ITP–UH 36/97 *completed in 2007*

Von Pauli–Villars bis Callan–Symanzik [1]

Renormieren lernen am konkreten Beispiel einer beobachtbaren Größe,
dem Druck p des masselosen ϕ^4–Systems in 3–Loop–Ordnung

Zum Gebrauch
neben Lehrbüchern

Vor langer Zeit, im Sommer 1997, war eine Vorlesung über „Quantenfelder am Wärmebad" in arge Schwierigkeiten geraten. Gegen Ende sollte noch der Druck p des masselosen ϕ^4–Systems bis Ordnung g^4 (3–loop) an die Tafel. Die Stimmigkeit der Renormierungs–Prozedur sollte sich an diesem Beispiel erweisen. Die folgenden Notizen (samt Anhängen, nachträglich entstanden) zeigen, wie utopisch dieses Ansinnen war.

Über z.B. Lehrbücher wie etwa [1, 2] sei der Leser einigermaßen mit Feldtheorie vertraut. Er weiß von Green'schen Funktionen (kurz: Greensfunktion), welche in Diagrammen die Linien sind, und daß aus n–Punkt–Funktionen jegliche Physik folgt. Wenn ihn sodann bei der Rezeptur, mit der aus der (divergenten) Theorie meßbare Größen destilliert werden, ein gehöriges Unbehagen verblieben ist und ihm ein „schade" auf den Lippen liegt, dann ist er hier herzlich willkommen.

Die meßbare Größe, an welcher das Rezept illustriert werden soll (wenigstens das), ist eine thermodynamische: $p = -\partial_V F$. Das Spektrum des Systems beginne bei Energie Null, so daß mit $T \to 0$ ($\beta \to \infty$) die Freie Energie $F = -T\ln(Z)$ verschwindet, weil dann $Z = \mathrm{Sp}\left(e^{-\beta H}\right) \to 1$. Ohne Anregungen kein Druck. Der extensive Anteil F^{ex} von F ist proportional zu V [3]. Meist läßt man den Index „ex" klammheimlich wieder entschwinden. Lebend mit dieser Unsitte, schreiben wir $p = -F/V$ nieder. Die Störungsentwicklung von F besteht aus beinlosen Diagrammen (F ist die Null–Punkt–Funktion). Alsbald wird der Druck p als asymptotische Entwicklung hinsichtlich kleiner g vorliegen (einschließlich g^4-Term) [2]. J e d e r Term der asymptotischen Entwicklung ist Meßgröße. Also bekommen wir sogar mehrere beobachtbare Größen in die Hand.

[1] hschulz@itp.uni-hannover.de

[2] Dieser scheinbar etwas exaltierten Sprechweise geben wir hier den Vorzug, weil es sich im allgemeinen nicht um eine Potenzreihe zu handeln braucht. Bei QCD hat p unter anderem einen Term $g^4\ln(g)$.

Quantenfeldtheorie braucht zuallererst eine Einbettung, d.h. eine Abwandlung zur physikalischen Seite hin mit Parametern, welche die spätere Rückkehr zur ursprünglichen Theorie ermöglichen. Kein Schritt weiter, bevor eine solche Regularisierung nicht bedacht ist. Die Lagrange–Dichte der masselosen ϕ^4–Theorie

$$\mathcal{L} \,=\, -\frac{1}{2}\,\phi\,\partial^2\,\phi \,-\, \frac{g^2}{24}\,\phi^4 \tag{0.1}$$

ist zwar hübsch kurz und zeigt Feld–Inhalt und Wechselwirkung an, aber ansonsten ist (0.1) nur ein plakatives, undurchführbares Etwas.

Die eingebettete Theorie verordnet beobachtbaren Größen ein hartes Leben. Diesen Größen ist auferlegt, endlich zu sein und einen angebbaren Zahlenwert zu haben. Sie dürfen folglich n i c h t abhängen

- von der Art der Einbettung (Regularisierung), nach Renormierung *in* ihr und sodann Rückgängigmachen *von* ihr ,
- von den cutoff's der Regularisierung, und zwar weder von $\ln(\Lambda)$ noch Λ^2 o. ä. ,
- von etwaigen endlichen Parametern einer Regularisierung (wie etwa Λ_1/Λ_2) ,
- von der Skala M (Renormierungspunkt), an welcher die Kopplung definiert wird ,
- von ggf. Eichfixierungsparametern ,
- von der Art der Resummation der Störungsreihe. Beispielsweise erfordert ein „falscher“ = ungeschickter IR–Regulator lediglich, die Störungsreihe so weit zu treiben (∞ weit ?), daß sich alle Beiträge zu einem gewünschten Term der asymptotischen Entwicklung aufsammeln lassen .

Im folgenden werden nur Resultate produziert, welche längst wohlbekannt sind, speziell jene in [4]. Ein gewisser Wert liegt vielleicht darin, daß die Bekanntheiten auf ungewohnten Wegen (insbesondere mittels Pauli–Villars–Regularisierung) erneut herauskommen. — Es schafft allemal Vertrauen, wenn ein paar Zweifel zerstreut werden können.

1 Pauli–Villars

Die auf Pauli und Villars [5] (kurz PV) zurückgehende Regularisierung ist eine sehr anständige Einbettung. Demgegenüber muß sich die dimensionale Regularisierung (Dim.Reg.) die folgenden Anwürfe gefallen lassen :

(a) sie erfaßt nur die logarithmischen Singularitäten und ordnet quadratischen ($\sim \Lambda^2$) eine Null (!) zu. Mit anderen Worten, Dim.Reg. ist eine fragwürdige Einbettung weil mit Sprüngen behaftet, unendlichen sogar. Nur jemand, der auf *anderem* Wege bereits *weiß*, daß die Sprünge an den physikalisch relevanten Stellen (genügend rasch) verschwindende Faktoren erhalten werden, darf Dim.Reg. benutzen. Furchtbar, nicht wahr ?!

(b) sie „verstümmelt die Bose–Funktion“ : $(3-2\varepsilon)$–dimensionale Integrale über $n(p)$ geben $\mathcal{O}(\varepsilon)$–Zusätze (siehe (c)) und auch Endliches. Demgegenüber führen die Korrelatorterme bei PV nur zu vernachlässigbaren $n(\beta\Lambda)$'s. Allerlei (aber nicht alle) Eulerkonstanten, log's und zeta's werden sich als Dim.Reg. Kunstprodukte erweisen.

(c) sie verlangt große Sorgfalt bei Faktoren $(1+\mathcal{O}(\varepsilon))$, deren $\mathcal{O}(\varepsilon)$ via $\frac{1}{\varepsilon}\cdot(1+\mathcal{O}(\varepsilon))$ noch zum Leben erweckt werden könnte (und kann). Bei *momentum cutoff* Regularisierung könnte das Analogon $\Lambda^2\cdot(1+1/\Lambda^2)$ lauten. Dies wird jedoch nicht eintreten — wir achten darauf.

(d) sie erschwert (gegenüber PV) die natürliche *cutoff*–Anschauung zum Verhalten einzelner Beträge zu p.

(e) sie verletzt (sagt Flurnachbar Prof. N. Dragon) die Lokalität der Theorie (Lokalität $\approx$ Mikrokausalität). Man ahnt, wie das gemeint ist. Möglicherweise kann **(b)** als Beispiel dienen.

Die etwaige Kritik an PV, sie verletze Eichsymmetrie und Ward–Identitäten trifft nicht : Itzykson und Zuber [1] sind mal wieder besser als man glaubt, insbesondere in § 8-4-2 .

Pauli–Villars–Regularisierung heißt zunächst, zur Greensfunktion Propagatoren großer Masse(n) derart zu addieren, daß das Resultat ($=: G_0$) bei $P^2 \gg$ Masse(n) mit hinreichend hoher Potenz von $1/P^2$ abfällt. Um zur ϕ^4–Theorie den Terminus „hinreichend“ zu ergründen, blicke man auf $\sum G_0 \sim P^4 G_0$ (power counting). Hierfür (und auch im folgenden) genügt es offenbar, $G_0 \to 1/P^6$ bei $P \to \infty$ zu fordern :

$$G_0 \;=\; \frac{1}{P^2} - \frac{A}{P^2+\Lambda^2} + \frac{B}{P^2+\Gamma^2} \quad . \tag{1.1}$$

OBdA sei $\Gamma > \Lambda$. Unverzüglich bringen wir (1.1) auf Hauptnenner und erkennen der Forderung wegen den Zwang zu

$$A \;=\; \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2-\Lambda^2} \quad , \quad B \;=\; \frac{\Lambda^2}{\Gamma^2-\Lambda^2} \quad , \tag{1.2}$$

woraufhin

$$G_0 \;=\; \frac{1}{P^2\,\left(1+\frac{P^2}{\Lambda^2}\right)\,\left(1+\frac{P^2}{\Gamma^2}\right)} \tag{1.3}$$

wird. A und B erfüllen die Relationen

$$A - B = 1 \quad , \quad A\Lambda^2 = B\Gamma^2 \quad , \quad A\Gamma^2 - B\Lambda^2 = \Gamma^2 + \Lambda^2 \quad . \tag{1.4}$$

(1.1) wurde mit Euklidischen Impulsen ($P^2 = P_0^2 + \vec{p}^{\,2}$, alle reell) formuliert. Der Zusammenhang mit Minkowski–Impulsen ist $P^2_{\text{Minko}} = (i\omega_n)^2 - \vec{p}^{\,2} = -P^2$. Unter ∂^2 wird im folgenden $-\partial_0^2 - \Delta$ verstanden.

Obiges Festmachen einer Regularisierung am Propagator ist etwas arg technisch und somit ein wenig gefährlich. Lagrange–Dichte bitte! Jene zu Propagator $1/P^2$ ist $\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 = -\frac{1}{2}\phi\partial^2\phi$. Und welches ist jene zu (1.1) ?? Es gibt zwei mögliche Antworten (zweite Antwort am Ende des Abschnittes). Wir werden der folgenden ersten Möglichkeit den Vorzug geben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;&\overset{??}{=}\; -\frac{1}{2}\phi\,(G_0^{-1}\phi) - \frac{g^2}{24}\phi^4 \;=\; -\frac{1}{2}\,\phi\int\frac{d^4P}{(2\pi)^4}e^{iPX}\,P^2\left(1+\frac{P^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{P^2}{\Gamma^2}\right)\widetilde{\phi}(P) - \frac{g^2}{24}\phi^4 \\ &=\; -\frac{1}{2}\,\phi\,\partial^2\left(1+\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{\partial^2}{\Gamma^2}\right)\phi \;-\; \frac{g^2}{24}\phi^4 \quad . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Die runde Klammer nach erstem Gleichheitszeichen ist wie in [6] gemeint, Fourier–isch nämlich. Aber bei (1.5) können wir nicht bleiben (darum das $\overset{??}{=}$). In der „nackten“ Theorie muß ein Massenterm angefügt werden, d a m i t am Ende zur tatsächlich masselosen ϕ^4–Theorie übergegangen werden kann. Die ursprüngliche (Index „ur“, nackte, unrenormierte) Lagrangian h a t Masse[3]. Wir werden sehen. Also starten wir mit

$$\mathcal{L} \;\overset{?}{=}\; -\frac{1}{2}\,\phi\,\partial^2\left(1+\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{\partial^2}{\Gamma^2}\right)\phi \;-\; \frac{1}{2}\,m_{\text{ur}}^2\,\phi^2 \;-\; \frac{g^2}{24}\,\phi^4 \quad . \quad , \tag{1.6}$$

Die zu (1.6) gehörige nackte Greensfunktion verallgemeinert (1.3) und ist

$$G_{\text{m}}(P) \;\overset{?}{=}\; \frac{1}{m_{\text{ur}}^2 \;+\; P^2\,\left(1+\frac{P^2}{\Lambda^2}\right)\,\left(1+\frac{P^2}{\Gamma^2}\right)} \quad . \tag{1.7}$$

Die obigen Fragezeichen über Gleichheitszeichen sollen andeuten, daß selbst (1.6) und (1.7) noch unzureichende Plagiate sind. Der Blick voraus auf (2.9) und (2.2) zeigt es.

Wie angekündigt, sei auch noch kurz die zweite Möglichkeit (Index (b)) bedacht, eine Lagrangian zu konstruieren. Sie besteht darin, separat jedem (1.1)–Term ein Feld ϕ_j ($j = 0, 1, 2$) zuzuordnen:

$$\mathcal{L}_{(\text{b})} = \frac{1}{2}(\partial\phi_0)^2 - \frac{1}{2A}\,\left[\,(\partial\phi_1)^2 - \Lambda^2\phi_1^2\,\right] + \frac{1}{2B}\,\left[\,(\partial\phi_2)^2 - \Gamma^2\phi_2^2\,\right] \;-\; \frac{g^2}{24}\left(\sum_{j=0}^{2}\phi_j\right)^4 \;. \tag{1.8}$$

[3] Der bereits regularisierten Lagrangian einen Massenterm anzufügen, ist ersichtlich nicht dasselbe wie etwa in jedem der Nenner von (1.1) ein m_{ur}^2 zu addieren. Es dürfte eine Vielzahl von PV–Versionen geben. Unsere wird sich jedenfalls als recht gescheit erweisen (man denke an Add– und Subtraktion eines IR–Regulators).

Am Vertex verknoten sich vier Dreifach–Linien–Propagatoren. Wir fügen einen Massenterm hinzu, lassen aber den hierbei uninteressanten ϕ^4–Term weg (darum der Index Null am $\mathcal{L}$). Das gibt :

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{b}),0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \left[- \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B} \end{pmatrix} \partial^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda^2}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\Gamma^2}{B} \end{pmatrix} - m_{\mathrm{ur}}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{1.9}$$

Die zugehörige nackte Greensfunktion ist Matrix :

$$G_{(\mathrm{b})}^{-1}(P) = \begin{pmatrix} m_{\mathrm{ur}}^2 + P^2 & m_{\mathrm{ur}}^2 & m_{\mathrm{ur}}^2 \\ m_{\mathrm{ur}}^2 & m_{\mathrm{ur}}^2 - \frac{\Lambda^2 + P^2}{A} & m_{\mathrm{ur}}^2 \\ m_{\mathrm{ur}}^2 & m_{\mathrm{ur}}^2 & m_{\mathrm{ur}}^2 + \frac{\Gamma^2 + P^2}{B} \end{pmatrix} \quad . \tag{1.10}$$

Ob sich (1.7) aus dieser Matrixversion erhalten läßt ? Eine Dreifachlinie kommt stets nur in der Kombination $\sum_{i,j} \left(G_{(\mathrm{b})}\right)_{i\,j}$ vor, weil sie am Linien–neutralem 4–Vertex enden können muß :

$$\sum_{i,j} \left(G_{(\mathrm{b})}\right)_{i\,j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} G_{(\mathrm{b})}(P) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots = G_{\mathrm{m}}(P) \quad . \tag{1.11}$$

Rechts steht bereits die Antwort. Um die Rechnung an der punktierten Stelle zu leisten, kann man sich den Vektor $\vec{b} := G_{(\mathrm{b})} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus dem Gleichungssystem $G_{(\mathrm{b})}^{-1} \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimmen und sodann (1.11). bilden.

2 Counterterms

Wir sind bei $T = 0$. Eine Lagrange–Dichte „weiß nichts von Temperatur“. Sie legt den Theorie–Inhalt eines Volumens V fest (vor oder auch nach dessen Ankopplung an Wärmebad). Theorie–Inhalt → Spektrum. Alles über Lagrangians (effektive ggf. ausgenommen) ist $T = 0$–Physik. Aus einer e–mail (8. 9. 97) :

> As for the problems at finite temperature, I strongly encourage you to compute the counterterms in the zero-temperature theory and to use the same counterterms at finite temperature.
> The presence of a finite temperature will itself break scale invariance (except just at T_c).
>
> Good luck!
>
> Michael Peskin

2.1 Reihenfolge. Wie Z's ins Spiel kommen

- Regularisierung, $\mathcal{L}_{\mathrm{ur}} = \mathcal{L}$, (1.6), oder $= \mathcal{L}_{(\mathrm{b})}$ (je mit Masse m_{ur}),
- Divergieren–Wollendes[4] in Z–Faktoren (sowie δm^2) verstecken,

[4] es sind nie „Divergenzen“ ! Die Theorie ist ja regularisiert. Vielmehr reden wir hier von Termen, welche erst mit Γ, $\Lambda \to \infty$ über alle Grenzen anwachsen. Ab und zu nennen wir solche Terme „riesig“. Alles ist endlich, manches riesig, g^2 winzig. Auch 1/riesig ist winzig, aber ggf. $\gg g^2$.

- die Relationen zwischen ur–Größen mit renormierten in $\mathcal{L}_{\rm ur}$ einsetzen. Es entsteht $\mathcal{L}_{\rm ur} = \mathcal{L}_r +$ counterterms $=: \mathcal{L}$ mit $\mathcal{L}_r := \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - (g^2/24)\phi^4$. Kein Index heißt renormierte (= meßbare, mit cutoff $\to \infty$ endlich bleibende) Größe.
- $\mathcal{L}$ per Störungsrechnung $\curvearrowright$ Z's, δm^2 a n d any physics.

Tun! Regularisierung im vorigen Abschnitt erledigt. $\mathcal{L}_{\rm ur}$ — und schon wird ein Versäumnis erkennbar. Ob da nicht, wenigstens nachträglich, einige ur–Indizes anzubringen sind ?! Ja. Die gescheit eingebettete (urige) Theorie hat Lagrangian (1.6). Ihr nackter, uriger Propagator ist (1.7). Ihren vollen Propagator nennen wir $G_{\rm ur}$. Mit Λ, Γ endlich, und $g_{\rm ur}^2$ genügend winzig, hat die Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\rm ur} = -\frac{1}{2}\,\phi_{\rm ur}\,\partial^2\left(1+\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{\partial^2}{\Gamma^2}\right)\phi_{\rm ur} - \frac{1}{2}m_{\rm ur}^2\,\phi_{\rm ur}^2 - \frac{g_{\rm ur}^2}{24}\phi_{\rm ur}^4 \quad , \tag{2.1}$$

eine Störungsentwicklung und insbesondere eine Selbstenergie $\Pi_{\rm ur}(P^2;\Lambda,\Gamma)$. Via Dyson–Gleichung $G_{\rm ur} = G_{\rm m} - G_{\rm m}\Pi_{\rm ur}G_{\rm ur}$ entsteht

$$G_{\rm ur} = \frac{1}{m_{\rm ur}^2 + P^2\left(1+\frac{P^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{P^2}{\Gamma^2}\right) + \Pi_{\rm ur}(P^2;\Lambda,\Gamma)} \quad =: \quad \frac{1}{F(P^2)} \quad . \tag{2.2}$$

Gefahr bemerkt? Üblicherweise wird der Umstand, daß eine Theorie regularisiert sei, so ganz beiläufig in Worten angefügt. Grundsätzlich: wir m ü s s e n bei Z–Produktion von (2.2) ausgehen. Wie harmlos die Gefahrenstelle ist, zeigt sich, bittesehr, erst danach (nämlich in (2.6), (2.7)). Wir sehen sie uns am Beispiel δm^2 und Z_ϕ an.

Der übliche Weg. Damit (2.2) nach analytischer Fortsetzung $i\omega_n \to E + i\varepsilon$, d.h. mit $P^2 = P_{\rm Eukli}^2 = -P_{\rm Minko}^2 = -(i\omega_n)^2 + \vec{p}^{\,2} \;\to\; \vec{p}^{\,2} - E^2$, einen Pol bei $E^2 = m^2 + \vec{p}^{\,2}$ *bekommt* (wobei m^2 die renormierte, meßbare, tatsächliche Masse ist), muß in der Entwicklung von $F(P^2)$ um $P^2 = -m^2$,

$$\begin{aligned} F(P^2) \quad &= \quad F(-m^2) + (P^2+m^2)F'(-m^2) + (P^2+m^2)^2 C(P^2) \\ &\qquad\qquad \text{mit} \quad C(P^2) = \frac{1}{2}F''(-m^2) + \mathcal{O}(P^2+m^2) \quad , \end{aligned} \tag{2.3}$$

der erste Term verschwinden:

$$m^2\left(1-\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{\Gamma^2}\right) \stackrel{!}{=} m_{\rm ur}^2 + \Pi_{\rm ur}(-m^2;\Lambda,\Gamma) \tag{2.4}$$

Aaaha: mit oder ohne runde Klammern bleibt die linke Seite unter Λ, $\Gamma \to \infty$ endlich. Bei der Kompensation von Riesigkeiten bleiben die beiden Terme der rechten Seite unter sich. Beide runden Klammern können entfallen. Damit geht (2.4) über in

$$m_{\rm ur}^2 = m^2 - \delta m^2 \qquad \text{mit} \qquad \delta m^2 := \Pi_{\rm ur}(-m^2;\Lambda,\Gamma) \quad . \tag{2.5}$$

Allerlei Vorzeichenunterschiede im Vergleich mit Literatur beruhen nur auf unserer Euklidischen Version und mögen die Aufmerksamkeit erhöhen. Das Weglassen der runden

Klammern war ein partielles Ausführen von Λ, $\Gamma \to \infty$. Solcherlei kommt noch öfter (z.B. im nächsten Schritt).

