B} \doteq (0, 0, B)$ unterliege zusätzlich einer Reibungskraft $\sim \vec{v}$, so daß

$$(*) \qquad m\dot{\vec{v}} \;=\; -m\gamma\vec{v} \;+\; q\vec{E} \;+\; q\vec{v} \times \vec{B} \quad ; \qquad \text{Startbedingung :} \quad \vec{v}(0) \;=\; \vec{0} \quad .$$

Gesucht sind $\vec{v}(t)$ und sein Grenzwert $\vec{v}_\infty := \lim_{t \to \infty} \vec{v}(t)$. Die Bewegung spielt sich in der xy–Ebene ab. Komponentenweise ist $(*)$ zwei gekoppelte Dgln: $\dot{\vec{v}}_1 = \ldots$ und $\dot{\vec{v}}_2 = \ldots$. Nach Multiplikation der zweiten mit i gewinnt man leicht *eine* Dgl für $u := v_1 + i v_2$. Aus deren Lösung $u(t)$ lassen sich $v_1(t)$ und $v_2(t)$ als Realteil bzw. Imaginärteil leicht ablesen. Nach genügend langer Zeit hat das Teilchen (dank Reibung) seinen Startvorgang vergessen; man kann demnach alternativ $\vec{v}_\infty = \mathit{konst}$ direkt algebraisch aus $(*)$ bestimmen.

Vorschlag: $\quad \frac{qB}{m} =: \omega \quad , \quad \frac{qE}{m} =: \lambda \quad , \quad \sin\omega t =: s \quad , \quad \cos\omega t =: c \quad .$ 4