37) Regennasse Straße. Ein Auto (m) fährt mit v_0 die x–Achse entlang. Zur Zeit t=0 hat es eine Vollbremsung nötig und erfährt sodann eine mit v exponentiell abnehmende Reibungskraft $R(v) = -m\,\alpha\,e^{-\beta v}$ mit positiven Konstanten α und β.

Es mag mehrere Möglichkeiten geben, die Bewegungsgleichung zu lösen. Aber sicherlich ist hierbei auch die Idee gut, nach t als Funktion von v (statt nach v als Funktion von t) zu fragen ($\frac{dt}{dv} = 1/\frac{dv}{dt}$) und am Ende nach v aufzulösen. Zu welcher Zeit t_1 kommt das Auto zum Stillstand? Entwickeln Sie $v(t)$ bis $O(t^2)$ und skizzieren Sie qualitativ v über t ! (3)

38) Eine gleitende Schachtel kommt erst nach *unendlich* langer Zeit zum Stillstand, legt aber in $0 \le t < \infty$ einen *endlichen* Weg zurück. Konkreter (alle Konstanten positiv):

$$\dot v \;=\; -\beta v - \gamma v^2 \quad \text{zu} \quad v(0) = v_0 \qquad \Longrightarrow \qquad v(t) \;=\; \frac{\beta\, v_0}{[\beta + \gamma v_0]\, e^{\beta t} - \gamma v_0} \quad .$$

(a) Jemand erblickt sofort „**Weg** $= \int dx = \int dt\,\frac{dx}{dt} = \int dt\, v$ " vor seinem geistigen Auge. Er bringt die zutreffenden Grenzen an, massiert das Integral ein wenig und hat alsbald

$$\textbf{Weg} \;=\; \mu \cdot J \qquad \text{mit} \qquad J \;=\; \int_\eta^\infty dx\, \frac{1}{e^x - 1}$$

auf dem Papier. Wie ist er darauf gekommen? Wie hängen die Konstanten μ und η mit den ursprünglichen Daten zusammen?

(b) Nun wälzt er in seiner Formelsammlung (*Zitat bitte! Z.B. [Br. n] := Bronstein, Unbestimmte Integrale, Nr. n*), findet die gesuchte Stammfunktion, testet sie (*Nachprüfung stets erforderlich!*), erhält J explizit und drückt es durch ursprüngliche Parameter aus.

(c) Auch wenn man sie *nicht* abbricht, sind Reihen wertvoll. Man kann den Integranden von J nach Potenzen von e^{-x} entwickeln und die Integration sodann termweise ausführen. Gleiches Resultat?

(d) **Zusatzpunkt:** Eigentlich braucht man bloß eine Stammfunktion. Man löse $\dot x(t) = v(t)$ zu $x(0)$=0 mittels Ansatz und sehe dann nach, wo ($x_\infty := x(t\to\infty)$) die Schachtel stehenbleibt. Stimmt das mit dem Ergebnis von (b) überein? (4+1)

39) Integrale

(a) Elementare Umformungen, Symmetrie– und anschaulich–geometrische Argumente müssen genügen bei Auswertung der folgenden sechs Integrale:

$$J_1 := \int_0^4 dx\, \Big(3 - |x-2|\Big) \qquad\qquad J_4 := \int_0^8 dx\, \left(\frac{2}{1+(x-7)^2} + \frac{x(x-2)}{x^2-2x+2}\right)$$

$$J_2 := \frac{8}{9}\int_{-4}^5 dx\, \frac{2x + \mathrm{sh}^2\,(2x-1)}{\mathrm{ch}^2\,(2x-1)} \qquad\qquad J_5 := \lim_{a\to\infty} \int_a^{a+8} dx\, \left(x\sqrt{2+x^2} - x^2\right)$$

$$J_3 := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{12}{\varepsilon}\int_0^{2\varepsilon} dx\, \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3} \qquad\qquad J_6 = 4\,T\,\partial_T \ln\left(\int_0^\infty dx\, \frac{x}{e^{x/T}+1}\right) \quad .$$

(b) In einem berühmten Lehrbuch der Theoretischen Physik [Landau & Lifschitz Bd.I §12] findet sich (geringfügig umgestellt) die folgende Passage:

≫ Das Integral $J := \displaystyle\int_U^\alpha dE\, \frac{1}{\sqrt{(\alpha - E)(E-U)}}$ ist elementar und gleich π . ≪

Bitte mit Hilfe elementarer Umformungen und der Kenntnis $\partial_x \arcsin x = 1/\sqrt{1-x^2}$ ohne Blick in den Bronstein nachvollziehen! (5)