Für den zweiten Term in (2.3) entnehmen wir aus (2.2), daß

$$F'(-m^2) = \mathit{\Pi}'_{\rm ur}(-m^2;\Lambda,\Gamma) + 1 - 2\frac{m^2}{\Lambda^2} - 2\frac{m^2}{\Gamma^2} + 3\frac{m^4}{\Gamma^2\Lambda^2} \quad , \tag{2.6}$$

ist. Die Vernachlässigbarkeit der letzten drei Terme ist offensichtlich. Aufregung umsonst (die unter (2.2) notierte). Resultat:

$$G_{\rm ur} = \frac{Z_\phi}{(P^2+m^2)\ \left[\,1 + (P^2+m^2) Z_\phi C(P^2)\,\right]} \quad \text{mit} \quad Z_\phi := \frac{1}{1 + \mathit{\Pi}'_{\rm ur}(-m^2;\Lambda,\Gamma)} \quad . \tag{2.7}$$

Bei diesem Einstieg erscheint es wie ein notwendiges Übel, ein verändertes „Gewicht“ (Wellenfunktionsrenormierung) des Propagator–Pols in Kauf nehmen zu müssen. Es ist darum sehr sehr beruhigend, wenn man vorher (oder nachher) einmal jene Betrachtung (zum exakten Propagator mittels exakter Spektralfunktion) gesehen hat, bei welcher diese Gewichtsabnahme in Strenge zum Vorschein kommt: § 7.1 in Peskin und Schoeder [2].

Wie man auch noch das Divergieren–Wollen vierbeiniger Greens (6–beinige sind *superficially* endlich: $D = 4 - E$) in ein Z_g abdrängt, und daß man aus jeder Linie artig je ein $\sqrt{Z_\phi}$ an $g^2_{\rm ur}$ heranholt, das sei hier getrost den Lehrbüchern überlassen. Die unphysikalische (wiewohl urige) Start–Theorie wollen wir baldigst verlassen. Einmal eingeführt, werden die Objekte δm^2, Z_ϕ, Z_g („es gibt sie“ ist das Fazit der Urigkeiten) zu Bestandteil von $\mathcal{L}$ (siehe Reihenfolge und (2.9)). Und mit $\mathcal{L}$, der renormierten und counterterm–bestückten Lagrangian, werden tunlichst alle Rechnungen angestellt, einschließlich der Bestimmung von δm^2, Z_ϕ, Z_g . Zu bewahren bleiben allein die folgenden drei Zusammenhänge:

$$\phi_{\rm ur} = \sqrt{Z_\phi}\,\phi \quad , \quad m^2_{\rm ur} = m^2 - \delta m^2 \quad , \quad g^2_{\rm ur} \;=\; \frac{Z_g}{Z_\phi^2}\, g^2 \quad . \tag{2.8}$$

Die dritte Gleichung ist besonders wertvoll. $g^2_{\rm ur}$ hängt nicht von Λ, Γ ab (sie „weiß noch nichts“ vom späteren Menschenwerk der Einbettung). Also macht die dritte Gleichung (2.8) eine Aussage über die Λ–Γ–Abhängigkeit renormierter Objekte.

Setzt man die Zusammenhänge (2.8) schlicht in (2.1) ein ($\mathcal{L}$ i s t $\mathcal{L}_{\rm ur}$), dann entsteht

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\, Z_\phi\, \phi\, \partial^2 \left(1 + \frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right) \left(1 + \frac{\partial^2}{\Gamma^2}\right) \phi \;-\; \frac{1}{2}\left(m^2 - \delta m^2\right) Z_\phi\, \phi^2 \;-\; \frac{g^2}{24}\, Z_g\, \phi^4 \quad . \tag{2.9}$$

Es ist Pauli und Villars hoch anzurechnen, daß mit ihrer Regularisierung das Eingebettetsein einer Lagrangian auch explizit sichtbar wird.

2.2 Masselose ϕ^4

Es ist anders als bei Eichbosonen mit ihren Ward–Identitäten. Wenn die Skalare der ϕ^4 als Spielzeug für erstere herhalten sollen, dann müssen wir (künstlich sozusagen) für deren Masselosigkeit s o r g e n . Das geschieht durch Nullsetzen von m^2 in (2.9). Nur ein einziger Term entfällt dort. (2.5) reduziert sich auf $m_{\text{ur}}^2 = -\delta m^2$. Alsbald wird sich δm^2 als „riesig" erweisen, also braucht die urige Kunst–Theorie ein minus–riesiges Startmassenquadrat m_{ur}^2.

Mit Blick auf Störungsrechnung sollte $\mathcal{L}$ (zu $m^2 = 0$) geeigneter aufgeschrieben werden. Da aus Störungsentwicklung entstanden (egal ob nach g_{ur} oder g), reduzieren sich bei Abschalten der Kopplung Z_ϕ und Z_g auf Eins, und δm^2 auf Null:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \\
\mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{2}\,\phi\,\partial^2 \left(1 + \frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\left(1 + \frac{\partial^2}{\Gamma^2}\right)\phi \\
\mathcal{L}_{\text{int}} &= \frac{1}{2}\,\phi \left[\,\delta m^2 Z_\phi - (Z_\phi - 1)\,\partial^2\,(1 + \tfrac{\partial^2}{\Lambda^2})\,(1 + \tfrac{\partial^2}{\Gamma^2})\,\right]\phi \;-\; \frac{g^2}{24} Z_g \phi^4 \quad . \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Dies ist noch immer $\mathcal{L}_{\text{ur}}$ – nur anders aufgeschrieben. Nichts dagegen, den zwei Wechselwirkungen nun je ein Diagramm–Symbol zu geben, etwa ein eingekreistes Kreuz $-\!\otimes\!-$ für die eckig–geklammerte Masseneinsetzung[5], und einen Dick–Boller–Vertex für den Z_g–verzierten 4–Vertex, siehe z.B. Peskin+Schroeder [2], Figure 10.3.

2.3 Renormierungsbedingungen

Dies ist deshalb eine schwierige Materie, weil sich der Sinn der Einstiegs–Gleichungen (2.11) bis (2.13) erst enthüllt, wenn man *mit ihnen* ein Stück weit gerechnet hat. Die (vorerst also nur verbal motivierbaren) Renormierungsbedingungen werden es erlauben, die counterterms Z_ϕ, Z_g, δm^2 eindeutig als Reihe in g^2 Term für Term zu bestimmen. Erst danach ist $\mathcal{L}$ ausreichend „bestückt" und bereit für Herausmelken von physics aller Art, einschließlich thermischer.

Counterterm–Bestimmung ist Störungsrechnung an $\mathcal{L}$ und Physik aus $\mathcal{L}$ zu holen ebenfalls. An den eigenen Haaren aus dem Sumpf? Langsam. Um des Himmels willen wollen wir nicht mehr zur urigen Theorie zurück. Die counters sind riesig werdende Zahlen (besser: Funktionen von g und Λ, Γ), und einige Integrale bei Diagramm–Auswertung ebenfalls, und zwar zusätzlich. Die Riesigkeiten haben sich zu kompensieren, wobei es ausreicht, nur die anwachsenden Terme der groß–Λ–Asymptotik sich wegfressen zu lassen. Na also, wir wissen ja etwas. Um diese Philosophie ins Konkrete zu übersetzen (und zwar eindeutig), genügen drei Forderungen. Die Theorie soll Ordnung für Ordnung masselos bleiben (siehe (2.11)). Wir dürfen auch ruhig verlangen, daß der Propagator G Ordnung für Ordnung Residuum 1 hat und behält (siehe (2.12)). Wir bestimmen einfach die counters so, daß dem so ist (man hat einige Freiheit in der tatsächlichen Durchführung, vgl.

[5] Diagrammatisch ersetzen sich in der eckigen Klammer die ∂^2 durch Q^2. Sie wird dann ein $\overline{Y}(Q)$ in den Regeln bei Reinbach und Schulz [6].

Resummierung). Und dann ist da die Kopplung g^2. Was soll das sein? Die muß man messen (siehe (2.13)). Soso.

Aber nun wirds kriminell. Die Leute, welche mit bestimmten Ein– und Ausgangsimpulsen (etwa alle vier von Größenordnung M^2) einen Zweierstoß verfolgen, die reden von einer anderen Kopplung als jene, die das Experiment bei M'^2 ausführen. Die Zeiten der absoluten „Elektronenladung" die sind vorbei, weil die Zeiten eines Lebens ohne Dirac–See vorbei sind. Abschirmeffekte ([2], Figure 7.8) lassen sich aus einer solchen Welt nicht wegschaffen (Elektronen nicht aus dem Welt–Halbleiter herausholen). Ist da Kopplung, ist da auch See–Effekt. Gott würfelt nicht (QM), er bastelt nicht (STM), er wurzelt nicht (Allg.Rel.), sehr erstaunlich, wenn er besondere Vorliebe für Hosen hätte (Strings), er renormiert wohl auch nicht, aber er läßt uns armselige Menschlein hängen in einer „effektiven Theorie", in einer mittleren Skala, und baumelt mit der Planckschen in großer Ferne. Schiebt sie mal schön dort hin, eure cutoffs. Tschja, Demut, nicht wahr, wird uns auferlegt, wohl weil wir gegen diese im täglichen Leben so sehr verstoßen.

Rein technisch gilt es vorauszuahnen, daß es genau die Selbstenergie–Ableitung und der amputierte 4–Vertex sein werden, welche einen $\ln(Q^2)$ enthalten. Und das kann nicht sein: er braucht eine Skala, einen weiteren ln. Zunächst wird das ein $\ln(\Lambda^2)$ sein. Aber nach Abdrängen solcher Riesigkeit in counters muß etwas bleiben: $\ln(M^2)$. Ansonsten lassen wir uns von Adam Riese beruhigen: drei unbekannte counters — drei Bedingungen.

Die drei Renormierungsbedingungen sind dem Buch von Zinn–Justin [7] entnommen: Gln. (10.58–60) und (25.37). Das dortige $\Gamma^{(2)}$ ist $\Pi + P^2$, und Π natürlich die Selbstenergie (1PI), zu ermitteln per Störungsrechnung an (2.10). Die drei Bedingungen lauten

$$\boxed{\begin{aligned} &\Pi(\,Q^2 = 0\,) \;=\; 0 \\ &\Pi'(\,Q^2 = M^2\,) \;=\; 0 \\ &\Gamma^{(4)}(\,s = t = u = M^2\,) \;=\; -\frac{g^2}{24} \end{aligned}} \quad . \qquad \begin{aligned} &(2.11) \\ &(2.12) \\ &(2.13) \end{aligned}$$

Der Strich steht für Differentiation nach Q^2 (Euklidisch). $\Gamma^{(4)}$ ist die beinamputierte 4–Punkt–Funktion, und $s = (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)^2$, $t = (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_3)^2$, $u = (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_4)^2$ sind die Mandelstam–Variablen (alle $\vec{Q}_j$ einlaufend).

Zur Notation: wir schreiben Großbuchstabe mit Pfeil (z.B. $\vec{Q}$) für euklidische 4–Vektoren und meinen mit PQ nur das Produkt der beiden Beträge. Bei $Q^2 = \vec{Q}\,\vec{Q} = Q_0^2 + \vec{q}^{\,2}$ macht dies noch keinen Unterschied zur herkömmlichen Bezeichnungsweise. Aber es ist nun $\vec{P}\,\vec{Q} = P_0 Q_0 + \vec{p}\,\vec{q}$ n i c h t gleich dem Produkt PQ der beiden Beträge.

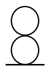
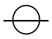
(2.13) „definiert“ die Kopplung[6] bei Skala M . Die Kompensation riesiger Terme wird durch (2.11) – (2.13) implizit erzwungen. Dies einzusehen, lernt man durch Spielen:

Beispiel 1 (billig) : $f(x,\Lambda) = g(x,\Lambda) - Z(\Lambda)$. Die Bedingung $f(M,\Lambda) \stackrel{!}{=} 0$ liefert $Z(\Lambda) = g(M,\Lambda)$ und somit $f(x,\Lambda) = g(x,\Lambda) - g(M,\Lambda)$. Sind die riesigen Anteile in g unabhängig von x, so bleibt f endlich, wenn $\Lambda \to \infty$. Die Konstante Z scrollt den Bildschirm bis der Funktionsverlauf zu sehen ist.

Beispiel 2 (bereits recht gute Simulation für den nächsten subsection, $Z_1 \widehat{=} \delta m^2$) :
$\Pi(x^2) = 2\int_0^\Lambda dy \frac{y^3}{y^2+x^2} + x^2 Z_2 - Z_1 \;=\; \Lambda^2 + x^2 \ln(x^2/\Lambda^2) + x^2 Z_2 - Z_1 - x^2 \ln(1 + x^2/\Lambda^2)$,
und der letzte Term kann natürlich im Vorwegausführungs–Sinne entfallen.
(2.11) : $Z_1 = \Lambda^2$, (2.12) : $Z_2 = -1 - \ln(M^2/\Lambda^2)$. Soweit conditions — nun physics : $\Pi(x^2) \;=\; -x^2 + x^2 \ln(x^2/M^2) \;=\;$ endlich (d.h. beschränkt bei $\Lambda \to \infty$).

2.4 Counterterms als Reihen in g^2

Der nackte Propagator G_0 zu (2.10) ist (1.1). Die counters setzen wir als Potenzreihen an: $\delta m^2 = \delta_2 + \delta_4$ (Index = g–Potenz). Im Sinne einer Annahme, deren Konsistenz sich alsbald erweisen wird, gehen wir von $Z_g - 1 \sim g^2$ und $Z_\phi - 1 \sim g^4$ aus. Damit ist klar, welche Diagramme (bei $T = 0$) zu studieren sind:

$\Pi \;=\; -2$  $-\,12$  $-\,24$  $-\,144$  $-\,96$  $+\,\mathcal{O}(g^6)$, (2.14)

$\Gamma^{(4)} \;=\;$  $+\,12$  $+\,12$  $+\,12$  $+\,\mathcal{O}(g^6)$. (2.15)

Die IR–Divergenzen (diesesmal echte) im dritten und vierten Π–Beitrag werden sich alsbald kompensieren und somit keine IR–Regularisierung notwendig werden lassen. Von den Beinen, wiewohl amputiert, muß man noch wissen, daß jene an $\Gamma^{(4)}$ einliefen und im mathematisch positivem Sinne $\vec{Q}_1$ bis $\vec{Q}_4$ trugen (links oben $\vec{Q}_1$). Die Π–Beine liefen durch (links ein, rechts aus).

Kombinatorische Faktoren sind in (2.14), (2.15) so angegeben, daß der Rest den [6]–Regeln folgt. Auf daß man (zu Π) diese Regeln noch am Werke sehe:

$$\Pi(Q) \;=\; -\Big[\, \delta_2 + \delta_4 - (Z_\phi - 1) Q^2 (1 + \tfrac{Q^2}{\Lambda^2})\,(1 + \tfrac{Q^2}{\Gamma^2}) \,\Big] - 12 \left(-\frac{g^2 Z_g}{24} \right) b_0$$
$$-24 \left(-\frac{g^2}{24} \right) \left(\frac{1}{2} [\,\delta_2\,] \right) \int_P G_0^2 - 144 \left(-\frac{g^2}{24} \right)^2 b_0 \int_P G_0^2 - 96 \left(-\frac{g^2}{24} \right)^2 \chi(Q^2) \;. \quad (2.16)$$

Hierin ist

$$b_0 := \int_P G_0 \;,\; \int_P := \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4P \;,\; \chi(Q^2) = \int_P \int_K G_0(\vec{Q} - \vec{P})\, G_0(\vec{P} - \vec{K})\, G_0(K) \;. \quad (2.17)$$

[6] Speaking loosely, we say that we are „defining the theory at the scale M“, so Peskin und Schroeder, [2], unter (12.30) . Nebenbei: In der ersten der 3 Bedingungen (12.30) bei [2] sollte es „at $p^2 = 0$“ heißen.

Bei $T \to 0$ geht die thermische Summe $\sum_P := T \sum_n \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p$ direkt in $\int_P$ über ($\omega_n = P_0$, euklidisch). Also ist b_0 der $T = 0$–Anteil von $b := \sum G_0$. Daß b_0 „quadratisch divergent“ ist, zeigt der Blick voraus auf (2.22).

Die Bedingung (2.11) ist Ordnung für Ordnung zu erfüllen (hier in g^2 und g^4). In Ordnung g^2 hängt Π gar nicht von Q^2 ab. Also ist (2.12) in dieser Ordnung trivial erfüllt. (2.11) besagt

$$\Pi^{\text{in g}^2} \overset{!}{=} 0 \qquad \curvearrowright \qquad \delta_2 = \frac{1}{2} g^2 b_0 \quad . \tag{2.18}$$

Und das ist fein, denn mit diesem δ_2–Wert werden die beiden IR–Teufel, 24–er und 144–er Term, entgegengesetzt gleich (Vorhersage eingetroffen). Es bleibt

$$\Pi^{\text{in g}^4} = -\delta_4 + \frac{1}{2} g^2 (Z_g - 1) b_0 + Q^2 (Z_\phi - 1)(1 + \tfrac{Q^2}{\Lambda^2})\,(1 + \tfrac{Q^2}{\Gamma^2}) \; - \frac{1}{6} g^4 \chi(Q^2) \tag{2.19}$$

und ist diesesmal beiden Π–Bedingungen zu unterwefen: 2 Gleichungen für die 2 Unbekannten δ_4 und Z_ϕ, denn Z_g wird sich aus der dritten Bedingung (2.13) ergeben. Man ahnt, daß die drei Bedingungen in höheren Ordnungen wild verkoppelt und nichtlinear werden können. Hier bleibt die Sache jedoch einfach. Wir werfen zuerst (2.19) in die Ableitungs–Bedingung (2.12),

$$(Z_\phi - 1) \left(1 + 2\frac{M^2}{\Lambda^2} + 2\frac{M^2}{\Gamma^2} + 3\frac{M^4}{\Lambda^2 \Gamma^2} \right) - \frac{1}{6} g^4 \chi'(M^2) \overset{!}{=} 0 \quad ,$$

vernachlässigen Winzigkeiten und erhalten

$$Z_\phi \;=\; 1 \;+\; \frac{1}{6}\, g^4\, \chi'(M^2) \tag{2.20}$$

(Start–Annahme zu Z_ϕ erfüllt). Schließlich führt (2.11) in Ordnung g^4 auf

$$\delta_4 \;=\; \frac{1}{2}\, g^2\, (Z_g - 1)\; b_0 \;-\; \frac{1}{6}\, g^4\, \chi(0) \quad . \tag{2.21}$$

Die Dinge warten nun ersichtlich auf Z_g und auf Auswertung von b_0 und $\chi(Q^2)$.

Wir beginnen mit b_0, weil es nur einen Zweizeiler braucht und die PV–Einbettung illustriert:

$$\begin{aligned} b_0 \;&=\; \int_P G_0 = \frac{1}{16\pi^4} \Omega_4 \int_0^\infty dP\; P^3 \left(\frac{1}{P^2} - \frac{A}{P^2 + \Lambda^2} + \frac{B}{P^2 + \Gamma^2} \right) \\ &=\; \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dr\; \left(\frac{A\Lambda^2}{r + \Lambda^2} - \frac{B\Gamma^2}{r + \Gamma^2} \right) \;=\; \frac{1}{16\pi^2} \frac{\Gamma^2\, \Lambda^2}{\Gamma^2 - \Lambda^2} \ln\left(\frac{\Gamma^2}{\Lambda^2} \right) \quad . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Um die zweite Zeile zu erhalten, wurde aus (A . 5) die 4D Kugeloberfläche $\Omega_4 = 2\pi^2$ eingesetzt (allgemein: $\Omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$), $P^2 = r$ substituiert, ein r in die runde Klammer geholt und diese mittels $A - B = 1$ vereinfacht. Die Gleichheit von $A\Lambda^2$ mit $B\Gamma^2$, s. (1.4), enthüllt sodann die UV–Konvergenz des Integrals. Mit $\Gamma \sim \Lambda \to \infty$ wächst b_0 quadratisch an.

