22) Drehmatrizen und imaginäre Einheit

a) Überprüfen Sie, ob die Zeilen und Spalten der nebenstehenden Matrix D normiert und orthogonal sind! Hat auch $\det(D)$ den gewünschten Wert? Ein (einfacher) Vektor $\vec{b}$, der auf der Drehachse liegt, soll ermittelt werden.

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie den Drehwinkel bis auf sein Vorzeichen!

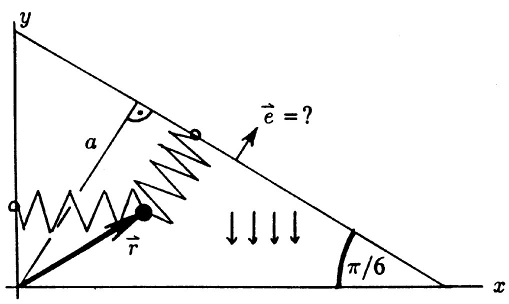
c) Per $D_{z,3\alpha} = D_{z,\alpha}\, D_{z,\alpha}\, D_{z,\alpha}$ erhält man zwei trigonometrische Beziehungen. Drücken Sie hiermit $\cos 3\alpha$ nur durch $\cos\alpha$ und $\sin 3\alpha$ nur durch $\sin\alpha$ aus, indem Sie mit 2×2–Matrizen arbeiten!

d) Etwas Besonderes sind die (hier zweidimensionalen) Drehungen um $\alpha{=}0$ und $\alpha{=}\pi/2$, $D_{\alpha=0} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) =: \mathbf{1}$ und $D_{\alpha=\pi/2} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) =: \mathbf{i}$. Bestimmen Sie:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} \ = ? \qquad \mathbf{i}^3 \ = ? \qquad \mathbf{i}^4 \ = ? \qquad (\mathbf{1}-\mathbf{i})\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{i}) \ = ?$$

3

23) An einer Masse m sind zwei gleiche masselose Federn (κ, ℓ) befestigt, je deren anderes Ende, wie skizziert, an geraden Drähten reibungsfrei gleiten kann. Der Abstand a ist bekannt; Erdanziehung in $(-y)$–Richtung; 2D Problem. Die gesamte auf m wirkende Kraft $\vec{F}$ hängt von der Position $\vec{r}$ ab und läßt sich in der Form $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0 - \hat{H}\vec{r}$ aufschreiben.



Bestimmen Sie die Elemente des Spaltenvektors $\underline{\mathrm{F}}_0$ und der Matrix H in der skizzierten Basis! Können Sie ein Potential $V(\vec{r})$ koordinatenfrei (d.h. als Funktion von $\vec{r}$ statt (x,y)) angeben?

Wir verschieben nun das Koordinatensystem, $\vec{r} \to \vec{r} - \vec{r}_0$ mit einem geeigneten Vektor $\vec{r}_0$, so daß der Ursprung die Gleichgewichtslage der Masse ist: $\underline{\mathrm{F}}(\vec{r}) = -H\underline{\mathrm{r}}$. Gehen Sie dann in ein (um den neuen Ursprung) gedrehtes System [$D = \left(\begin{smallmatrix} c & s \\ -s & c \end{smallmatrix}\right)$, Drehwinkel φ noch unbekannt] und legen φ so fest, daß H' diagonal wird. Notieren Sie die Diagonalelemente von H' und skizzieren Sie die neuen Basisvektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ im obigen Diagramm!

Jemand lenkt die Masse aus der Ruhelage aus ($\vec{r}(0) \neq 0$) und läßt sie dann los ($\dot{\vec{r}}(0) = 0$). Wie wird sich die Schwingung für $\vec{r}(0) \sim \vec{e}_1$ unterscheiden von der mit $\vec{r}(0) \sim \vec{f}_1$?

Zwischenresultat: $\underline{\mathrm{F}}_0^T = \left(\tfrac{1}{2}\kappa(a+\ell)\,,\ -mg + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\kappa(a-\ell)\right)$ und $H = \tfrac{1}{4}\kappa\left(\begin{smallmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

7

24) Die Insassen einer Raumkapsel, die sich mit Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse $\vec{n} \doteq (1,1,0)/\sqrt{2}$ durch ihren (im Ursprung ruhenden) Schwerpunkt dreht, sehen mit

$$\underline{\mathrm{r}}'(t) \ = \ -\tfrac{1}{2}v_0 t\left(3 - \cos\omega t\ ,\ 3 + \cos\omega t\ ,\ -\sqrt{2}\sin\omega t\right) \qquad (\text{für } t < 0)$$

einen Meteoriten auf sich zukommen und rechnen schnell (weil sie die Matrix $D_{\vec{n},\phi}$ kennen) dessen "wirkliche" Bewegung $\underline{\mathrm{r}}(t)$ im ruhenden Bezugssystem $\{\vec{e}_i = \vec{f}_i(t{=}0)\}$ aus.

2