49) Drei mal Green

(a) $L = t\,\partial_t$ ist kein translationsinvarianter Operator. Welche allgemeine Greensche Funktion $G(t,a)$ hat er? Bereich sei $0 < t, a < T$. Mittels G erhalten wir die allgemeine Lösung von $t\,\dot{v} = f(t)$. (Daß $v_{\rm allg}(t)$ das richtige ist, sehen wir im Kopf.)

(b) Wenn wir dem SB glauben, daß $G = \theta(t)\,e^{-\gamma t}\frac{1}{\Omega}\sin(\Omega t)$ mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die Greensche Funktion von $\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$ ist, dann können wir daraus $G(t) = ?$ des Operators $L = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t$ gewinnen — und wir sparen uns hierzu das Nachprüfen.

(c) Der 2D translationsinvariante Operator $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ hat laut SB–Tabelle die Greensche Funktion $G(\vec{\rho}) = \frac{1}{4\pi}\ln(\rho^2 + \varepsilon^2)$, $\vec{\rho} := (x,y)$, wobei wir vorsichtshalber das G–Verhalten bei $\rho \to 0$ epsilontisch eingebettet haben. Erfüllt G seine Hilfsgleichung? Ob sich als rhs. derselben eine Darstellung der 2D Deltafunktion ergeben hat, ist natürlich per $\int d^2r \ldots$ nachzuweisen. $1.5 + .5 + 2 =$ 4

50) Weltmodelle $\dot{N} = (G - S)N$, $N(0) = N_0$

(a) Die Übervölkerung der Erde ließe sich vielleicht dadurch begrenzen, daß man (wer?) Geburten– und Sterberate gemäß $G - S = \dfrac{\alpha}{(1+\gamma t)^\lambda}$ sanft angleicht. Zu $\lambda > 0$ folgt $N(t) = ?$ Für welche Werte $\lambda > \lambda_0 = ?$ bleibt N bei $t \to \infty$ endlich? Welche Lösung hat das N–Problem bei genau $\lambda = \lambda_0$? Sei $\lambda = 2$, $\alpha = \gamma$ und $N_0 = 6\,$Mrd., wie viele ($N_\infty \approx ?$) werden wir dann noch?

(b) Wir lassen G–S von einer pauschalen Vorratsgröße R abhängen (Rohstoffe, bebaubares Land, Luftsauerstoff etc.: $G - S = G_0 - S_0 + \alpha\,[R - R_0]$), welche ihrerseits $\dot{R} = -\beta\,(N - N_1)$ folgt (bei Unterschreiten von N_1 beginnt Regeneration [zu $N_1 = 0$ s. PB 18/1]). — Damit wird plausibel (wir überspringen den Koeffizientenkram), daß mit effektiver dimensionsloser Anzahl u ($N \sim u$, $G_0 - S_0 \sim \eta > 0$), Vorrat v ($R - R_0 \sim v$) und Zeit τ ($t \sim \tau$), sowie $\dot{\ } := \partial_\tau$ und $\lambda := N_1/N_0 < 1$ das Dgl–System

$$\boxed{\dot{u} = u\cdot(\eta + v)\ ,\ \ \dot{v} = \lambda - u\ ,\ \ u(0) = 1\ ,\ \ v(0) = 0}$$

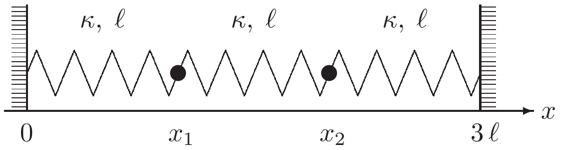
zu lösen bleibt.

Wir können es nur „weitgehend“: Neue Funktion $x(\tau) = \ln(u(\tau))$; Dgl zweiter Ordnung für x allein; x–Anfangsdaten; Energiesatz $T + V = E$ mit $V(x) = e^x - \lambda x - 1$, $T = ?$ und $E = ?$; Minimum $x_0 = ?$ von V; $V(x)$–Skizze zu $\lambda = 0$ und $V(x)$–Skizze zu $0 < \lambda < 1$ je mit E–Horizontaler und Umkehrpunkt(en).

Wir verstehen solche V-Bilder zu „lesen“ und sehen, was qualitativ passiert. Der $N(t)$–Verlauf folgt überraschend genau dem Standardlauf der 90–parametrigen Maedows–Studie von 1972

[„Die Grenzen des Wachstums“ rororo Nr. 19510 ist vergriffen. Siehe jedoch (gleicher Titel) Maedows/Maedows/Zahn/Milling und Maedows/Maedows/Randers : „Die neuen Grenzen des Wachstums“ (1993)] . $2.5 + 3.5 =$ 6

51) Normalschwingungen



Welches Gesamtpotential $V(x_1, x_2)$ hat das skizzierte 1D System? (gleiche Massen, gleiche Federn) „Leider“ hatten wir uns die beiden Bewegungsgleichungen schon im WS (auf TU 7) erarbeitet.

$$m\ddot{x}_1 = -\kappa\,(x_1 - \ell) + \kappa\,(x_2 - x_1 - \ell)$$
$$m\ddot{x}_2 = -\kappa\,(x_2 - x_1 - \ell) + \kappa\,(2\ell - x_2)$$

(Kontrolle im Kopf: ergeben sich mit obigem $V(x_1, x_2)$ die rechts stehenden Kräfte?)

Aber hier lösen wir das Problem, führen die Auslenkungen $\eta_1 = x_1 - \ell$, $\eta_2 = x_2 - 2\ell$ ein, fassen sie vektoriell zusammen, erhalten $\ddot{\vec{\eta}} = -\frac{\kappa}{m}\,H\,\vec{\eta}$ mit Matrix $H = ?$ und ermitteln die Frequenzen ω_1, ω_2 der beiden Normalschwingungen. 2

(Wie es je schwingt, kann man sich denken. Die Eigenvektoren würden es zeigen, aber es war auch so genug zu tun.)