Um zu Z_g klüger zu werden, ist $\Gamma^{(4)}$ auszuwerten, d.h. die loop–Integrale von (2.15). Möge die untere runde Linie im Loop $\bowtie$ nach rechts laufen und Impuls $\vec{P}$ tragen, dann ist an der linkslaufenden oberen $\vec{P} - (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)$ anzubringen. Die P-Integration wird eine Funktion von $(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)^2 =: Q^2$ liefern:

$$w_0(Q^2) = \int_P G_0(P) G_0(\vec{P} - \vec{Q}) \quad =: \quad „\text{Perle}“ \quad . \tag{2.23}$$

Solche Perlen mit ihren paarigen Enden kann man zu einer Kette aufreihen — Perlenketten, Würstchenringe, der Appetit auf letztere hat einmal zum Buchstaben w geführt. $\Gamma^{(4)}$ hängt offenbar tatsächlich nur von den Mandelstam–Variablen ab:

$$\Gamma^{(4)}(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \vec{Q}_4) = -\frac{g^2}{24} Z_g + 12 \left(\frac{g^2}{24} \right)^2 \Big(w_0(s) + w_0(t) + w_0(u) \Big) \quad . \tag{2.24}$$

Bitte jetzt keine Unterbrechung durch längliches Integrieren. Also entwenden wir kurzerhand w_0 (in der relevanten Version) aus dem nächsten Abschnitt:

$$w_0(Q^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left(\text{LN} - \ln(Q^2) \right) \; + \; \mathcal{O}\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) \qquad\qquad \equiv \; (2.44) \text{ siehe unten}$$

(wobei LN eine Bildung aus Λ, Γ ist, welche bei $\Gamma \sim \Lambda \to \infty$ logarithmisch anwächst, s. (2.46)), setzen w_0 in obiges $\Gamma^{(4)}$ ein und sodann dieses in die dritte Bedingung (2.13),

$$-\frac{g^2}{24} Z_g + \frac{g^4}{24} \frac{3}{32\pi^2} \left(\text{LN} - \ln(M^2) \right) \; \stackrel{!}{=} \; -\frac{g^2}{24} \quad ,$$

und erhalten Z_g zu

$$Z_g \; = \; 1 + \frac{3\, g^2}{32\pi^2} \left(\text{LN} - \ln(M^2) \right) \; + \; \mathcal{O}(g^4) \quad . \tag{2.25}$$

Die drei Renormierungsbedingungen sind abgearbeitet. Nur noch Auswertung der Funktion $\chi(Q^2)$ aus (2.17) steht aus. Ist nicht das zugehörige *setting sun* Diagramm eine Perle, von deren 4 Beinen zwei entfernte miteinander verbunden wurden ?! Gewiß, (2.17) zeigt es:

$$\chi(Q^2) \; = \; \int_P G_0(\vec{Q} - \vec{P}) \, w_0(P^2) \quad . \tag{2.26}$$

Einmal mehr wollen wir jetzt nicht in Integrationsdetails ertrinken. Sie seien im Anhang B abgelagert. Von dort stammen also die folgenden Resultate:

$$\chi(Q^2) \; = \; \chi(0) \; + \; \chi_1(Q^2) \; + \; \chi_2(Q^2) \qquad \text{mit} \tag{2.27}$$

$$\chi_1(Q^2) \; = \; \int_P w_0(P^2) \left(\frac{1}{(\vec{P} - \vec{Q})^2} - \frac{1}{P^2} \right) \tag{2.28}$$

$$\; = \; \frac{2}{(32\pi^2)^2} \left(Q^2 \ln\left(Q^2\right) \; - \; Q^2 \left[\text{LN} + \frac{3}{2} \right] \right) \quad , \tag{2.29}$$

$$\chi_2(Q^2) \; = \; \int_P w_0(P^2) \left(\frac{A}{P^2 + \Lambda^2} - \frac{B}{P^2 + \Gamma^2} \; - \; \text{dito}_{P \,\to\, \vec{P} - \vec{Q}} \right) \tag{2.30}$$

$$\; = \; \frac{2}{(32\pi^2)^2} \, c_2 \, Q^2 \; + \; \mathcal{O}\left(\frac{Q^4}{\Lambda^2} \right) \quad , \quad c_2 \; = \; \mathcal{O}(1) \quad . \tag{2.31}$$

Die drei Anteile in (2.27) sind nach abnehmender Größe geordnet. $\chi(0)$ divergiert quadratisch, χ_1 logarithmisch und χ_2 gar nicht. Mit der Auswertung von $\chi(0)$ lassen wir uns Zeit, bis dieser nur in δm^2 vorkommende Term von selber stirbt (an cancellation: siehe (4.22) bis (4.24)). Auch $\chi_2(Q^2)$ macht Schwierigkeiten (im Anhang B). Aber es genügt die Struktur (2.31). Weshalb wir den Koeffizienten c_2 für den Druck p bis mit g^4 gar nicht auszuwerten brauchen, steht im Text zwischen (3.8) und (3.9). In $\chi(0)$ sowie in χ_2 ist die klein–Q^2–Version von (2.44) unzureichend, weil Beiträge von $P^2 \sim \Lambda^2$ wesentlich werden. Ganz anders steht es um $\chi_1(Q^2)$: es ist mit (2.44) zufrieden und überhaupt ein liebes Mäuschen. Mit (2.27) bis (2.31), d.h. mit $\chi'(Q^2) = \partial_{Q^2} \left[\chi_1(Q^2) + \chi_2(Q^2) \right]$ ergibt sich

$$\chi'(M^2) = \frac{2}{(32\pi^2)^2} \left(\ln(M^2) - \mathrm{LN} - \frac{1}{2} + c_2 \right) \quad . \tag{2.32}$$

Die Resultate dieses länglichen Abschnitts verdienen eine kurze Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta m^2 \; &= \; \frac{1}{2} g^2 Z_g b_0 \; - \; \frac{1}{6} g^4 \chi(0) \; + \; \mathcal{O}(g^6) \\ Z_g \; &= \; 1 + \frac{3g^2}{32\pi^2} \Big(\mathrm{LN} - \ln(M^2) \Big) \; + \; \mathcal{O}(g^4) \\ Z_\phi \; &= \; 1 \; + \; \frac{1}{3} \left(\frac{g^2}{32\pi^2} \right)^2 \left(\ln(M^2) - \mathrm{LN} - \frac{1}{2} + c_2 \right) \; + \; \mathcal{O}(g^6) \end{aligned}} \tag{2.33}$$

Die Riesigkeit aller drei Counterterme versteckt sich in LN (logarithmisch) und b_0 (quadratisch). Später werden wir von Z_ϕ nur die 1 benötigen — aber hier wollten wir unbedingt wissen, wie die erste Korrektur aussieht und wie sie „divergiert“. Es ist der Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{\text{int}}$ in der Lagrangian (2.10), welcher auf die eingerahmten Bestimmungsstücke gewartet hatte.

2.5 Eine Perle bei $T = 0$

Die Überschrift verweist schlicht auf $w_0(Q^2)$. Wir haben das Integral (2.23) auszuwerten und mindestens die Klein–Q^2–Asymptotik (2.44) herzuleiten (um das geheimnisvolle LN endlich kennenzulernen). (2.44) wird sogar ausreichen, wenn später das Basketballdiagramm  zu schlachten sein wird.

G_0 enthält 3 Terme, w_0 also 9. Um rentabel mit diesen umzugehen, definieren wir einen Operator $\mathcal{V}_t$ (den „Villars–Einbetter“):

$$\mathcal{V}_t \, f(t) \; := \; f(0) - A \, f(\Lambda^2) + B \, f(\Gamma^2) \quad , \tag{2.34}$$

so daß

$$G_0 = \mathcal{V}_t \, \frac{1}{t + P^2} \quad \text{und} \quad w_0(Q^2) = \int_P \mathcal{V}_t \, \mathcal{V}_\tau \, \frac{1}{t + P^2} \, \frac{1}{\tau + (\vec{P} - \vec{Q})^2} \quad . \tag{2.35}$$

Es ist $\mathcal{V}_t\, 1 = 1 - A + B = 0$. Und falls $f(t,\tau) = f(\tau,t)$, dann

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t\, \mathcal{V}_\tau\, f(t,\tau) &= f(0,0) - 2A\, f(\Lambda^2,0) + 2B\, f(\Gamma^2,0) \\ &+ A^2\, f(\Lambda^2,\Lambda^2) + B^2\, f(\Gamma^2,\Gamma^2) - 2AB\, f(\Lambda^2,\Gamma^2) \quad . \end{aligned} \tag{2.36}$$

Zu (2.35) ist Winkelmittelung keine schlechte Idee. Hier aber empfiehlt sich die Feynman–Parametrisierung

Wenn ab positiv, **nur** dann $$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx\, \frac{1}{[\, ax + b\,(1-x)\,]^2} = \int_0^\infty dv\, \frac{1}{[\, a + b\,v\,]^2} \quad , \tag{2.37}$$

und zwar ausnahmsweise die übliche mittlere Version von (2.37):

$$w_0(Q^2) = \int_0^1 dx \int_P \mathcal{V}_t\, \mathcal{V}_\tau\, \frac{1}{\left[\, (t+P^2)x + (\tau + (\vec{P} - \vec{Q})^2\,(1-x)\,\right]^2} \quad . \tag{2.38}$$

Verschiebung $\vec{P} \to \vec{P} + (1-x)\vec{Q}$ unter dem P–Integral tilgt aus der eckigen Klammer die Skalarprodukte. Sie wird zu $[\, P^2 + tx + \tau(1-x) + Q^2 x(1-x)\,]$, und wir erhalten

$$w_0(Q^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx\, \mathcal{V}_t\, \mathcal{V}_\tau \int_0^N dr\, \frac{r}{[\, r + tx + \tau(1-x) + Q^2 x(1-x)\,]^2} \quad , \tag{2.39}$$

wobei $N \to \infty$ auf $\mathcal{V}$–Anwendungen warten muß.

$$w_0(Q^2) = \frac{1}{16\pi^2}\, \mathcal{V}_t\, \mathcal{V}_\tau \int_0^1 dx \left[\ln\left(\frac{N}{tx + \tau(1-x) + Q^2 x(1-x)} \right) - 1 \right] \quad . \tag{2.40}$$

Hieran sieht man schön, wie die Regularisierung greift. Wegen $\mathcal{V}_t\, 1 = 0$ können wir in der eckigen Klammer $\ln(N)$ weglassen, ebenso die -1 , und schließlich auch noch $\ln(x(1-x))$ addieren. Es ensteht

$$w_0(Q^2) = -\frac{1}{16\pi^2}\, \mathcal{V}_t\, \mathcal{V}_\tau\, f(t,\tau) \quad \text{mit} \quad f(t,\tau) = \int_0^1 dx\, \ln\left(\frac{t}{1-x} + \frac{\tau}{x} + Q^2 \right) \quad . \tag{2.41}$$

Substitution $x \to 1-x$ zeigt, daß obige Funktion f unter $t \leftrightarrow \tau$ symmetrisch ist, so daß wir w_0 mittels (2.36) auswerten dürfen.

Erstaunlicherweise werden wir $w_0(Q^2)$ nur bei kleinem Argument Q^2 (klein gegen Λ^2, Γ^2) explizit benötigen. Im Anhang E und F zeigt sich dies. Die in (2.36) vorkommenden Argumente t und τ sind entweder beide Null oder wenigstens eines hat Ordnung $\mathcal{O}(\Lambda^2)$. Im letzteren Falle können wir rechts in (2.41) jenes $+Q^2$ streichen. Fazit:

$$f(0,0) = \ln\left(Q^2\right) \qquad \text{und ansonsten} \qquad f(t,\tau) = g(t,\tau) + \mathcal{O}\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)$$

$$\text{mit} \quad g(t,\tau) = \int_0^1 dx\, \ln\left(\frac{t}{1-x} + \frac{\tau}{x} \right) = \frac{t\,\ln(t) - \tau\,\ln(\tau)}{t - \tau} + 1 \quad . \tag{2.42}$$

Hieraus ergeben sich die für (2.36) benötigten speziellen g–Werte

$$\begin{aligned} g(\Lambda^2,0) &= \ln(\Lambda^2) + 1 \quad , \quad g(\Lambda^2,\Lambda^2) = \ln(\Lambda^2) + 2 \quad , \\ g(\Lambda^2,\Gamma^2) &= A\ln(\Gamma^2) - B\ln(\Lambda^2) + 1 \quad . \end{aligned} \tag{2.43}$$

Die linke Gleichung (2.41) wird mit (2.36), (2.42) und (2.43), mit etwas Rechnung und Ausnutzen von $A - B = 1$ schließlich zu

$$w_0(Q^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left(\mathrm{LN} - \ln(Q^2) \right) \quad + \quad \mathcal{O}\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) \quad , \quad . \tag{2.44}$$

Dabei kommt natürlich auch die Konstante LN explizit heraus. Wir geben ihr drei verschiedene Gewänder:

$$\begin{aligned} \mathrm{LN} \;&=\; \ln(\Lambda^2)\,\left[2A - A^2 - 2AB^2\right] \;-\; \ln(\Gamma^2)\,\left[2B + B^2 - 2A^2B\right] - 2AB \quad , && (2.45)\\ &=\; \ln(\Gamma\Lambda) - 2AB + (A+B)\,(2AB-1)\ln\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right) \quad , \\ &=\; \frac{\Gamma^4\,(\Gamma^2 - 3\Lambda^2)}{(\Gamma^2-\Lambda^2)^3}\ln\left(\Lambda^2\right) + \frac{\Lambda^4\,(\Lambda^2-3\Gamma^2)}{(\Lambda^2-\Gamma^2)^3}\ln\left(\Gamma^2\right) - 2\frac{\Gamma^2\Lambda^2}{(\Gamma^2-\Lambda^2)^2} \quad . && (2.46)\end{aligned}$$

Wie erwartet, ist LN unter Λ–Γ–Vertauschung invariant. LN enthält sowohl logarithmisch „divergente“ als auch beschränkt bleibende Terme (letztere zeigt die mittlere Zeile besonders deutlich). Seine Grenzfälle sind

$$\mathrm{LN} \to \ln\left(\Lambda^2\right) \quad (\,\Gamma^2 \to \infty\,) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{LN} \to \ln\left(\Lambda^2\right) - \frac{5}{6} \quad (\,\Gamma^2 \to \Lambda^2\,) \quad . \tag{2.47}$$

Die beiden cutoff's Λ und Γ aber lieber allgemein zu halten, das finden wir besonders sinnig: soo viel redundante „Information“ hat sich aus Physik fernzuhalten!

Ganz nebenbei sei angemerkt, daß $w_0(Q^2)$ in Strenge explizit ausintegriert werden kann. Hier sei nur das Detail

$$f(\Lambda^2,\Gamma^2) = \ln(\Gamma\Lambda) \;-\; \frac{\Gamma^2-\Lambda^2}{Q^2}\ln\left(\frac{\Gamma}{\Lambda}\right) \;+\; \frac{W}{2Q^2}\ln\left(\frac{Q^2+\Gamma^2+\Lambda^2+W}{Q^2+\Gamma^2+\Lambda^2-W}\right) \tag{2.48}$$

notiert, wobei $W := \sqrt{(Q^2+\Gamma^2+\Lambda^2)^2 - 4\Gamma^2\Lambda^2}$ ist. $f(\Lambda^2,0) = \ln(\Lambda^2+Q^2) + \frac{\Lambda^2}{Q^2}\ln(1+\frac{Q^2}{\Lambda^2})$ folgt aus (2.48) per $\Gamma \to 0$, und natürlich ist $f(0,0) = \ln(Q^2)$.

Für den Fall, daß das Argument Q^2 in der Nähe von Λ^2, Γ^2 liegt, werden wir an zwei späteren Stellen nur noch die Größenordnung von w_0 (nämlich 1) benötigen. Dies kann man aus (2.48) ergründen. Aber wir gehen besser von (2.41) aus, ziehen die $\mathcal{V}$–Operatoren unter das Integral, benutzen dort (2.36) und schreiben

$$w_0(Q^2) = \frac{-1}{8\pi^2}\int_0^1 dx \;\text{Integrand}\,(x) = \frac{-1}{8\pi^2}\int_0^{1/2} dx\;\left[\,\text{Integrand}\,(x) + \text{Integrand}\,(1-x)\,\right] \quad . \tag{2.49}$$

Die eckige Klammer ist eine Linearkombination von Logarithmen. Weil $1-2A+2B+(A-B)^2 = 0$ ist, dürfen wir von jedem dieser Logarithmen ein $\ln(Q^2)$ subtrahieren. Addieren wir auch noch je ein $\ln(x)$ so bleibt

$$w_0(Q^2) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{1/2} dx\;\ln(x)\left\{-A+B+(A-B)^2\right\} + \mathcal{O}(1) \;=\; \mathcal{O}(1) \quad , \tag{2.50}$$

Es spielt schon keine Rolle mehr, daß die geschwungene Klammer Null ist.

Abschließend interessiert uns noch, wie wohl $w_0(Q^2)$ bei großen Q^2 abfällt: $Q^2 \gg \Lambda^2$, Γ^2. Statt sich hierzu an (2.48) zu quälen, blicken wir besser auf (2.35) zurück. Im euklidischen $\vec{P}$–Raum sind zwei Bereiche relevant. Solange $P^2 \ll Q^2$ ist, kann der zweite Nenner zu $\tau + Q^2$ vereinfacht werden. Aber es kann auch $\vec{P}$ nahe $\vec{Q}$ liegen. Per $\vec{P} \to \vec{P} + \vec{Q}$ wird klar, daß sich dann der erste Nenner zu $t + Q^2$ vereinfacht. Dies erklärt den Faktor 2 in

$$w_0(Q^2) \;\to\; 2 \int_P \mathcal{V}_t \frac{1}{t+P^2} \;\; \mathcal{V}_\tau \frac{1}{\tau + Q^2} \;=\; 2\, G_0(Q^2) \int_P G_0(P^2) \;\;. \tag{2.51}$$

Das P–Integral ist b_0, siehe (2.22). Und wie sich $G_0(Q^2)$ bei $Q^2 \to \infty$ vereinfacht, ist (1.3) direkt anzusehen. Der asymptotisch führende Term ist also

$$w_0(Q^2) \;\to\; 2\, b_0\, \Gamma^2 \Lambda^2 \, \frac{1}{Q^6} \qquad \big(Q^2 \to \infty \big) \;\;. \tag{2.52}$$

Soweit waren die Bemühungen auf Temperatur Null beschränkt und insofern etwas langweilig (?!). Falls hier jemand „die Kunst des Integrierens“ anklingen hörte: das war noch gar nichts.

3 Der Druck p bis mit g^4

Die Thermodynamik des masselosen ϕ^4–Systems wurde bisher, soweit bekannt, nur in dimensionaler Regularisierung behandelt, in 1994 von Arnold und Zhai [4] bis g^4, später bis g^5 und $g^6 \ln(g)$ und schließlich neuerlich von Gynther et. al. bis g^6 in [8]. Das Resultat in [4] enthält Ableitungen der Zetafunktion sowie die Euler–Konstante. Das macht ein wenig mißtrauisch (es wird sich doch nicht etwa um Kunstprodukte der Methode handeln). Noch mehr irritiert der Umstand, daß in diesen Rechnungen die quadratisch divergente Startmasse $-\delta m^2$ gar nicht erst in Erscheinung tritt. Wer da aber noch lernt, der sucht Vertrauen und will s e h e n , wie es w i r k l i c h zugeht, wenn die Renormierungsprozedur vonstatten geht.

Eine Einführung in Feldtheorie bei Temperatur (Matsubara–Kontur) ist nicht Gegenstand dieser Notizen. Kapitel 16 in [3] kann als solche dienen. Einschlägige „Sonderblätter“ finden sich auf der *home page* www.itp.uni-hannover.de/~hschulz.

Hier bringen wir unverzüglich die bis mit g^4 relevanten Null–Beiner zu Papier und übersetzen sie mit Diagramm–Regeln in Beiträge zum Druck $p = -F/V = \ln(Z)/(\beta V)$. Aber es ist die Größe $\ln(Z) = -\beta F =: f$, zu welcher die Diagrammregeln [6] Beiträge liefern. F ist die Freie Energie und $T = 1/\beta$ die Temperatur. So wie die ϕ^4–Theorie ihre Lagrangian hat (noch bevor sie an den Ofen gehalten wird), so hat das Wärmebad seine Temperatur (noch bevor es mit irgendeinem bekannten Spektrum Entartungsgrade austauscht). Temperatur ist der mikrokanonisch per $1/\partial_E S(E,V,N)$ berechenbare Parameter des (eines) ∞ großen Reservoir–Systems (aber „Ofen“ war auch nicht übel. Bald kommt der Winter, 22. 9. 97).

Um IR–Singularitäten zu kontrollieren, braucht die Lagrangian (2.10) der masselosen ϕ^4 einen Regulator, welcher zu $\mathcal{L}_0$ addiert und von $\mathcal{L}_{\rm int}$ wieder subtrahiert wird: Resummation der Störungsreihe. Der Regulator ist ein Massenterm. Bis mit g^4 wird sich eine konstante „thermische Masse“ m^2 als ausreichend erweisen (zum allgemeinen Fall eines Impuls–abhängigen Regulators siehe [6]). m^2 wird in (3.7) festgelegt werden. Die regulierte Lagrange–Dichte ist

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\rm int} \quad , \quad \mathcal{L}_0 \;=\; -\frac{1}{2}\,\phi\,\partial^2 \left(1+\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{\partial^2}{\Gamma^2}\right)\phi \;-\; \frac{1}{2}\,m^2\,\phi^2 \quad , \tag{3.1}$$

$$\mathcal{L}_{\rm int} \;=\; \frac{1}{2}\,\phi\,\left[\,\delta m^2 Z_\phi - (Z_\phi - 1)\,\partial^2\,(1+\tfrac{\partial^2}{\Lambda^2})\,(1+\tfrac{\partial^2}{\Gamma^2}) \;+\; m^2\,\right]\phi \;-\; \frac{g^2}{24} Z_g \phi^4 \quad . \tag{3.2}$$

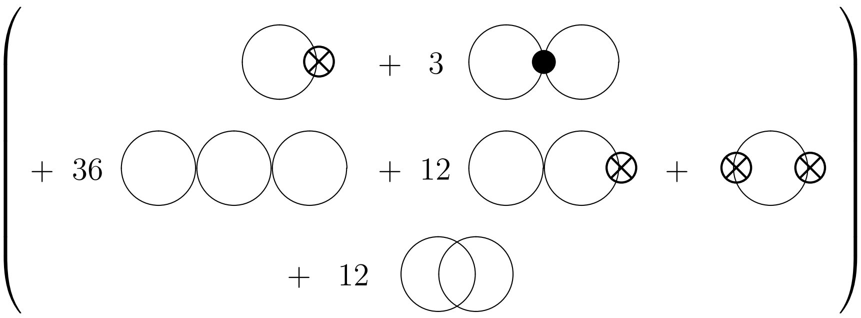
Vergleich von (3.1) mit (1.6), (1.7) zeigt, wie die nackte Greensfunktion aussieht, d.h. jene zu $\mathcal{L}_0$. In (1.7) ist lediglich der Index „ur“ zu streichen:

$$G_{\rm m}(P) \;=\; \frac{1}{m^2 \;+\; P^2\,\left(1+\frac{P^2}{\Lambda^2}\right)\,\left(1+\frac{P^2}{\Gamma^2}\right)} \quad . \tag{3.3}$$

3.1 Diagramme der Thermodynamik

Diagramme bestehen aus Linien und Vertizes. Natürlich stehen Linien im folgenden für den massiven Propagator (3.3). Wir bleiben auch bei einem Kreuzchen $-\!\otimes\!-$ für die nun um $+\,m^2$ erweiterte eckige Klammer in $\mathcal{L}_{\rm int}$, (3.2) (siehe auch (2.14) und Text unter (2.10)). In dieser Notation und mit der Konsistenz–Annahme $m^2 \sim g^2$ (sowie $Z_g - 1 \sim g^2$, $Z_\phi - 1 \sim g^4$ im Hinterkopf) wird klar, daß bis mit g^4 die folgenden Diagramme zum Druck beitragen:

$$p \;=\; p_0 + \frac{1}{\beta V}$$



(3.4)

Verdient das Basketballdiagramm eine Zeile für sich? Nein, aber es wird ohnehin noch Seiten einnehmen (und es hat auf der Zeitachse schon Wochen verschlungen).

Die drei Diagramme der mittleren Zeile sind besonders angenehm. Weil jeweils auch ein anderer g^2–Vertex vorhanden ist, dürfen ihre Kreuzchen auf ihren g^2–Anteil reduziert werden, d.h. auf $\delta_2 + m^2 = g^2 b_0/2 + m^2$, siehe (2.18). Die Regeln verlangen einen Faktor $1/2$ pro Kreuzchen, einen *overall factor* βV und thermische „Summation“ über innere

Impulse. Der am gleichen Vertex endende *loop* (der „einfache Loop") ist also

$$b := \sum_P G_m(P) \qquad \text{mit} \qquad \sum_P := T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \;\rightleftharpoons\; \frac{1}{\beta V} \sum_n \sum_{\vec{p}} \quad , \tag{3.5}$$

und die Diagramme (3.4) der mittleren Zeile geben

$$\begin{aligned} p_{\,\text{mittlere Zeile}} \;&=\; 36 \left(-\frac{g^2}{24}\right)^2 b^2 \sum G_m^2 + 12 \left(-\frac{g^2}{24}\right) b \, \frac{1}{2} \left[\, \delta_2 + m^2 \,\right] \sum G_m^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\, \delta_2 + m^2 \,\right]^2 \sum G_m^2 \\ &=\; \frac{1}{4} \left(m^2 - \frac{1}{2} g^2 \left[\, b - b_0 \,\right] \right)^2 \sum_P G_m^2(P) \quad . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die Bildung $\sum G_m^2$ würde nach Auswertung die störungstheoretische Ordnung (g^4 in (3.6)) erniedrigen (und g^3 geben). Genau dies ist aber verboten, sofern die Störungsreihe unter Auswertung direkt in die klein–g asymptotische Entwicklung von p übergehen soll (mehr hierzu in [6]). Also treffen wir nun d i e gescheite Wahl für den bislang nicht festgelegten Spielzeugparameter m :

$$m^2 \;=\; \frac{1}{2}\, g^2 \;\left[\; b \;-\; b_0 \;\right] \;=:\; \frac{1}{2}\, g^2 \, b_T \quad . \tag{3.7}$$

b_0 ist der $T \to 0$–Limes von b. Also ist m^2 in der Tat eine rein thermische Masse. Daß sich in der eckigen Klammer auch gleich noch quadratische Riesigkeiten (von denen in Dim.Reg. nichts zu sehen ist) wegheben, das gefällt. Mit der Wahl (3.7) entschwindet die mittlere Zeile aus (3.4). Und das gefällt ebenfalls.

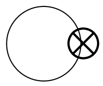
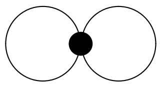
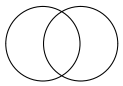
Der erste Term in (3.4) ist der Druck p_0 des $\mathcal{L}_0$–Systems, also der Druck von freien Skalaren mit Masse m. Man erhält ihn durch Ausintegration des Funktionalintegrals für die Zustandssumme (s. Anhang A von [9]) als $p_0 = \frac{1}{2} \sum \ln(G_m) + \text{const}$. Dies genügt bereits, um $\partial_m p_0 = -m\, b$ einzusehen. Andererseits muß p_0 bei $m \to 0$ in den Druck einer halben Hohlraumstrahlung $p_{\,\text{hohl}} = \pi^2 T^4/90$ übergehen. Sofern wir also b als Funkton von m in den Griff bekommen, ist nur noch Aufleiten angezeigt :

$$p_0 = \frac{\pi^2 T^4}{90} + (\,-\,m\, b)^{\text{auf}} \quad , \tag{3.8}$$

wobei mit $(-mb)^{\text{auf}}$ die Stammfunktion von $-mb$ gemeint ist, welche mit $m \to 0$ verschwindet.

Wie jetzt die verbliebenen Druck–Beiträge zu Papier kommen, kann als „gebremstes Verfahren" bezeichnet werden : langsam und schrittweise. Wie sich nämlich die counterterm–Riesigkeiten mopsig machen und Term für Term die per Diagramm–Auswertung entstehenden „Divergenzen" vertilgen — nun, das gilt es zu genießen. Die folgenden Formelzeilen mögen ohne Worte verständlich sein, ausgenommen der Schritt vom zweiten zum dritten Gleichheitszeichen in (3.9). Dort wird erstens $\delta m^2 Z_\phi$ auf δm^2 reduziert (weil Unterschied$\sim$ g^6) und zweitens der Term $-\frac{1}{2}(Z_\phi - 1) \sum G_m \left[\, P^2(\;\;)(\;\;)\,\right] =$

$-\frac{1}{2}(Z_\phi - 1)\,(-m^2 b + \sum_P 1)$ einfach weggelassen. Oh. $m^2(Z_\phi - 1)$ ist $\sim g^6$, und der andere Anteil enthält keine Temperatur. Tatsächlich war unsere PV–Regularisierung (1.1) unzureichend. Weitere „Geist"–Propagatoren waren erforderlich, um auch $\sum 1$ einzubetten. Hier sei jedoch darauf verzichtet, reine $T=0$–Anteile in der Freien Energie zu studieren (Energieskala–Verschiebungen, Renormierung der kosmologischen Konstanten). Wir lassen sie einfach weg. Auf diese unhöfliche Weise hat sich nun Z_ϕ aus unseren Betrachtungen verabschiedet :

$$p = p_0 + \frac{1}{\beta V}\Big($$

$$+ \; 3$$

$$+ \; 12$$

$$\Big)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2 T^4}{90} + (-mb)^{\text{auf}} + \frac{1}{2}\sum_P G_m(P)\,\Big[\delta m^2 Z_\phi + m^2 - (Z_\phi - 1)P^2(1+\tfrac{P^2}{\Lambda^2})\,(1+\tfrac{P^2}{\Gamma^2})\,\Big] \\
&\quad + 3\left(-\frac{g^2}{24}\right) Z_g\, b^2 + \frac{12}{\beta V}\,\bigcirc\!\!\!\bigcirc \\
&= \frac{\pi^2 T^4}{90} \;-\; (mb)^{\text{auf}} \;+\; \frac{1}{2}m^2 b \;+\; \frac{1}{2}\delta m^2 b \;-\; \frac{1}{8}g^2 Z_g b^2 \;+\; 12\frac{1}{\beta V}\,\bigcirc\!\!\!\bigcirc \\
&= \frac{\pi^2 T^4}{90} \;-\; \frac{1}{2}m^2 b_0 \;-\; (m b_T)^{\text{auf}} \;+\; \frac{1}{2}m^2 b_0 \;+\; \frac{1}{2}m^2 b_T \;+\; \frac{1}{2}\delta m^2 b_0 \\
&\quad + \; \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}g^2 Z_g b_0 - \frac{1}{6}g^4\chi(0)\right] b_T \;-\; \frac{1}{8}g^2 Z_g\left(b_0^2 + 2b_0 b_T + b_T^2\right) \;+\; 12\frac{1}{\beta V}\,\bigcirc\!\!\!\bigcirc
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Ersichtlich wurde die erste Zeile von (2.33) benutzt. Im nächsten Schritt werden nun alle restlichen $T=0$–Terme weggelassen. Die zwei Terme $\sim Z_g b_0 b_T$ in (3.9) kompensieren sich, und zwar samt der in ihnen enthaltenen $\Lambda^2\,(1+\mathcal{O}(\Lambda^{-2}))$–Gefahr !

$$\boxed{p = \frac{\pi^2 T^4}{90} \;-\; (m b_T)^{\text{auf}} \;+\; \frac{1}{2}m^2 b_T \;-\; \frac{1}{12}g^4\chi(0)\,b_T - \frac{1}{8}g^2 Z_g\, b_T^2 \;+\; 12\frac{1}{\beta V}\,\bigcirc\!\!\!\bigcirc} \tag{3.10}$$

Die thermische Größe b_T, auf welche nun alles wartet, wird einen g^0–Beitrag haben. Quadratische Riesigkeiten verbergen sich in $\chi(0)$ und im Basketball, logarithmische in allen Termen (außer natürlich dem ersten).

3.2 Der einfache Loop : $b_T \;=\; b - b_0$

Der folgende Unterabschnitt handelt von Frequenzsummen, asymptotischer Entwicklung und Integrierkunst. Die Spezialitäten, welche der PV–Regularisierung eigen sind, halten wir für wichtig. Sie sind möglicherweise neu und gehören somit (*mainly*) in den *main text*. Der letzte Integral–Klumpen (er heißt c_T) wird aber regularisierungs–unabhängig sein und in den Anhang B verfrachtet werden. Das Resultat dieses Unterabschnitts findet sich eingerahmt an dessen Ende.

Ein paar Terme der asymptotischen Entwicklung zu produzieren, eines gegebenen Ausdrucks und hinsichtlich eines kleinen Parameters, das ist das, was die Leute immer nicht können. Der interessierende Ausdruck ist b_T. Der kleine Parameter ist m^2. b_0 stand in (2.22).

$$\begin{aligned} b_T &= \sum_P G_m - \int_P G_0 = \sum_P G_0 - \int_P G_0 + \sum_P [\, G_m - G_0 \,] \\ &= \sum_P^{\text{ohne}} G_0 + \sum_P [\, G_m - G_0 \,] \quad , \quad \sum_P^{\text{ohne}} := \sum_P - \int_P \quad . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Mit $m \to 0$ verschwindet der zweite Term. Falls es einen m^0–Term gibt, ist es also der erste. Generell sei eine Summe mit Index „ohne“ als die Differenz rechts in (3.11) definiert. Enthält aber der Summand (hier G_0) neben $\omega_n = 2\pi nT$ keine weitere Temperatur T, so darf der Index auch als „ohne $T = 0$–Term“ gelesen werden.

Zu Frequenzsummen gibt es ein „Sonderblatt“ (ungekürzt im Anhang G wiedergegeben), aus welchem wir

$$T \sum_n \frac{1}{x^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \, \frac{n(z)_{\text{ignore poles}}}{z^2 - x^2} = \frac{1}{2x} + \frac{n(x)}{x} \quad . \tag{3.12}$$

übernehmen. $n(x) = 1/(e^{\beta x} - 1)$ ist die Bose–Funktion. Der wegzulassende $T = 0$–Term ist $1/(2x)$ im dritten Ausdruck. Jenes Euklidische P^2 in G_0 ist per $P^2 = \vec{p}^{\,2} + \omega_n^2$ mit Matsubara–Frequenzen $\omega_n = 2\pi nT$ zu bestücken. Also nimmt x der Reihe nach die Werte $p = |\vec{p}|$, $\sqrt{p^2 + \Lambda^2}$ und $\sqrt{p^2 + \Gamma^2}$ an:

$$\begin{aligned} \sum_P^{\text{ohne}} G_0 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{n(p)}{p} - A \, \frac{n\left(\sqrt{p^2 + \Lambda^2}\right)}{\sqrt{p^2 + \Lambda^2}} + B \, \frac{n\left(\sqrt{p^2 + \Gamma^2}\right)}{\sqrt{p^2 + \Gamma^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \, p \, n(p) + \mathcal{O}\left(e^{-\beta\Lambda}\right) = \frac{T^2}{12} + \mathcal{O}\left(e^{-\beta\Lambda}\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Da ist er, der vorhergeahnte m^0–Term. Bose–Funktionen von Riesenargument können natürlich im Vorwegausführungs–Sinne wegfallen. Dies ist (wie schon irgendwo in der Einleitung bemerkt) eine sehr gesunde Eigenschaft der PV–Einbettung. Uninteressante Vorfaktoren wie $\sim \sqrt{\Lambda}$ etc. sind übrigens im Argument der obigen zwei $\mathcal{O}(\;)$ unterschlagen.

Nach dem asymptotisch führenden Term kommt ein nächster. Ihn präparieren zu wollen, heißt einfach, nach der Asymptotik der Differenz $b_T - T^2/12$ zu fragen:

$$b_T - \frac{T^2}{12} = \sum_P \left[\frac{1}{m^2 + P^2 (1 + \frac{P^2}{\Lambda^2})\,(1 + \frac{P^2}{\Gamma^2})} - \frac{1}{P^2 (1 + \frac{P^2}{\Lambda^2})\,(1 + \frac{P^2}{\Gamma^2})} \right] \quad . \tag{3.14}$$

Für die thermische Summe würden wir gern erneut (3.12) benutzen und sind darum an Partialbruchzerlegung interessiert. Jene für den rechten Bruch ist (1.1). Auch für den linken Bruch gibt es eine,

$$\frac{\Gamma^2 \Lambda^2}{m^2 \Lambda^2 \Gamma^2 + P^2 \left(\Lambda^2 + P^2\right) \left(\Gamma^2 + P^2\right)} = \frac{1'}{m'^2 + P^2} - \frac{A'}{\Lambda'^2 + P^2} + \frac{B'}{\Gamma'^2 + P^2} \quad , \tag{3.15}$$

wobei die gestrichenen Massenquadrate im Nenner die Lösungen der kubischen Gleichung $m^2\Lambda^2\Gamma^2 - x(\Lambda^2 - x)(\Gamma^2 - x) = 0$ sind. Daß es drei reelle solche Lösungen gibt, wird anhand einer Verlaufsskizze klar. Bringt man die rechte Seite von (3.15) auf Hauptnenner, so muß der Zähler dem der linken Seite identisch gleich sein, $= \Gamma^2\Lambda^2$ also. Hieraus erhält man die Koeffizienten

$$\begin{aligned} 1' &= \frac{\Gamma^2\Lambda^2}{(\Lambda'^2 - m'^2)\,(\Gamma'^2 - m'^2)} \ , \quad A' = \frac{\Gamma^2\Lambda^2}{(\Lambda'^2 - m'^2)\,(\Gamma'^2 - \Lambda'^2)} \ , \\ B' &= \frac{\Gamma^2\Lambda^2}{(\Gamma'^2 - \Lambda'^2)\,(\Gamma'^2 - m'^2)} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} A' - B' = 1' \quad \text{und} \\ \Lambda'^2 A' - \Gamma'^2 B' = m'^2 1' \end{array} \quad . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Man mache sich irgendwie klar, daß die gestrichenen Massen größenordungsmäßig in der Nähe der ungestrichenen liegen. Ehe wer 12 Stunden am Lösen einer kubischen Gleichung absitzt, rechne er besser erst einmal weiter. Vielleicht (Prinzip Hoffnung) werden die Details gar nicht benötigt.

Die thermische Summation $\sum_P$ in (3.14) zerfällt wieder in ihren $T = 0$–Teil $\int_P$ und den Rest:

$$b_T - \frac{T^2}{12} \;=\; c_0 + c_T \qquad \text{mit} \quad c_T = \sum_P^{\text{ohne}} \Big[\text{ Klammer wie in (3.18) } \Big] \quad \text{und} \tag{3.17}$$

$$c_0 = \int_P \left[\frac{1'}{m'^2 + P^2} - \frac{A'}{\Lambda'^2 + P^2} + \frac{B'}{\Gamma'^2 + P^2} - \frac{1}{P^2} + \frac{A}{\Lambda^2 + P^2} - \frac{B}{\Gamma^2 + P^2} \right] \ . \tag{3.18}$$

Der Blick auf diese Partialbuch–Version macht nun klar, daß der thermische Teil c_T keine Regulatorterme braucht. Er würde sie nur ins $e^{-\beta\Lambda}$–Jenseits verbannen. Kurz, der Summand von c_T ist jener von (3.14) zu $\Gamma, \Lambda \to \infty$. Kubischer Beigeschmack bleibt also nur an (3.18) hängen. Und dies integrieren wir erst einmal aus, nämlich mittels:

$$\int_P \frac{1}{a^2 + P^2} \;=\; \frac{1}{16\pi^2} \int_0^N dr\, \frac{r}{a^2 + r} \;=\; \frac{1}{16\pi^2} \left[N - a^2 \ln\left(\frac{N}{a^2}\right) \right] \quad . \tag{3.19}$$

Dank der Relationen (3.16) entfallen in (3.18) sowohl die N– als auch die $a^2\ln(N)$–Terme, und wir kommen an bei

$$\begin{aligned} c_0 \;=\; \frac{1}{16\pi^2} \Big[\; & 1'\, m'^2 \ln\left(m'^2\right) \;-\; A'\, \Lambda'^2 \ln\left(\Lambda'^2\right) \;+\; B'\, \Gamma'^2 \ln\left(\Gamma'^2\right) \\ & + \; A\ \Lambda^2\ \ln\left(\Lambda^2\right) \;-\; B\ \Gamma^2\ \ln\left(\Gamma^2\right) \;\Big] \quad . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Falls nun (gleich zeigt es sich) der relative Unterschied zwischen gestrichenen und ungestrichenen Massen nur $\sim \mathcal{O}(m^2/\Lambda^2)$ ist, dann können im ersten Term von (3.20) die Striche entfallen. Und im zweiten sowie dritten Term braucht jedes Strichmännchen nur seine erste Korrektur.

An der kubischen Gleichung $m^2\Lambda^2\Gamma^2 - x(\Lambda^2 - x)(\Gamma^2 - x) = 0$ Störungsrechnung erster Ordnung zu treiben (statt sie zu lösen), ist ein billiges Unterfangen. Wir bedienen sie mit den Ansätzen $x = m^2 + \eta$, $x = \Lambda^2 + \eta$, $x = \Gamma^2 + \eta$, unterstellen je (Konsistenzannahme), daß η eine Ordnung kleiner als der führende Term ist, und erhalten

$$m'^2 = m^2 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \right] \quad , \quad \Lambda'^2 = \Lambda^2 \; - \; m^2 A \quad , \quad \Gamma'^2 = \Gamma^2 \; + \; m^2 B \quad . \qquad (3.21)$$

Die Koeffizienten (3.16) lassen sich nun zu

$$1' = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \quad , \quad A' = A + m^2 \frac{2A}{\Lambda^2} (1 - B^2) \quad , \quad B' = B + m^2 \frac{2B}{\Gamma^2} (1 - A^2) \qquad (3.22)$$

vereinfachen. Mit diesen Ausdrücken in (3.20) zu gehen (also dort alles wegzulassen, was $\sim 1/\Lambda^2$ abfällt), erscheint gefährlich, weil ja c_0 nicht Resultat ist sondern nur Bestandteil des Faktors b_T. Die Frage, ob im Druck (3.10) endliche Reste aus $\Lambda^2 \cdot \mathcal{O}(1/\Lambda^2)$ entstehen können, bekommt jedoch eine klar abschlägige Antwort. Entweder hat dort b_T keinen Λ^2–Vorfaktor oder es reduziert sich wegen voranstehendem g^4 auf $T^2/12$. Gefahr hinwegdiskutiert. Resultat:

$$c_0 \;=\; \frac{m^2}{16\pi^2} \left(\; 2 \ln(m) \; + \; 1 \; - \; \mathrm{LN} \; \right) \quad . \qquad (3.23)$$

Jaja, nach allerlei Kleinarbeit an (3.20) mittels (3.21), (3.22) kommt tatsächlich das bereits bekannte LN–Gespenst erneut zum Vorschein (aber wir können doch hier nicht aus jedem traumatischen Erlebnis eine bunte Illustrierte machen).

Noch ist der Loop b_T nicht komplett, denn es fehlt der Beitrag c_T, siehe (3.17) und Text unter (3.18). Mittels (3.12) ist die Frequenzsumme kein Problem:

$$c_T = \sum_P^{\text{ohne}} \left[\frac{1}{m^2 + P^2} - \frac{1}{P^2} \right] = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \, p^2 \left(\frac{n\left(\sqrt{m^2 + p^2}\right)}{\sqrt{m^2 + p^2}} - \frac{n(p)}{p} \right) \quad . \qquad (3.24)$$

An genau dieser Stelle zweigen wir ab in den Anhang C (und wiederholen (3.24) dort). c_T enthält keine UV–cutoff's mehr. Aber einfach gestaltet sich die Auswertung keineswegs. Sie liefert c_T bis mit g^2. Das Resultat ist (C . 17), nämlich

$$c_T \;=\; -\frac{m\,T}{4\,\pi} + \frac{m^2}{16\,\pi^2} \left[1 - 2\,\gamma + 2 \ln\left(\frac{4\,\pi\,T}{m}\right) \right] \quad . \qquad (3.25)$$

Nun sind nur noch c_0 und c_T in (3.17) einzusetzen:

$$\boxed{b_T \;=\; \frac{T^2}{12} \;-\; \frac{m\,T}{4\,\pi} \;+\; \frac{m^2}{16\pi^2} \left(2 \ln\!\left(4\,\pi\,T\right) \;-\; \mathrm{LN} \;+\; 2 \;-\; 2\,\gamma \right)} \qquad (3.26)$$

Zwischen c_0 und c_T hatten sich zuletzt zwei $\ln(m)$–Terme kompensiert. Die klein–m Asymptotik von b_T besteht also nur aus Potenzen (es mußte keineswegs so ausgehen). Obiger $\ln(T)$ sucht nach einer Dimensionskorrektur und findet sie in LN.

Irgendwie ist es amüsant, nun einmal nachzusehen, wie wohl der thermische Loop bei den Dim.Reg.–Leuten zu Papier kommt. Gleichung (2.12) bei [4] (Terme zu Vergleichszwecken leicht umgestellt) sieht so aus:

$$\sum_P^{\varepsilon} \frac{1}{m^2+P^2} \;=\; \frac{T^2}{12}\left(1+\varepsilon\iota_\varepsilon\right) - \frac{mT}{4\pi} + \frac{m^2}{16\pi^2}\left[2\ln\left(4\pi T\right) - \frac{1}{\varepsilon} - 2\ln\left(\overline{\mu}\right) - 2\gamma\right] \tag{3.27}$$

$\sum_P^{\varepsilon}$ steht hier für die thermische Summe in $1+(3-2\varepsilon)$ Dimensionen. Die linke Seite ist b (nicht b_T). Also f e h l t rechts der quadratische Riese b_0 . ι_ε ist ein bekannter endlicher Zusatz, welcher wegen späterem $\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon\iota_\varepsilon)$ nicht vergessen werden darf ([4] betonen das, danke). Arnold und Zhai's $\mathcal{O}$–Angabe braucht Vieles: $\mathcal{O}\left(m^4/T^2\,,\,\varepsilon mT\,,\varepsilon^2T^2\right)$. Statt des LN in (3.26) steht $\frac{1}{\varepsilon}$+Endliches in (3.27). Naja, wenigstens sind logarithmische Riesen keine Nullen.

Mit (3.26) ist auch die thermische Masse m spezifiziert. Vorsicht! b_T ist Funktion von m^2, und somit ist $m^2 = g^2 b_T/2$ eine für m zu lösende Gleichung. Allerdings zeigt sich alsbald im nächsten Unterabschnitt, daß bereits der erste Term in

$$m^2 \;=\; \frac{g^2\,T^2}{24} \;+\; \mathcal{O}(g^3) \tag{3.28}$$

völlig ausreicht.

3.3 Zwischenbilanz

Der vorige Unterabschnitt hat uns mit b_T die eine von zwei Größen beschert, welche im vorläufigen Resultat (3.10) für den Druck benötigt werden. Auch ohne die zweite Größe, den Basketball ($\sim g^4$), kommen wir mit b_T–Kenntnis ein gutes Stück weiter, nämlich bis g^3. In Ordung g^4 bekommen wir eine Vorstellung davon, was der Basketball „zu leisten haben wird“, ein Wahrnehmungsraster sozusagen.

Erst einmal schreiben wir uns (3.10) erneut auf:

$$p = \frac{\pi^2T^4}{90} - \left(mb_T\right)^{\text{auf}} + \frac{m^2}{2}b_T - \frac{g^2}{8}b_T^2 - \frac{g^4}{12}\chi(0)\,b_T - \frac{g^2}{8}(Z_g-1)\,b_T^2 + \frac{g^4}{48}I_{\text{ball}} \quad . \tag{3.29}$$

Lediglich wurde Z_g in $1+(Z_g-1)$ aufgespalten und für den Basketball die Notation

$$12\,\frac{1}{\beta V}\,\textcircled{\scriptsize O} \quad =: \quad 12\,\left(-\frac{g^2}{24}\right)^2\; I_{\text{ball}} \;=\; \frac{g^4}{48}\,I_{\text{ball}} \tag{3.30}$$

aus [4] übernommen. Die letzten drei Druck–Terme haben g^4–Faktoren, so daß dort nur $b_T = T^2/12$ eingeht. Variiert man m, so spüren das nur drei Terme:

$$\begin{aligned} p(m^2) \;&=\; -\left(mb_T\right)^{\text{auf}} + \frac{1}{2}m^2 b_T - \frac{1}{8}g^2\,b_T^2 \;+\; \text{const}_m \\ \Rightarrow \qquad p'(m^2) \;&=\; \frac{1}{2m}\left(m^2 - \frac{g^2}{2}b_T\right)\frac{1}{2}\partial_m b_T \quad . \end{aligned} \tag{3.31}$$

Diese Variation ist künstlich, denn nach dem bisherigen Gang der Dinge ist p nur dann der (richtige) Druck, wenn in (3.29) die Lösung von $m^2 = g^2 b_T/2$ eingesetzt wird. (3.31) hilft aber bei der Frage, ob die Näherung $m^2 \approx m_0^2 := g^2T^2/24$ ausreicht. Die Funktion $p(m^2)$ hat laut (3.31) an der „wahren“ Stelle $m^2 = g^2 b_T/2$ ein Extremum. Folglich gibt es in der Entwicklung

$$p(m_0^2) \;=\; p(m^2) + (m_0^2 - m^2)\, p'(m^2) + \mathcal{O}(g^6) \;=\; p(m^2) \;+\; \mathcal{O}(g^6) \tag{3.32}$$

keinen linearen Term. Man sieht es nun : im Druck bis mit g^4 darf $m^2 = g^2T^2/24$ gesetzt werden.

Im nächsten Teilschritt setzen wir b_T aus (3.26) und

$$(m\, b_T)^{\rm auf} = \frac{m^2T^2}{24} - \frac{m^3T}{12\pi} + \frac{m^4}{64\pi^2}\mathcal{K} \quad , \quad \mathcal{K} :=\; 2\ln(4\pi T) - \mathrm{LN} + 2 - 2\gamma \tag{3.33}$$

in (3.29) ein und sortieren nach g–Potenzen. m^2 i s t jetzt $g^2T^2/24$, so daß sich ein m^3T–gegen einen g^2mT^3–Term kürzt, und ein $m^4\mathcal{K}$ gegen einen $g^2m^2T^2\mathcal{K}$:

$$p \;=\; \frac{\pi^2T^4}{90} - \frac{g^2}{8}\left(\frac{T^2}{12}\right)^2 + \frac{m^3T}{12\pi} \;+\; p_4 \qquad\qquad \text{mit} \tag{3.34}$$

$$p_4 \;=\; -\frac{g^2}{8}\left(\frac{mT}{4\pi}\right)^2 - \frac{m^4}{64\pi^2}\mathcal{K} - \frac{g^2}{8}(Z_g - 1)\left(\frac{T^2}{12}\right)^2 - \frac{g^4}{12}\chi(0)\frac{T^2}{12} + \frac{g^4}{48}\, I_{\rm ball} \;\;. \tag{3.35}$$

Nie weiß man, wie man es aufschreiben soll. Ohne p_4 macht jedenfalls (3.34) den Druck bis mit g^3 explizit. Darin ist der zweite Term das Resultat erster Ordnung Störungsrechnung — welche oft qualitativ recht gute Aussagen macht. Man spekuliere, daß bei einer gewissen stärkeren Kopplung das System „klumpt“. Druck $\to 0$ signalisiert einen Phasenübergang.

Der Druck hat bis mit g^3 ersichtlich keine Erinnerung mehr an Regularisierungsdetails (siehe Einleitung). (3.34) ist auch unabhängig von der Wahl des Renormierungspunktes, aber in einer arg trivialen Weise. Diese Abhängigkeit wird nämlich (wie wir noch sehen werden) im Sinne $g^2 \to g^2 + g^4 f(M^2)$ erst in Ordnung g^4 sichtbar. Kein Wunder.

In p_4 hingegen, da tummelt sich in der Tat das ganze Gelichter : LN–Gespenst, $\ln(T)$, M^2–Skala und ein ganz falscher Hund, der vorletzte Term $(\sim \Lambda^2T^2)$. Wir setzen in (3.35) zuerst $m^2 = g^2T^2/24$ ein, dann $\mathcal{K}$ und schließlich $(Z_g - 1)$ aus der zweiten Zeile von (2.33). Sodann spalten wir aus den ersten drei Termen einen gemeinsamen Faktor $\mho$ ab (er steht unten mit im eingerahmten Block (3.36)) : erster Term $= -\mho \cdot 36$, zweiter Term $= -\mho{\cdot}3\mathcal{K}$, dritter Term $= -\mho{\cdot}9\;[\,\mathrm{LN} - \ln(M^2)\,]$. Der $\chi(0)$–Term $\sim \Lambda^2$ hat Kompensation ganz besonders nötig, also schreiben wir ihn besonders nahe an $I_{\rm ball}$. Damit bekommt der g^4–Anteil des Druckes die folgende vorläufige Gestalt :

$$
\boxed{\begin{aligned}
p_4 \;&=\; \mho \Big(-6\ln(4\pi T) + 3\ln\big(M^2\big) \\
&\qquad + 6\ln\big(M^2\big) - 6\,\mathrm{LN} - 42 + 6\,\gamma \Big) \;+\; \frac{g^4}{48}\Big(I_{\mathrm{ball}} - \frac{T^2}{3}\,\chi(0) \Big) \\
\text{mit} \qquad \mho \;&:=\; \frac{g^4}{48}\left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{T^2}{12}\right)^2 \quad .
\end{aligned}}
\tag{3.36}
$$

Einen Rahmen verdient dieses Zwischenresultat wohl kaum, aber vielleicht freut es sich darüber. Die Logarithmen wurden so in Zeilen verteilt, daß die dimensionsmäßige Kompensation sichtbar wird. Die zweite Klammer mit I_{ball} muß also separat dimensionsmäßig in Ordnung sein. Sie sollte einen Faktor so absondern, daß sich auch dort ein $\mho$ bildet. Sodann muß sie $+6\,\mathrm{LN}$ liefern (auf daß sich Divergenzen wegfressen), sowie $-12\ln(4\pi T)$, damit alle bereits vorhandenen $\ln(M^2)$'s wieder ein Zuhause finden. Das war das Wahrnehmungsraster.

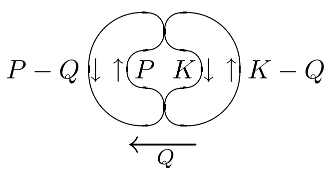
Wegen $D = 4 - E = 4$ für Null–Beiner, wird I_{ball} sogar einen Λ^4–Term enthalten, der sich aber (erwartungsgemäß) als T–unabhängig (somit weglaßbar) herausstellen wird. Irgendwann in der Anfangsphase der Bemühungen gab es einmal ein Dilemma. Die Eigenschaften des Basketballs waren aus Grobüberlegungen klar, aber kein kompensierender $g^4\Lambda^2T^2$ fand sich in den einfacheren Beiträgen. Messerscharf war dimensionsmäßig zu schließen gewesen, daß dieser in δm^2 zu stecken habe: alle δm^2–Beiträge sind $\sim \Lambda^2$, und andere counters nicht. Der Fehler: das *setting sun* Diagramm saß in der falschen $\ln(\Lambda)$–Schublade. Anfänger sind schwankende Gestalten.

„Anfänger“ oder *fishing for compliments*? In Sachen Feldtheorie bei Temperatur gibt es am Ort einen ganzen Sack Erfahrung [10]. Jedoch wurde fast ausschließlich die thermische Selbstenergie Π (Polarisationsfunktion) untersucht, eine dynamische Größe also. Über Ordnung g^3 (der asymptotischen Entwicklung von Π) sind diese Rechnungen nicht nennenswert hinausgekommen. Aber bis zu dieser Ordnung ist die Renormierungsprozedur trivial — doch Anfänger.

4 Basketball–Diagramm

Der Basketball ist eine Kette aus zwei Perlen. Der erste Schritt, der diagrammatische, ist mit Blick auf

Wie ein 4–Vektor Q
im Uhrzeigersinn
durch eine Perlenkette läuft



(4.1)

sehr einfach : über das Q–Argument zweier Funktionen $w(Q^2)$ ist thermisch zu summieren. Mit (3.30) und den Diagrammregeln entsteht direkt

$$I_{\text{ball}} \;=\; \sum_Q w(Q^2)\, w(Q^2) \quad . \tag{4.2}$$

Im Unterschied zu (2.23) befinden wir uns aber jetzt in einem wohltemperierten ϕ^4–Badewasser, und die „Perle bei $T \neq 0$“ ist

$$w(Q^2) \;=\; \sum_P G_0(P) G_0(\vec{P} - \vec{Q}) \;=\; w_0(Q^2) \;+\; w_T(Q^2) \tag{4.3}$$

$$\text{mit} \qquad w_T(Q^2) \;=\; \sum_P^{\text{ohne}} G_0(P) G_0(\vec{P} - \vec{Q}) \quad . \tag{4.4}$$

Damit zerfällt I_{ball} in drei Anteile

$$I_{\text{ball}} \;=\; I_{00} \;+\; I_{0T} \;+\; I_{TT} \quad , \tag{4.5}$$

$$I_{00} \;=\; \sum_Q w_0^2 \quad , \qquad I_{0T} \;=\; 2 \sum_Q w_0\, w_T \quad , \qquad I_{TT} \;=\; \sum_Q w_T^2 \quad . \tag{4.6}$$

Man kann jetzt sehen, was zu tun sein wird. Zuerst müssen wir die Integranden kennen. $w_0(Q^2)$ ist aus § 2.5 bekannt, aber die Funktion $w_T(Q^2)$ wird noch zu studieren sein (s. § 4.1). Jede der drei Q–Summen in (4.6) werden wir dann gemäß

$$\sum_Q \;=\; \int_Q \;+\; \sum_Q^{\text{ohne}} \qquad \text{in} \qquad I_{\dots} \;=\; I_{\dots}^{\int} \;+\; I_{\dots}^{\text{ohne}} \tag{4.7}$$

zerlegen. Man blicke voraus auf (4.18), (4.22) und (4.28). Die oberen I–Indices $\int$ und „ohne“ beziehen sich auf die abschließenden Q–Summationen in (4.6). Wegen T–Abhängigkeit der Summanden von I_{0T} und I_{TT} hat hier der I–Index $\int$ nichts mehr mit Präparieren eines $T = 0$–Anteils zu tun.

Mit der Aufspaltung (4.7) weichen wir hier bereits ein wenig von Arnold und Zhai's Vorgehen [4] ab (dort wird z.B. einmal der Term $Q_0 = 0$ aus der Frequenzsumme abgespalten, hier nicht). Nichtsdestoweniger war der Umstand außerordentlich hilfreich (z.B. bei IR–Gefahr–Erkennung), daß [4]'s Basketball–Auswertung in Dim.Reg. bereits vorlag. Auch wird neidlos anerkannt, daß das, was die Brüder da an manchen Stellen (I_{TT}) machen, verdammt gut ist.

4.1 Eine Perle in der Südsee : $w_T(Q^2)$

Die Südsee ist ein Wärmebad bei Temperatur T . Nach Blick auf (2.35) und (4.4) schreiben wir den Ausgangspunkt in der Form

$$w_T(Q^2) = \sum_P^{\text{ohne}} \mathcal{V}_t\, \mathcal{V}_\tau \, \frac{1}{t + P^2} \, \frac{1}{\tau + (\vec{P} - \vec{Q})^2} \quad . \tag{4.8}$$

auf. Die generelle „ohne“-Definition $\sum_P^{\text{ohne}} = \sum_P - \int_P$ ist nun ernst zu nehmen, denn der Summand hängt auch über $Q_0 = \omega_n^Q = 2\pi n^Q T$ von T ab. Unter $\sum_P$ ist $P_0 = \omega_n$, aber unter $\int_P$ wird P_0 zur Integrationsvariablen, die wir p_0 nennen. Das gibt

$$\begin{aligned} w_T(Q^2) \;\; &= \;\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, \mathcal{V}_t\, \mathcal{V}_\tau \left[T\sum_n \frac{1}{t-(i\omega_n)^2+\vec{p}^{\,2}}\; \frac{1}{\tau-(i\omega_n - i\omega_n^Q)^2+\kappa^2} \right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{2\pi}\int dp_0\, \frac{1}{t+p_0^2+\vec{p}^{\,2}}\; \frac{1}{\tau+(p_0-\omega_n^Q)^2+\kappa^2} \right] \quad , \quad \kappa := |\vec{p}-\vec{q}\,| \quad . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Im ersten Term der eckigen Klammer lesen wir das Produkt der beiden Brüche als $F(i\omega_n)$ und ziehen für die Summe (G . 2) mit $\eta = 1$ zu Rate:

$$\begin{aligned} \text{1. Term} \;\; &= \;\; \frac{-1}{2\pi i}\left[\oint dz\; F(z)\; n(z) \right]_{\text{ohne } n-\text{Pole}} \quad , \\ &= \;\; \frac{-1}{2\pi i}\left[\int dz\, \Big(F(z)\; n(z) - F(-z)\; n(-z) \Big) \right]_{\text{ohne } n-\text{Pole}} \\ &= \;\; \frac{-1}{2\pi i}\left[\int dz\, \Big(F(z) + F(-z) \Big)\; n(z) \right]_{\text{ohne } n-\text{Pole}} - \frac{1}{2\pi i}\int dz\; F(-z) \quad . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Der Halbkreis im letzten Integral hat Null–Beitrag. Substitution $z = -ip_0$ läßt dieses Integral zu $\frac{1}{2\pi}\int dp_0\; F(ip_0)$ werden. Und nun sieht man, daß es den zweiten Term in der eckigen Klammer von (4.9) perfekt kompensiert. Aus (4.9) wird damit

$$\begin{aligned} w_T(Q^2) \;\; &= \;\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, \mathcal{V}_t\, \mathcal{V}_\tau\, \frac{-1}{2\pi i}\int dz\; n(z)_{\text{ohne Pole}} \;\cdot \\ &\qquad \cdot \frac{1}{t+p^2-z^2}\left(\frac{1}{\tau+\kappa^2-(z-i\omega_n^Q)^2} \; + \; \text{dito}_{\omega_n^Q\to-\,\omega_n^Q} \right) \quad . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Was hier soeben in (4.10) und (4.11) passierte, hatte nur wenig mit der konkreten Funktion $F(z)$ zu tun. Die Verallgemeinerung lautet

$$\sum_P^{\text{ohne}} f(P_0,\vec{p}\,) \; = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)\left[\int dz\, \Big(F(z)+F(-z) \Big)\; n(z) \right]_{\text{ohne } n-\text{Pole}}^{F(z)\,=\,f(-iz,\,\vec{p}\,)} \quad . \tag{4.12}$$

Die z–Integration in (4.11) erledigt nun der Residuensatz. Per $\vec{p}\to\vec{q}-\vec{p}$ unter $\int d^3p$ kann in einzelnen Termen des Resultates p in κ (und zugleich κ in p) verwandelt werden. Ebenso sind t und τ austauschbar. Ferner ist $n(i\omega_n^Q + \ldots) = n(\ldots)$. Und schließlich hat man

$$\begin{aligned} w_T(Q^2) \; &= \; \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\; \mathcal{V}_t\, \mathcal{V}_\tau \left(\frac{n(\sqrt{\tau+p^2}\,)}{\sqrt{\tau+p^2}}\; \frac{1}{t+\kappa^2-(\sqrt{\tau+p^2}-i\omega_n^Q)^2} \; + \; \text{dito}_{\omega_n^Q\to-\,\omega_n^Q} \right) \\ &= \; \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\; \frac{n(p)}{p}\; \mathcal{V}_t \left(\frac{1}{t+q^2-2\vec{p}\,\vec{q}-(i\omega_n^Q)^2+2p\, i\omega_n^Q} \; + \; \text{dito}_{\ldots} \right) \quad . \end{aligned} \tag{4.13}$$

auf dem Papier. Die zweite Zeile entsteht, weil bei Anwenden von $\mathcal{V}_\tau$ über zweiten und dritten Term von (2.34) Regulatoren in das Argument der Bose–Funktion gelangen und dadurch vernachlässigbar nur $\mathcal{O}(e^{-\beta\Lambda})$ beitragen: $\mathcal{V}_\tau$ anzuwenden heißt hier also $\tau = 0$ zu setzen.

Die in $\int d^3p$ enthaltene Winkelintegration wird Logarithmen geben. Aber eine gescheite Integraldarstellung wäre uns lieber. Wir substituieren $-2\vec{p}\,\vec{q} = 2pqu$, kürzen den Rest im obigen Nenner mit x ab und nutzen

$$\begin{aligned} 2pq \int_{-1}^{1} du\; f(2pqu + x) &= \int_{-2pq}^{2pq} du\; f(u+x) \;=\; \left(\int_{-2pq}^{\infty} - \int_{2pq}^{\infty} \right) du\, f(x+u) \\ = \int_0^\infty du\, [f(u+x-2pq) - f(u+x+2pq)] &= \mathcal{A}_q \int_0^\infty du\; f(u+x-2pq) \quad , \end{aligned} \tag{4.14}$$

aus, wobei der Operator $\mathcal{A}_q$ bezüglich q antisymmetrisiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_q\, f(q) &:= f(q) - f(-q) \quad , \\ \mathcal{A}_q\, \mathcal{A}_p\, f(q,p) &= f(q,p) - f(-q,p) - f(q,-p) + f(-q,-p) \quad . \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die beiden Integrale bis ∞ in der ersten Zeile von (4.14) müssen separat existieren (sonst wäre der Schritt zur dritten verboten). Im vorliegenden Falle sichert dies der Villars–Operator $\mathcal{V}_t$ ab. Mit (4.14), (4.15) nimmt w_T die Form

$$w_T(Q^2) = \frac{1}{8\pi^2\, q} \int_0^\infty dp\; n(p)\;\; \mathcal{A}_q\, \mathcal{A}_p \int_0^\infty du\;\, \mathcal{V}_t\; \frac{1}{u + t - (i\omega_n^Q - p)^2 + (p-q)^2} \tag{4.16}$$

an. Nicht klagen bitte: das ist einfach. Man ahnt nun recht gut, wie w_T bei großem Argument Q^2 faktorisieren wird. Dann möchten nämlich die „festgehaltenen" p's im Nenner entfallen. Aber Vorsicht, es ist $\mathcal{A}_p\, 1 = 0$, so daß zuvor $\mathcal{A}_p$ anzuwenden und auf Hauptnenner zu bringen ist. Letzterer erlaubt $p \to 0$, aber der Zähler ist $\sim p$. Wird auch noch $\mathcal{A}_q$ angewendet und das u–Integral ausgeführt, so entsteht schließlich

$$w_T(Q^2) \;\to\; w_T^{\rm as}(Q^2) \qquad \text{mit} \qquad w_T^{\rm as}(Q^2) \;=\; \frac{T^2}{6}\; G_0(Q^2) \quad . \tag{4.17}$$

4.2 $\quad I_{TT} = \sum_Q w_T\, w_T$

Der Übersicht halber und, um rasch zum Ball–Resultat zu gelangen, bleiben die folgenden drei Abschnitte von Detailrechnungen verschont. Die teils anstrengende Integrierarbeit ist in den Anhängen D, E und F expliziert. Hier findet sich, was die Überschriften versprechen, jeweils alsbald weiter unten eingerahmt.

$$I_{TT} = I_{TT}^{\int} + I_{TT}^{\rm ohne} \quad , \quad I_{TT}^{\int} = \int_Q w_T w_T \quad , \quad I_{TT}^{\rm ohne} = \sum_Q^{\rm ohne} w_T w_T \quad . \tag{4.18}$$

Der erste Anteil enthält die Pauli–Villars–Regulatoren und divergiert mit diesen logarithmisch. (D . 23) :

$$I_{TT}^{\int} = \left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{T^2}{12}\right)^2 \;\left[\; 4\,\mathrm{LN} - 8\,\ln(4\pi T)\; + 8\,z_3 + \frac{76}{15}\right] \quad \text{mit} \quad z_3 \;:=\; \frac{\zeta'(-3)}{\zeta(-3)} \;\;, \tag{4.19}$$

Bezüglich „LN“ sei an (2.45) und (2.46) erinnert.

Wie bei Arnold-Zhai [4] braucht der Anteil I_{TT}^{ohne} keine Regulatorterme. Bei seiner Auswertung gehen wir im Anhang D eigene Wege (u.a. ohne den $Q_0 = 0$–Terms aus Frequenzsumme abzuspalten). Das Resultat ist natürlich mit jenem in [4] identisch. (D . 56) :

$$I_{TT}^{\text{ohne}} = \left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{T^2}{12}\right)^2 \;\left[\; 24\,z_1 - 24\,z_3 - \frac{168}{15}\;\right] \qquad \text{mit} \qquad z_1 \;:=\; \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} \;\;. \tag{4.20}$$

Resultat :

$$\boxed{\; I_{TT} = \left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{T^2}{12}\right)^2 \;\left[4\,\mathrm{LN} - 8\,\ln(4\pi T)\; + 24\,z_1 - 16\,z_3 - \frac{92}{15}\;\right] \;} \tag{4.21}$$

.

4.3 $\boldsymbol{I_{0T} = 2 \sum_Q w_0\, w_T}$

$$I_{0T} = I_{0T}^{\int} + I_{0T}^{\text{ohne}} \quad , \quad I_{0T}^{\int} = 2\int_Q w_0 w_T \quad , \quad I_{0T}^{\text{ohne}} = 2\sum_Q^{\text{ohne}} w_0 w_T \quad . \tag{4.22}$$

Während sich hierin I_{0T}^{ohne} durchaus anständig verhält, siehe (4.26), spaltet $I_{0T}^{\int}$ auf in einen T^4–Term (anständig) und einen $\Lambda^2 T^2$–Term, und dieser ist genau so unanständig wie der in (3.36) subtrahierte $\frac{T^2}{3}\chi(0)$–Term. Was treiben die beiden miteinander ? *cancellation* ! Dieses Detail ist erstaunlich einfach einzusehen, nämlich indem man bezüglich $\Lambda \to \infty$ den asymptotisch führenden Anteil von $I_{0T}^{\int}$ präpariert. Dazu skalieren wir per $Q \to \Lambda Q$ und blicken auf $I_{0T}^{\int} = 2\,\Lambda^4 \int_Q w_0(\Lambda^2 Q^2)\, w_T(\Lambda^2 Q^2)$. Im relevanten Q^2–Bereich ist hierin nach (2.50) $w_0(\Lambda^2 Q^2) = \mathcal{O}(1)$, während gemäß (4.17) $w_T(\Lambda^2 Q^2)$ asymptotisch das gewünschte $1/\Lambda^2$ vorzeigt. Es ist also

$$I_{0T}^{\int\,,\,\Lambda^2\text{Term}} = 2\int_Q w_0(Q^2)\, w_T^{\text{as}}(Q^2) = 2\int_Q w_0(Q^2)\,\frac{T^2}{6} G_0(Q^2) \;=\; \frac{T^2}{3}\,\chi(0) \;\;, \tag{4.23}$$

wobei wir zur Identifizierung ganz rechts lediglich (2.26) bei $\vec{Q} = 0$ angesehen haben.

Es zeigt sich, daß keiner der anderen I–Anteile einen Λ^2–Term hat. In (3.36) gehören also die folgenden beiden zusammen :

$$I_{0T}^{\int} - \frac{T^2}{3}\chi(0) \;=\; 2\int_Q w_0(Q^2)\;\left[\, w_T(Q^2) - w_T^{\text{as}}(Q^2)\,\right] \;=:\; \Delta^{\int} \quad . \tag{4.24}$$

Die Auswertung von $\Delta^{\int}$ führt im Anhang E auf

$$I^{\int}_{0T} - \frac{T^2}{3}\chi(0) = \left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{T^2}{12}\right)^2 \; \left[\; -\frac{12}{5}\,\mathrm{LN} + \frac{24}{5}\,\ln(4\pi T)\; - \frac{24}{5}\,z_3 - \frac{18}{5}\;\right] \quad . \tag{4.25}$$

Für den „anständigen" Anteil I^{ohne}_{0T} wird im Anhang E

$$I^{\text{ohne}}_{0T} \;=\; \left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{T^2}{12}\right)^2 \; \left[\; 4\,\mathrm{LN} - 8\,\ln(4\pi T)\; + 8\,z_3 + \frac{136}{15}\;\right] \quad , \tag{4.26}$$

erhalten, s. (E.14). Zusammen mit (4.25) kommen wir an beim Resultat

$$\boxed{\; I_{0T} - \frac{T^2}{3}\chi(0) \;=\; \left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{T^2}{12}\right)^2 \; \left[\; \frac{8}{5}\,\mathrm{LN} - \frac{16}{5}\,\ln(4\pi T)\; + \frac{16}{5}\,z_3 + \frac{82}{15}\;\right] \;} \tag{4.27}$$

.

4.4 $\boldsymbol{I_{00} = \sum_Q w_0\, w_0}$

$$I_{00} = I^{\int}_{00} + I^{\text{ohne}}_{00} \quad , \quad I^{\int}_{00} = \int_Q w_0 w_0 \quad , \quad I^{\text{ohne}}_{00} = \sum_Q^{\text{ohne}} w_0 w_0 \quad . \tag{4.28}$$

Wie schon einmal erwähnt, enthält der Anteil $I^{\int}_{00}$ keine Temperatur mehr. Er entfällt also (siehe Kommentare vor (3.9)). Wie der verbleibende Beitrag aussieht, zeigt

$$\boxed{\; I_{00} = \left(\begin{matrix}\text{Temperatur–}\\ \text{unabhängiges}\end{matrix}\right) \;+\; \left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{T^2}{12}\right)^2 \; \left[\; \frac{2}{5}\,\mathrm{LN} - \frac{4}{5}\,\ln(4\pi T)\; + \frac{4}{5}\,z_3 + \frac{16}{15}\;\right] \;} \tag{4.29}$$

.

4.5 Ball–Resultat und Vergleich mit Dim.Reg.

Die erste Erfreulichkeit, welche wir in den drei eingerahmten Zwischenresultaten erkennen, ist der Vorfaktor. Zusammen mit $g^4/48$ in (3.36) gibt er den Eimer–Faktor $\mho$, s. (3.36). Aber wirklich spannend wird die Angelegenheit bei Erinnerung der anderen Details des unter (3.36) beschworenen Wahrnehmungsrasters. Addieren wir also die drei I–Beiträge mit Gemüt :

$$\begin{aligned}
\frac{g^4}{49}\,I_{TT} \;&=\; \mho\;\left[\, 4\,\mathrm{LN} - 8\,\ln(4\pi T)\; + 24\,z_1 - 16\,z_3 - \frac{92}{15}\,\right] \quad , \\
\frac{g^4}{48}\,\left(I_{0T} - \frac{T^2}{3}\chi(0)\right) \;&=\; \mho\;\left[\; \frac{8}{5}\,\mathrm{LN} - \frac{16}{5}\,\ln(4\pi T)\; + \frac{16}{5}\,z_3 + \frac{82}{15}\;\right] \quad ,
\end{aligned}$$

$$\frac{g^4}{48}\, I_{00} \;=\; \mho \;\left[\; \frac{2}{5}\,\mathrm{LN} - \frac{4}{5}\,\ln(4\pi T) + \frac{4}{5}\, z_3 + \frac{16}{15} \;\right] \quad ,$$

$$\frac{g^4}{48}\left(I_{\mathrm{ball}} \;-\; \frac{T^3}{3}\chi(0) \right) \;=\; \mho \;\left[\; 6\,\mathrm{LN} - 12\,\ln(4\pi T) + 24\, z_1 - 12\, z_3 + \frac{2}{5} \;\right] \quad . \tag{4.30}$$

Die richtige Anzahl Divergenzenfresser (6 LN) ist ebenso herausgekommen, wie die richtige Anzahl von $\ln(4\pi T)$–Termen. Was braucht man (vorerst) mehr zum Glück. Mit (3.36) und (4.30) liegt das Endresultat für den Druck jetzt natürlich vor. Wir geben ihm zu Beginn des nächsten Abschnitts einen würdigen Rahmen.

Wie der Mensch ist, schielt er nun auf anderer Leute Resultate. Andere Leute haben ausschließlich dimensional regularisiert. Folglich wissen sie nichts von einem Term $\chi(0) \sim \Lambda^2$. Ferner haben sie ihre Skala $\overline{\mu}$, welche $\ln(T)$ braucht, auf etwas andere Weise ins Spiel gebracht. Die Anzahlen ihrer $1/\varepsilon$ Divergenzen sollten allerdings perfekt mit unseren Anzahlen von LN's übereinstimmen. Die Diskrepanzen liegen im Endlichen. Last not least, erst in meßbaren physikalischen Größen (d.h. Term für Term der asymptotischen Entwicklung für den Druck) haben sich solche endlichen Diskrepanzen gefälligst (auf wundersame Weise) in Nichts aufzulösen. Mal sehen.

Die Basketball–Resultate finden sich bei [4] in den Gleichungen (2.35), (D.20), (D.21) und (2.36), wobei (D.20) zum Vergleich einen Faktor 2 braucht:

$$\frac{g^4}{48}\, I_{TT}^{\mathrm{dim.reg.}} \;=\; \mho \;\left[4\,\frac{1}{\varepsilon} + 24\,\mathbf{L} + 40\, z_1 - 16\, z_3 + \frac{268}{15} \right]$$

$$\frac{g^4}{48}\, I_{0T}^{\mathrm{dim.reg.}} \;=\; \mho \;\left[\; \frac{8}{5}\,\frac{1}{\varepsilon} + \frac{48}{5}\,\mathbf{L} + 8\, z_1 + \frac{8}{5}\, z_3 + \frac{206}{15} \;\right]$$

$$\frac{g^4}{48}\, I_{00}^{\mathrm{dim.reg.}} \;=\; \mho \;\left[\; \frac{2}{5}\,\frac{1}{\varepsilon} + \frac{12}{5}\,\mathbf{L} + \frac{12}{5}\, z_3 + \frac{72}{15} \;\right] \qquad , \quad \mathbf{L} := \ln\left(\frac{\overline{\mu}}{4\pi T}\right)$$

$$\frac{g^4}{48}\, I_{\mathrm{ball}}^{\mathrm{dim.reg.}} \;=\; \mho \;\left[\; 6\,\frac{1}{\varepsilon} + 36\,\mathbf{L} + 48\, z_1 - 12\, z_3 + \frac{182}{5} \;\right] \quad , \tag{4.31}$$

Es steht bestens um die Anzahlen von $\frac{1}{\varepsilon}$'s — wie erforderlich sogar termweise. Aber ansonsten sehen wir uns einer Zahlenmystik ausgeliefert.

Besonders beunruhigen könnte der Unterschied $36 \neq 12$ in den Logarithmen von $4\pi T$. Tatsächlich (private Historie) lag im PV–Fall zuerst (4.30) vor, noch bevor klar wurde, daß dies a u c h stimmt. Aus dieser Historie stammt die phänomenologische Gleichung „$\mathrm{LN} - 2\ln(4\pi T) \;\hookrightarrow\; \frac{1}{\varepsilon} + 6\,\mathbf{L} + 4\, z_1 + 6$ “, welche (4.31) in (4.30) übersetzt, Dim.Reg. in PV also. Sie übersetzt auch separat I_{TT}, (4.21), in Arnodl-Zhai's (2.35). Diese „Regel“ hat möglicherweise keinen tieferen Sinn, es sei denn man kriecht (was wir hier nicht tun wollen) in technische Details hinein, um die Entstehung des Unterschieds zwischen den beiden Regularisierungen genauer zu begreifen. Grob: Dim.Reg. hat Bose–Funktion kaputt gemacht.

Zur Dimensionalen Regularisierung ist das zugehörige „Wahrnehmungsraster“ nachzutragen. Arnold-Zhai's b hatten wir schon in (3.27) zum Vergleich angesehen. Für das dortige Subjekt ι_ε haben wir inzwischen die geeignete Notation beieinander : $\iota_\varepsilon = 2\mathbf{L} + 2\, z_1 + 2$. Die Terme bis mit g^3 stimmen mit jenen in (3.34) überein. Und das Äquivalent von (3.36) lautet :

$$p_4^{\text{dim.reg.}} = \mho \left[-6\frac{1}{\varepsilon} - 18\,\mathbf{L} - 24\, z_1 + 6\,\gamma - 60 \right] + \frac{g^4}{48}\, I_{\text{ball}} \quad . \tag{4.32}$$

Es hat natürlich die richtige $\frac{1}{\varepsilon}$–Anzahl, zum Gefressen–Werden durch (4.31). $\mathbf{L}$ ist bereits inclusive Skala $\overline{\mu}$ definiert. Woher z_1 ? — ausschließlich über das Subjekt ι_ε, und dieses vom Bose–Kaputtmachen. Bose in I_{ball} kaputt und „entsprechend kaputt“ in den anderen Termen. Übrigens bleibt ι_ε ausschließlich via $\frac{1}{\varepsilon}\,(1 + \varepsilon\iota_\varepsilon)$ am Leben. Die oben im Text genannte „Regel“ ist für das Gesamtresultat nun falsch.

Wenn denn also — wie sich gleich zeigt — der Druck zu beiden Einbettungsarten gar schlicht der selbe ist, dann sollte (wird) sich ein Zusammenhang zwischen Skala M und Subjekt Nummer zwei, $\overline{\mu}$, dingfest machen lassen. Man blicke ruhig nach unten auf (5.3). Selbstverständlich kann die M–$\overline{\mu}$–Beziehung auch dadurch erhalten werden, daß man mit dimensional gerechneten $T = 0$–Größen die Renormierungsbedingungen (2.11)–(2.13) bedient. Der Test wurde durchgeführt, (5.3) stimmt.

5 Unabhängigkeit vom Renormierungspunkt M

Das Endresultat für den Druck, gerechnet in Pauli–Villars–Regularisierung bis mit g^4, war im vorigen Abschnitt mit (4.30) bereits erreicht. Lediglich der letzte Schritt fehlte, nämlich die Druck–Gleichung (3.36) mit I_{ball} auch wirklich zu bestücken. Eine gewisse Feierlichkeit ist jetzt angezeigt :

$$\boxed{\begin{aligned} p \;=\; & \frac{\pi^2 T^4}{90} \;-\; \frac{g^2}{8}\left(\frac{T^2}{12}\right)^2 \;+\; \frac{m^3 T}{12\pi} \\ & + \mho \left[18 \ln\left(\frac{M}{4\pi T}\right) \;-\; 18 \;+\; 6\,\gamma \;+\; 24\, z_1 \;-\; 12 z_3 \;-\; \frac{118}{5} \right] \end{aligned}} \tag{5.1}$$

.

In der Einleitung war das schwere Leben von Meßgrößen beschrieben worden. Zweites und drittes Erfordernis (Unabhängigkeit von cutoffs und von endlichen Details der Einbettung) sind bereits erfüllt. Der Druck darf auch nicht (erstes Erfordernis) bei PV oder Dim.Reg. verschieden herauskommen. Also stellen wir (5.1) Arnold und Zhai's Resultat gegenüber. Es folgt per Einsetzen von (4.31) in (4.32) :

$$p^{\text{dim.reg.}} \;=\; \frac{\pi^2 T^4}{90} - \frac{g^2}{8}\left(\frac{T^2}{12}\right)^2 + \frac{m^3 T}{12\pi} \;+$$

$$+\ \mho\ \left[\ 18\ln\left(\frac{\overline{\mu}}{4\pi T}\right)+6\,\gamma+24\,z_1-12z_3-\frac{118}{5}\ \right]\quad . \tag{5.2}$$

Genau hinsehen, bitte. In (5.1) scheint eine -18 überzählig zu sein. Und (5.2) hat im Logarithmus einen anderen Skalenparameter stehen. Die Übereinstimmung wird also perfekt, wenn man identifiziert

$$M\ =\ \overline{\mu}\ \cdot\ e\qquad . \tag{5.3}$$

Und das wars dann, siehe Komentar am Ende des vorigen Abschnitts. Der Druck ist unabhängig von der Art der Einbettung bei Durchführung der Feldtheorie. Ein wenig darf allerdings erstaunen, daß mit all ihren Mängeln (siehe § 1) sogar auch die Dim.Reg. etwas Richtiges geliefert hat. Mit (5.1) ist im übrigen klar, daß auch bei Pauli-Villars Euler–Konstante und logarithmische Zetafunktions–Ableitungen im Endresultat stehen bleiben (in irgendeinem Lehrbuch stand Gegenteiliges zu lesen) und nicht etwa nur Dim.Reg.–Kunstprodukte sind.

Die Überschrift dieses Abschnitts verweist natürlich auf das vierte Erfordernis. Der Druck p (Term für Term seiner asymptotischen Entwicklung) darf auch nicht von der Skala M abhängen, an welcher in § 2.3 „die Theorie definiert" wurde. Im Resultat (5.1) erscheint dieser Parameter M explizit („welches M ??!") — aber auch die Kopplung g hängt von ihrer „Definition" bei M ab. Größen, welche vom „Theorie–Definieren" noch n i c h t s wissen, fanden sich zuletzt in § 2.1 . $g_{\rm ur}^2$ wußte nichts. Die interessante dritte Gleichung in (2.8) lautet mit (2.33)

$$g_{\rm ur}^2\ =\ \frac{Z_g}{Z_\phi^2}\,g^2\ =\ \frac{1+\frac{3\,g^2}{32\pi^2}\Big(\mathrm{LN}-\ln(M^2)\Big)\ +\ \mathcal{O}(g^4)}{1\ +\ \mathcal{O}(g^4)}\ g^2(M)\quad . \tag{5.4}$$

Nun ist hierin $g_{\rm ur}$ unbekannt, wiewohl M–unabhängig. Und das genügt. Wir wollen ja nur sehen, daß jedes U m s t e i g e n von der einen g–Definition (bei M) zu einer anderen (bei M') keinen Einfluß auf Meßgrößen hat. Die M–Unabhängigkeit von $g_{\rm ur}$ ist also als

$$\frac{1+\frac{3\,g^2(M)}{32\pi^2}\Big(\mathrm{LN}-\ \ln(M^2)\Big)}{1\ +\ \mathcal{O}(g^4)}\ g^2(M)\ \ \stackrel{!}{=}\ \ \frac{1+\frac{3\,g^2(M')}{32\pi^2}\Big(\mathrm{LN}-\ \ln(M'^2)\Big)}{1\ +\ \mathcal{O}(g^4)}\ g^2(M')\quad . \tag{5.5}$$

zu formulieren. (5.5) läßt sich bequem auflösen nach

$$g^2(M')\ =g^2(M)+\frac{3}{32\pi^2}\,g^4(M)\,\ln\left(\frac{M'^2}{M^2}\right)\ +\ \mathcal{O}\left(g^6(M)\right)\quad , \tag{5.6}$$

wobei sich (wie erhofft) die LN–Riesigkeiten davongestohlen haben (in $\mathcal{O}(g^6)$ verflüchtigt). Letzteres geschah im Iterationssinne per

$$\begin{aligned} g^4-g'^{\,4}\ &=\ \left(g^2-g'^{\,2}\right)\ \left(g^2+g'^{\,2}\right)\ =\ \mathcal{O}(g^6)\qquad ,\quad \text{aber}\\ g^4\ell-g'^{\,4}\ell'\ &=\ \frac{g^4+g'^{\,4}}{2}\,(\ell-\ell')\ +\ \frac{g^4-g'^{\,4}}{2}\,(\ell+\ell')\ =\ g^4\,(\ell-\ell')\ +\ \mathcal{O}(g^6)\quad . \end{aligned}$$

mit $\ell=\ln(M^2)$, $\ell'=\ln(M'^2)$. Die Auflösung von (5.6) nach $g^2(M)$ gibt natürlich erneut (5.6), aber zu $M \leftrightarrows M'$. Und in g^4 ist das M–Argument irrelevant.

Irgendwelche Leute aus Thailand werfen nun ein paper auf den Markt (zum Druck des ϕ^4–Systems), welches von einer ganz anderen Theorie–Definition ausgeht. Sie haben nämlich die Bedingungen (2.11–13) mit einem Parameter M' bestückt. Da die Leute rechnen können, sind sie bei „fast" (5.1) angekommen. Die beiden relevanten Terme von (5.1) lauten bei ihnen nämlich

$$- \frac{g^2(M')}{8} \left(\frac{T^2}{12} \right)^2 \; + \; 9 \, \mho \ln \left(M'^{\,2} \right) \quad . \tag{5.7}$$

Der dritte Term $\sim m^3$ ist bereits uninteressant, weil er unter (5.6) wegen

$$g^3 \; = \; \left[g^2 + \mathcal{O}(g^4) \right]^{3/2} \; = \; g^3 (1 + \mathcal{O}(g^2)) \; = \; g^3 + \mathcal{O}(g^5)$$

bis mit g^4 keine Änderung produziert. Um nun mit „unserer" Druckformel (5.1) zu vergleichen, rechnen wir (5.7) mittels (5.6) auf M–Abhängigkeit um. Dabei kommt der Eimer-Faktor per $\frac{1}{8} \left(\frac{T^2}{12} \right)^2 \frac{3}{32\pi^2} \, g^4 = 9 \, \mho$ ins Spiel. Resultat

$$(5.7) \; = \; - \frac{g^2(M)}{8} \left(\frac{T^2}{12} \right)^2 + \, 9 \, \mho \; \left[- \ln(M'^{\,2}) + \ln(M^2) \right] \; + \, 9 \, \mho \; \ln(M'^{\,2}) \quad . \tag{5.8}$$

Ist es überdeutlich zu erkennen ?! (5.7) (zuzüglich der unveränderten Terme) i s t (5.1) ! An welcher Stelle M auch immer man seine Theorie definiert, man erhält das g l e i c h e Resultat. Das ist schön: ***Feldtheorie funktioniert .***

Die im § 2.3 noch etwas willkürliche erscheinende Prozedur bekommt ihren vollen Sinn.

Umsteigen von einer Skala der Theorie–Definition zu einer anderen ist Gegenstand der Renormierungsgruppe. Der Anhang „gruppe" klingt irgendwie arg hochtrabend. Selbstverständlich kann man mehrere solche Umsteigereien hintereinander ausführen, ebenso wie Drehungen oder Lorentz–Transformationen.

Für die Experten scheint Obiges zu den Trivialitäten zu gehören. Jedenfalls meinen Arnold und Zhai in ihren Schlußkommentaren nicht mehr dieses schöne Tatsächlich–Funktionieren von Feldtheorie. Sie spielen vielmehr nur herum mit Fragen, wie gut etwa Einzelterme der asymptotischen Entwicklung bereits zu wie–guten numerischen Resultaten führen. Aber das interessiert die wahren Theoretiker in Hannover eigentlich kaum noch.

Eine restliche Frage könnte offen geblieben sein. Irgendwer muß irgendwie einmal aus Experiment auf e i n $g^2(M)$ geschlossen haben, mit Zahlenwert und unter Angabe von M. Wie mag das zu tun sein ? In (2.13) (der dritten Bedingung) waren Quadrate von Summen Euklidischer Impulse auf $M^2 \;>\; 0$ gesetzt wurden. Bei realen masselosen Teilchen (on shell) wäre hingegen $(Q_1^{\rm eu} + Q_2^{\rm eu})^2 = (\vec{q}_1 + \vec{q}_2)^2 - (E_1 + E_2)^2 = (\vec{q}_1 + \vec{q}_2)^2 - (q_1 + q_2)^2 = 2 \vec{q}_1 \vec{q}_2 - 2 q_1 q_2 \;\leq\; 0$. „*on shell (but unphysical)*" steht bei Itzykson und Zuber [1] vor Gleichung (8-35), und diese ist (2.13). Die Antwort[7] fällt umwerfend einfach aus: Man gebe sich einen Wert M vor, woraufhin die counters (2.33) als Funktionen von g^2 festliegen.

[7] Dankenswerterweise hat Prof. N. Dragon mit der Antwort ausgeholfen.

Nun rechne man mit Lagrangian (2.10) eine geeignete Meßgröße aus und entnehme g^2 aus Vergleich mit Experiment. Dies i s t $g^2(M)$. Punkt.

6 Callan–Symanzik

Die Überschrift [11] führt in eine Materie voller Eigenartigkeiten und voller Wortgeklingel. Wir nähern uns mit großer Skepsis. Was man zu einer Physik per Störungsrechnung in Erfahrung bringen kann, dürfte in den vorangegangenen Abschnitten bereits stehen. Was denn noch ??! Die Koeffizienten in der Callan–Symanzik–Gleichung gewinnt man aus Bisherigem. Und bei Lösen der CS–Gleichung, kommen Dinge heraus, die wir schon kennen. Im Kreise herum ?

Als erstes setzen wir $g^2 =: \lambda$ (reine Notation), um besser mit Literatur vergleichen zu können. Die Lagranian $\mathcal{L}$ (nichts wissend von Temperatur) ist (2.10), bestückt mit bekannten counterterms (nicht enthaltend die Temperatur). Den amputierten n–beinigen Vertex nennen wir $\Gamma^{(n)}$. Bei $T = 0$ hängt $\Gamma^{(n)}$ — ausgewertet zu $\mathcal{L}$ bis zu einer bestimmten Ordnung in λ — ab von einem Satz $\{Q_i\}$ einlaufender Impulse, von M (via counters) und von λ (bei $T \neq 0$ überdies von T). $\Gamma^{(n)}$ ist endlich (:= nicht–riesig). Dieser n–stümpfige Klumpen hat sein Gegenstück $\Gamma^{(n)}_{\text{ur}}$ in der urigen Theorie. Letzteres ist riesig, unmeßbar und unphysikalisch, aber eines hat es : Unkenntnis von M. Stattdessen enthält es cutoffs Λ. Vor Amputation hatte es keine $\sqrt{Z_\phi}$–Faktoren aus den n Beinen abbekommen. Bei $T = 0$ gilt also

$$\Gamma^{(n)}_{\text{ur}}\left(\{Q_i\}, \Lambda, \lambda_{\text{ur}}\right) \;=\; Z_\phi^{-n/2}\left(\Lambda/M, \lambda\right) \;\cdot \Gamma^{(n)}\left(\{Q_i\}, M, \lambda\right) \quad . \tag{6.1}$$

OK, das ist vielleicht recht schlau. Z_ϕ ist dimensionslos, weshalb die Abhängigkeit von Λ und M als Verhältnis geschrieben werden durfte. Natürlich läuft der Index i von 1 bis n. Gibt es mehrere cutoffs, so stehe Λ für den Satz derselben.

Vielleicht ist eine Rückerinnerung angezeigt, wie wir in den Abschnitten 2 (Counters) und 3 (Druck) gearbeitet hatten. Zunächst erscheinen die Einbettungsparameter Γ, Λ an allen Ecken und Enden. Viel von diesen Abhängigkeiten wurde dann im Limes–Vorwegausführungs–Sinne unterdrückt. Nur Divergieren–Wollendes war zu präparieren (in den Z's) beziehungsweise zu kompensieren im Druck. Statt Druck stehen in (6.1) die ebenfalls endlich–zu–bleiben–habenden $\Gamma^{(n)}$. Enthält eine Größe keine Λ's mehr (Druck, $\Gamma^{(n)}$, CS–Gleichung (6.5)), so ist der Limes a u s g e f ü h r t.

In (6.1) haben wir zunächst an $n \geq 4$ Bein–Stümpfe gedacht. Die Frage, was denn $\Gamma^{(2)}$ zu sein habe, d a m i t (6.1) auch zu $n = 2$ gilt, ist durchaus etwas nervig und führt in § 2.1 zurück : (2.2) = (2.7). Bei Abschalten der Kopplung reduziert sich (2.7) auf $G_0 = 1/\left[\, P^2(\ )\,(\ )\,\right]$ (jetzt vorsichtshalber wieder mit den regulierenden Klammern). Mit

Wieder–Einschalten der Kopplung nimmt einerseits Z_ϕ Terme auf. Unabhängig davon (!) generiert andererseits die Störungsrechnung an (2.10) additive Zusätze im G_0–Nenner. Diese Zusätze bilden Π (die Dyson–Gleichung lautet $G = G_0 - G_0 \Pi G$). Also haben wir zu setzen

$$
\begin{aligned}
G_{\rm ur} \;&=\; \frac{1}{m_{\rm ur}^2 + P^2\left(1+\frac{P^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{P^2}{\Gamma^2}\right) + \Pi_{\rm ur}(P^2;\Lambda,\Gamma,\lambda_{\rm ur})} \\
&=\; \frac{Z_\phi\,(\Lambda/M,\Gamma/M,\lambda)}{P^2\left(1+\frac{P^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{P^2}{\Gamma^2}\right) + \Pi(P^2,M,\lambda)} \;=\; Z_\phi\, G \quad , \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

Der Vergleich mit (6.1) zu $n = 2$ zeigt, daß die obigen beiden N e n n e r mit $\Gamma_{\rm ur}^{(2)}$ bzw. $\Gamma^{(2)}$ zu identifizieren sind. Übrigens kennt man solche $\Gamma^{(2)}$ auch als jene, die das 1PI–erzeugende Funktional produziert (aber wer wagte denn, vorweg zu behaupten, daß es die selben seien).

6.1 Herleitung der CS–Gleichung $(T = 0)$

Der erste Schritt in Richtung Nutzen von (6.1) ist ganz klar. Keine der Größen auf der linken Seite von (6.1) (auch $\lambda_{\rm ur}$ nicht) „weiß von M“. Was wir wissen ist, daß sich diese M–Unabhängigkeit auf der rechten Seite von (6.1) erst dadurch ergibt, daß auch λ mit M variiert : „implizite Abhängigkeit“. Um bei Differentiation nach M links eine Null aufschreiben zu dürfen, muß also die „totale Ableitung“ d_M genommen werden (:= jene, welche auch die M–Abhängigkeit von λ „sieht“)[8]. Es ist auch sicherlich gescheit, die Gleichung $0 = d_M(6.1)$ mit einem Faktor so zu multiplizieren, daß sich $f^{-\alpha}\partial f^\alpha = \alpha\partial\ln(f)$ ausnutzen läßt :

$$
0 \;=\; Z_\phi^{n/2}\, M\, d_M\;(6.1) \;=\; \left[\; M\partial_M + \{M d_M \lambda\}\;\partial_\lambda - n\left\{\frac{1}{2} M d_M\,\ln\left(Z_\phi\right)\right\}\;\right]\,\Gamma^{(n)} \quad . \qquad (6.3)
$$

Die beiden geschwungenen Klammern bekommen nun erst einmal ihre üblichen Namen,

$$
M d_M \lambda \;\;=:\;\; \beta(\lambda) \quad , \qquad \frac{1}{2} M d_M\,\ln\left(Z_\phi\right) \;\;=:\;\; \gamma(\lambda) \quad , \qquad (6.4)
$$

und die CS–Gleichung ihre elegante Form

$$
\left[\; M\partial_M \;+\; \beta(\lambda)\,\partial_\lambda \;-\; n\gamma(\lambda) \;\right]\Gamma^{(n)} \;\;=\;\; 0 \quad . \qquad (6.5)
$$

Vielleicht hat es keiner bemerkt — wo hierbei geschummelt wurde : bei Verfügen der nur–von–λ–Abhängigkeit der Koeffizienten in (6.4). Ein Problem bereitet $\beta(\lambda)$ dann nicht, wenn man darauf vertraut, daß es in beliebig hohen Ordnungen ebenso zugeht wie in (5.6) : $\lambda(M)$ enthält keine cutoffs mehr, sondern neben M nur noch endliche Parameter, welche für Dimensionslosigkeit sorgen. Dies ist letztlich das Resultat des Renormierbarkeitsproofs, siehe Literatur. Wenn die dimensionslose, endliche Funktion $\lambda = \lambda(M)$ nach M

[8] Ein Dankeschön an den Herrn Collins [12], § 7.3.1 . Der CS–Paragraph 12.2 bei Peskin und Schroeder [2] wäre mittels d_M viel klarer ausgefallen.

aufgelöst werden kann, dann können wir die dimensionslose, endliche Bildung $Md_M\lambda$ als Funktion von λ auffassen. Jetzt blicken wir auf die CS–Gleichung (6.5). Auch die Lösung $\Gamma^{(n)}$ ist mit obigem gut–geh–Argument endlich (niemand hatte protestiert, als rechts in (6.1) kein Argument Λ mehr erschien). Aber nun gibt es in (6.5) bis auf $\gamma\,\Gamma^{(n)}$ nur noch endliche Terme. Folglich gibt es kein Λ in γ, und ergo kann es nur von λ abhängen. Punkt. Mit den Geschichten in [2] (Ende von § 12.2) kann jetzt wer vielleicht etwas anfangen. Immerhin, Z_ϕ enthält Riesigkeiten, aber $\gamma(\lambda)$ nicht mehr.

6.2 Führende Terme der Koeffizienten

Um $\beta(\lambda)$ und $\gamma(\lambda)$ ein paar λ–Ordnungen weit auszuwerten, greifen wir natürlich (!) nach ihren Definitionen (6.4)[9]. Um $\beta(\lambda)$ per $Md_M\lambda$ zu erhalten, wenden wir Md_M auf (5.4) an, d.h. auf $\lambda_{\rm ur} = \lambda Z_g/Z_\phi^2$. Das gibt drei Terme,

$$0 \;=\; \beta\,\frac{Z_g}{Z_\phi^2} \;+\; \frac{\lambda}{Z_\phi^2}\,Md_M Z_g \;-\; 2\,\frac{\lambda Z_g}{Z_\phi^3}\,Md_M Z_\phi \quad , \tag{6.6}$$

und aus unserer Z–Kenntnis (2.33) ergänzen wir dies um

$$\begin{aligned} Md_M Z_g \;&=\; Md_M\left(\frac{3\,\lambda}{32\pi^2}\,[\,\mathrm{LN} - 2\ln(M)\,] \;+\; \mathcal{O}(\lambda^2)\right) \\ &=\; \frac{3\,\beta}{32\pi^2}\,[\,\mathrm{LN} - 2\ln(M)\,] \;-\; \frac{3\,\lambda}{16\pi^2} \;+\; \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$Md_M Z_\phi \;=\; Md_M\,\mathcal{O}(\lambda^2) \;=\; \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{6.8}$$

Ersichtlich kann Md_M–Operation die λ–Ordnung aufrechterhalten (if $\ln(M)$ behind), so daß wir in (6.8) sehr kurz bleiben konnten. Wir wollten wissen, ob unser Informationsstand mehr als den führenden β–Term zu bestimmen erlaubt

$$\Big(\;\text{(6.7), (6.8) in (6.6) gibt}\quad 0 = \frac{\beta\,Z_g}{Z_\phi^2} - \frac{3\,\lambda^2}{16\pi^2 Z_\phi^2} + \frac{3\,\beta\,\lambda}{32\pi^2 Z_\phi^2}\,[\,\mathrm{LN} - 2\mathrm{ln}(M)\,] \;+\; \mathcal{O}(\lambda^3)\;\Big)\,,$$

aber die Antwort ist Nein:

$$\beta(\lambda) \;=\; \frac{3}{16\pi^2}\,\lambda^2 \;+\; \mathcal{O}(\lambda^3) \;=\; \frac{3}{16\pi^2}\,g^4 \;+\; \mathcal{O}(g^6) \quad . \tag{6.9}$$

(6.4) verknüpft $\gamma(\lambda) = \frac{1}{2}Md_M\mathrm{ln}(Z_\phi)$ direkt mit Z_ϕ, (2.33), und wir wissen nun schon, wie sich die λ–Ordnung aufrecht erhält:

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda) \;&=\; \frac{1}{2Z_\phi}\,Md_M\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{32\pi^2}\right)^2\left[\ln(M^2) - \mathrm{LN} - \frac{1}{2} + c_2\right] \;+\; \mathcal{O}(\lambda^3)\right) \\ &=\; \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{32\pi^2}\right)^2 \;+\; \mathcal{O}(\lambda^3) \;=\; \frac{1}{3}\left(\frac{g^2}{32\pi^2}\right)^2 \;+\; \mathcal{O}(g^6) \quad . \end{aligned} \tag{6.10}$$

---

[9] Es erstaunt ein wenig, daß in [2] etwas anderes getan wird und daß dies tatsächlich a u c h geht. Peskin und Schroeder [2] schreiben erneut Diagramme der 2– und 4–Beiner auf, lassen die CS–Operation (6.5) auf sie los und erhalten Gleichungen für β und γ. OK. Vorteil: eine nicht–„ur"ige Methode, Nachteil: erneute Diagrammatik.

Z_ϕ war riesig, $\gamma(\lambda)$ ist es nicht mehr.

6.3 Lösung der CS–Gleichung $(T = 0)$

$[\, M\partial_M + \beta(\lambda)\partial_\lambda - n\gamma(\lambda)]\,\Gamma^{(n)} = 0$ ist eine homogene[10] lineare (!) partielle Dgl in zwei Dimensionen. Der Koeffizient an ∂_λ hängt nur von λ ab, jener an ∂_M nur von M. Ist das aber einfach! Wer in Hannover durch die „Rechenmethoden“ gegangen ist, der löst so etwas zu Fuß.

Der genannte Fußgänger hat die folgenden drei Ideen:

1. **(neue Variable)** Sicherlich kann man eine neue Variable (die Stammfunktion von $1/M$ ist $t = \ln(M)$) so einführen, daß die erste Operation ein ∂_t wird. Dann entsteht eine spezielle zeitabhängige Schrödinger–Gleichung mit t–unabhängigem Hamiltonian. Anfangswert–Problem abstrakt lösbar per e–Funktion.
2. **(neue Funktion)** Der Zusatzterm $\gamma\,\Gamma^{(n)}$ (man denke an $i\dot\psi = (H + \text{const}\,)\psi$) re–skaliert nur und kann mit Abspalten einer e–Funktion beseitigt werden.
3. **(schwingende Saite)** Auch der ∂_λ–Term muß sich irgendwie in ein ∂_x verwandeln lassen (Stammfunktion von $1/\beta(\lambda)$?!). Also entsteht[11] $[\,\partial_t + \partial_x\,]\; f(t,x) = 0$. Und hiervon ist die allgemeine Lösung $f(t,x) =$ eine beliebige Funktion von $(t-x) =: \text{bel.}\ (x-t)$. Fein. Alles im Griff. Aber soweit nur „ideell“ .

Der Variablensatz $\{Q_i\}$ spielt nicht mit in der CS–Gleichung (ist nur Parameter), also: $\Gamma^{(n)}(M,\lambda)$. Die Assoziationen mit Schrödinger–Gleichung lassen wir wieder beiseite (es lohnt nicht). Konkret beginnen wir mit der „Beseitigung“ des $-n\gamma$–Terms. Da $\gamma(\lambda)$, sollte dies der ∂_λ Term bewerkstelligen. Wir brauchen die Stammfunktion nicht nur von $1/\beta$ sondern auch von γ/β und schreiben solcherlei salopp als

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda'\,\frac{\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} \quad =: \quad \int^\lambda \frac{\gamma}{\beta} \qquad \text{und} \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda'\,\frac{1}{\beta(\lambda')} \quad =: \quad \int^\lambda \frac{1}{\beta} \quad . \tag{6.11}$$

Die Rest–Funktion f nach Abspalten des geeigneten Exponenten (siehe unten) definieren wir nun gleich als abhängend von d e n geeigneten neuen Variablen t und x:

$$\Gamma^{(n)}(M,\lambda) \;=\; e^{n\int^\lambda \frac{\gamma}{\beta}}\;\; f\Big(\, t = \ln(M)\,,\; x = \int^\lambda \frac{1}{\beta}\,\Big) \quad . \tag{6.12}$$

Anwenden des CS–Operators auf (6.12) gibt nun in der Tat $(\partial_t + \partial_x) f(t,x) = 0$. Somit ist $f(t,x) = \text{bel.}\ (x-t)$, und

$$\Gamma^{(n)}(M,\lambda) \;=\; e^{n\int^\lambda \frac{\gamma}{\beta}}\;\; \text{bel.}\;\Big(\; \int^\lambda \frac{1}{\beta} - \;\ln(M)\;\Big) \tag{6.13}$$

---

[10] Zu massiver ϕ^4–Theorie ist sie inhomogen, siehe z.B. Cheng and Li [13], Gleichung (3.51), wird aber homogen *in the deep Euclidean region*: ibid. Gl. (3.57)

[11] Das ist bereits nur noch ein Halbschritt zur schwingenden Saite $[\,\partial_t + \partial_x\,]\;[\,\partial_t - \partial_x\,]\; y(t,x) = 0\,.$

ist die allgemeine Lösung der Callan–Symanzik–Gleichung (der masselosen ϕ^4–Theorie bei Temperatur Null).

Bei (6.13) sind wir ohne besondere Mühen angekommen. Aber nun häufen sich Fragen. Was all das soll, ist wohl die schlimmste. Mit einer beliebigen Funktion kann man nicht leben. Könnten wir $\Gamma^{(n)}$ exakt ausrechnen, gut, dann wäre auch bel. bekannt. Aber dann würde sich niemand mehr für letztere interessieren. Die einzige Weisheit in (6.13) scheint in dem speziellen Argument von bel. zu liegen. Wir können das Variablen–Paar M, λ, so veränderen, daß sich bel. gerade n i c h t ändert. Wir gehen dann auf einer Linie im λ über M Diagramm spazieren, auf einer Äqui–bel.–Linie sozusagen. Die Linie beginne an jener Stelle M zu welcher der zugehörige Wert λ irgendwie experimentell ermittelt sei. Andere Punkte $\overline{\lambda}$, $\overline{M}$ auf der Linie folgen dann aus

$$\int^{\lambda} \frac{1}{\beta} - \ln(M) \;=\; \int^{\overline{\lambda}(\overline{M},M,\lambda)} \frac{1}{\beta} - \ln\left(\overline{M}\right) \quad . \tag{6.14}$$

Ersichtlich kann (6.14) unverzüglich umgeschrieben werden auf

$$\int_{\lambda}^{\overline{\lambda}(\overline{M},M,\lambda)} \frac{1}{\beta} \;=\; \ln\left(\frac{\overline{M}}{M}\right) \quad , \tag{6.15}$$

woraufhin nun wohl in das übliche Geplapper einzustimmen ist, $\overline{\lambda}$ sei die „*running coupling*“. Soso. Da runnt sie also dahin auf der Äqui–bel.–Linie.

6.4 „running coupling“ = bei $\overline{M}$ definierte Kopplung

Bei aller seelischer Zerrissenheit um das Thema dieses Callan–Symanzik–Abschnitts, *einen* besonderen Reiz mag es wohl haben. Es handelt von der verzweifelten Bemühung um Aussagen jenseits der Störungsrechnung, um die Struktur der exakten Theorie.

Wir beginnen mit der rechten Hälfte der Überschrift und rekapitulieren, was wir über eine bei M' definierte Kopplung $\lambda(M') =: \lambda'$ wissen. Die Renormierungsbedingungen (2.11)–(2.13) liefern Z_g und Z_ϕ als Funktionen von M, λ. Mit diesen Funktionen Z konnten wir die Beziehung zu $\lambda_{\rm ur}$ bestücken, so geschehen in (5.4). Der Abbruch der Störungsreihe konnte dort natürlich auch weit oberhalb λ^2 liegen. Sodann hatten wir, in (5.5), M–Unabhängigkeit von $\lambda_{\rm ur}$ ausgenutzt. In irgendeiner beliebig hohen Abbruchordnung heißt das

$$\lambda_{\rm ur} \;=\; \frac{Z_g\,(\Lambda, M, \lambda)}{Z_\phi^2\,(\Lambda, M, \lambda)}\,\lambda \;=\; \frac{Z_g\,(\Lambda, M', \lambda')}{Z_\phi^2\,(\Lambda, M', \lambda')}\,\lambda' \quad . \tag{6.16}$$

Ist *ein* λ bei M experimentell bekannt, so gibt das rechte Gleichheitszeichen λ'. Das linke Gleichheitszeichen hatten wir ein weiteres mal benutzt (in (6.6) im Abschnitt 6.2), um uns die β–Funktion zu verschaffen. Auch diese Prozedur hängt natürlich nicht an der Abbruchordnung. Auch die Information über $\beta(\lambda)$ ist also in (6.16) enthalten. Na gut, wiederholen wir auch noch die Definition (6.4) der β–Funktion :

$$\beta(\lambda) \;:=\; M\, d_M\, \lambda(M) \;=\; d_{\ln(M)}\, \lambda(M) \quad . \tag{6.17}$$

Es ist augenfällig, daß (6.17) durch Trennung der Variablen aufintegriert werden kann :

$$\frac{dM}{M} \;=\; \frac{d\lambda}{\beta(\lambda)} \qquad \Rightarrow \qquad \int_M^{M'} dM\, \frac{1}{M} \;=\; \ln\left(\frac{M'}{M}\right) \;=\; \int_\lambda^{\lambda'} \frac{1}{\beta} \quad . \tag{6.18}$$

Das war, was wir schon wußten : alter Tee.

Und nun blicken wir auf (6.15) zurück, wie dort eigentlich das Objekt $\overline{\lambda}$ definiert war. Sieh einer Kuckuck, (6.18) und (6.15) sind identische Gleichungen ($\overline{M}$ ist M'). Zwischen λ' und $\overline{\lambda}$ gibt es *keinen Unterschied*. Verdammt noch mal, ihr elenden Schreiberlinge mit eurem nebulösen Wortgeklingel !

Vielleicht ist hierbei auch klar geworden, daß wir uns von den Herren C und S hübsch im Kreis herum haben führen lassen — allerdings nur in bezug auf $\lambda(M)$. Wie sich λ mit M ändert, das steht schon im „alten Tee“ (6.16). Und eine Abkürzung für die Ableitung $M d_M \lambda(M)$ hätte uns schon im § 2 in den Sinn kommen können. Aber mit Bezeichnungen soll man sparen (sagt irgendwer in Wien).

6.5 Skalierung der Eingangs–Impulse

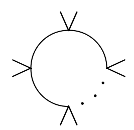
Wir kehren zu (6.13) zurück, um etwas aus der allgemeinen Lösung zu lernen, etwas immerhin über den Satz der ∞ vielen $\Gamma^{(n)}$. Übergang von λ, M zum Variablenpaar $\overline{\lambda}$, $\overline{M}$ ändert bel. genau dann nicht, wenn (6.15) erfüllt ist (wähle z.B. $\overline{M}$, bestimme zugehöriges $\overline{\lambda}$). Mit solcher Begleitmusik ist also

$$e^{-n\int^{\lambda} \frac{\gamma}{\beta}}\, \Gamma^{(n)}(M,\lambda) \;=\; e^{-n\int^{\overline{\lambda}} \frac{\gamma}{\beta}}\, \Gamma^{(n)}(\overline{M},\overline{\lambda}) \quad , \tag{6.19}$$

oder unter Hinzunahme der bislang nur parametrischen Abhängigkeit von den n Beinimpulsen Q_j

$$\Gamma^{(n)}(\{Q_j\}\,, M,\lambda) \;=\; e^{-n\int_\lambda^{\overline{\lambda}} \frac{\gamma}{\beta}}\, \Gamma^{(n)}(\{Q_j\}\,, \overline{M},\overline{\lambda}) \quad . \tag{6.20}$$

Sie sind gefährlich, diese scheinbar billigen Umformungen; darum die Ausführlichkeit. Die $\Gamma^{(n)}$ haben Dimension. Um selbige zu ergründen, genügt es, *ein* Diagramm exemplarisch anzusehen (n Beine, $n/2$ Propagatoren) :

$$\left[\, \Gamma^{(n)} \,\right] \;=\; \Bigg[$$

$$\Bigg] \;=\; \left[\, \int_P \left(\frac{1}{P^2}\right)^{n/2} \,\right] \;=\; \left[\, \frac{P^4}{P^n} \,\right] \;=\; \left[\, M^{4-n} \,\right] \quad . \tag{6.21}$$

Mit einer dimensionslosen Funktion $f_n(x,y)$ können wir nun (6.20) auch schreiben als

$$M^{n-4} f_n\left(\left\{\tfrac{Q_j}{M}\right\}, \lambda\right) \;=\; e^{-n\int_\lambda^{\overline{\lambda}} \frac{\gamma}{\beta}}\; \overline{M}^{\,n-4} f_n\left(\left\{\tfrac{Q_j}{\overline{M}}\right\}, \overline{\lambda}\right) \quad . \tag{6.22}$$

Wir möchten gern einen Zusammenhang herstellen zwischen $\Gamma^{(n)}$ bei großen Impulsen und z.B. kleiner Kopplung mit $\Gamma^{(n)}$ bei entsprechend umgekehrten Daten. Dazu multiplizieren wir alle Q's mit dem gleichen Faktor $\overline{M}/M$, auf beiden Seiten von (6.22) natürlich. Rechts erscheint dann f_n mit den Argumenten $\{Q_j/M\}$ und $\overline{\lambda}$. Schließlich kehren wir von f_n zu $\Gamma^{(n)}$ zurück. Damit das rechts geht, ist zuvor mit M^{n-4} zu erweitern :

$$\Gamma^{(n)}\left(\left\{\tfrac{\overline{M}}{M}Q_j\right\}, M, \lambda\right) \;=\; \left(\tfrac{\overline{M}}{M}\right)^{4-n} e^{-n\int_\lambda^{\overline{\lambda}}\frac{\gamma}{\beta}}\,\Gamma^{(n)}\left(\{Q_j\}, M, \overline{\lambda}\right) \quad . \tag{6.23}$$

Cheng + Li [13] handeln die gesamte Thematik auf wenigen Seiten ab (*chapter 3, Renormalization group*)[12]. (6.23) ist dort Gleichung (3.68). Im Vergleich dieser beiden fehlt jedoch noch eine Kleinigkeit, nämlich eine mögliche Umformung des Exponenten in (6.23), d.h. von $\int_\lambda^{\overline{\lambda}} d\lambda'\,\gamma(\lambda')/\beta(\lambda')$. Dazu ersetzen wir in (6.15) $\overline{\lambda}$, $\overline{M}$ durch λ', M' und benutzen diesen Zusammenhang, um von λ' zur neuen Integrationsvariablen M' überzugehen :

$$\int_\lambda^{\lambda'} \frac{1}{\beta} \;=\; \ln\left(\frac{M'}{M}\right) \quad \Rightarrow \quad d\lambda' = \frac{1}{M'}\,\beta(\lambda') \quad , \quad \begin{array}{l}\text{bei } \lambda' = \lambda \text{ wird } M' = M\,, \\ \text{bei } \lambda' = \overline{\lambda} \text{ wird } M' = \overline{M}\,.\end{array} \tag{6.24}$$

Ergo kürzt sich $\beta(\lambda')$, und wir bekommen

$$\int_\lambda^{\overline{\lambda}} d\lambda'\,\frac{\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} \;=\; \int_M^{\overline{M}} dM'\,\frac{1}{M'}\,\gamma\left(\lambda'(M')\right) \;=\; \int_0^{\ln\left(\frac{\overline{M}}{M}\right)} dt\,\gamma\left(\lambda'(Me^t)\right) \quad . \tag{6.25}$$

wobei $t = \ln(M'/M)$. Es war ungeheuer anstrengend (Alterserscheinung denkbar).

Lassen wir doch abschließend einfach Cheng und Li zu Wort kommen [13]. Das Verhältnis M'/M heißt dort σ. Ferner bezieht sich der Kommentar (er folgt unmittelbar auf (6.23)) auf massive Theorie, welche erst in einem asymptotischen Sinne ($\sigma \to \infty$) in die hiesige masselose einmündet :

In this form the asymptotic solution $\Gamma^{(n)}_{\text{as}}$ has a simple interpretaion. The effect of rescaling the momenta in the Greensfunction $\Gamma^{(n)}$ is equivalent to replacing the coupling constant λ by the effective coupling $\overline{\lambda}$, apart from some multiplicative factors. The first factor σ^{4-n} in (6.23) is the canonical dimension coming from the fact that $\Gamma^{(n)}$ has dimension $4-n$ in units of mass. The exponential factor in (6.23) is the anomalous dimension term which is the result of summing up the leading logarithms in perturbation theory. This factor is controlled by the γ–function. Thus γ is often called the anomalous dimension (Wilson 1971).

The result in this section may be viewed as follows. The expectation that in the large–momentum limit masses become negligible and theory should be scale–incvariant is too simple. Even without physical masses the renormalizable theory still has an energy scale as we must always impose normalization conditions at some mass scale. Thus naive dimension analysis is generally inadequate and scale invariance is broken. However the dependence of the theory on this normalization mass scale is given by the renormalization–group equation which expresses the effect of a small change of scale. In favourable cases

[12] Warum nur ist dieses schöne Buch so weitgehend unbekannt geblieben. Vielleicht waren Itzykson und Zuber [1] eine zu starke Konkurrenz.

when the inhomogeneous term in the Callan–Symanzik equation may be dropped the solution indicates that the asymptotic behaviour displays a certain universal character with operators being assigned anomalous dimensions.

Renormierung ist eine Thematik, welche bezüglich Weisheit, Detailvielfalt und Arbeitsaufwand weit weit über den Rahmen hinausgeht, welchen Lehrbücher [1, 2, 7, 13, 14] üblicherweise stecken (müssen). Wer einmal diesen Rahmen zu überschreiten hat, dem hilft vielleicht ein kritischer Übersichtsartikel von Guy Bonneau [15] weiter[13]. Insbesondere findet sich dort ein stattliches Literaturverzeichnis.

●

A Kugelwinkel in 4D

$$\vec{r} = (\, x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3 \,,\, x_0 \,) \quad , \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2 \quad . \tag{A.1}$$

Setzen wir $x_0 = r\cos(\vartheta)$, so ist mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \sin^2(\vartheta)$ auf 3D Kugelkoordinaten mit radialer Koordinate $r_{3\mathrm{D}} = r\sin(\vartheta)$ zurückgeführt:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\,\sin(\vartheta)\,\sin(\varphi)\,\cos(\rho) \\ x_2 &= r\,\sin(\vartheta)\,\sin(\varphi)\,\sin(\rho) \\ x_3 &= r\,\sin(\vartheta)\,\cos(\varphi) \\ x_0 &= r\,\cos(\vartheta) \qquad . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Die Funktionaldeterminante kann man (in 4D) von Hand ausführen und

$$\left| \; \frac{\partial\,(x_1, x_2, x_3, x_0)}{\partial\,(r, \vartheta, \varphi, \rho)} \; \right| \; = \; r^3 \, \sin^2(\vartheta) \, \sin(\varphi) \tag{A.3}$$

erhalten. Eine 4D Integration läßt sich also schreiben als

$$\int d^4x \;\; \ldots \;\; = \int_0^\infty dr \; r^3 \int_0^{2\pi} d\rho \int_0^\pi d\varphi \; \sin(\varphi) \int_0^\pi d\vartheta \; \sin^2(\vartheta) \;\; \ldots \quad . \tag{A.4}$$

Zur Kontrolle sei die 4D Kugeloberfläche ausgerechnet:

$$\Omega_4 = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\rho \int_0^\pi d\varphi \; \sin(\varphi) \int_0^\pi d\vartheta \; \sin^2(\vartheta) \; = \; 2\pi \, \cdot \, 2 \, \cdot \, \frac{1}{2}\pi \; = \; 2\pi^2 \quad . \tag{A.5}$$

In welchem Lehrbuch mag so etwas Schönes stehen: in Kaku's QFT [14], § 7.5.

[13] Diesen Hinweis gab dankenswerterweise Dr. H. Skarke (Wien).

Häufig wird der Integrand nur vom Kugelwinkel ϑ abhängen, nämlich wenn er das Skalarprodukt $\vec{P}\,\vec{Q}$ enthält. Die Winkel können dann auf die $\vec{Q}$–Achse bezogen werden, $\vec{Q} = (Q, 0, 0, 0)$, so daß $\vec{P}\,\vec{Q} = P_0 Q = PQ\cos(\vartheta) =: PQ\,c$ gilt:

$$\int d^4P\, f\Big(P\,,\ \vec{P}\,\vec{Q}\ \Big) \;=\; \int_0^\infty dPP^3 \int d\Omega\, f \;=\; \Omega_4 \int_0^\infty dPP^3\ \langle\, f\,\rangle \quad . \tag{A.6}$$

Die Winkelmittelung kann nun teilweise ausgeführt werden:

$$\langle\, f\,\rangle := \frac{1}{\Omega_4}\int d\Omega\, f\,(\,P\,,\ PQc\,) \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\vartheta\ s^2\, f\,(\,P\,,\ PQc\,) \quad . \tag{A.7}$$

Hierin steht natürlich s für $\sin(\vartheta)$.

Im Text interessieren folgende Spezialfälle von (A.7):

$$\langle\, 1\,\rangle = 1 \qquad , \qquad \langle\, \vec{p}^{\,2}\,\rangle \;=\; P^2 \langle\, 1 - c^2\,\rangle \;=\; \frac{3}{4}\,P^2 \quad , \tag{A.8}$$

$$\left\langle \frac{1}{a-c}\right\rangle \;=\; 2\left(a - \sqrt{a^2-1}\right) \qquad (\,a^2 \geqslant 1\,) \quad , \tag{A.9}$$

$$\left\langle\ \frac{1}{a^2-s^2}\ \right\rangle \;=\; 2\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-1}} - 1\right) \qquad (\,a^2 \geqslant 1\,) \quad , \tag{A.10}$$

$$\left\langle\ \frac{1}{2\,s}\ln\left(\frac{a+s}{a-s}\right)\ \right\rangle \;=\; 2\left(a - \sqrt{a^2-1}\right) \qquad (\,a^2 \geqslant 1\,) \quad , \tag{A.11}$$

Die ϑ–Integrale für (A.9) und (A.10) gelingen mittels Bronstein. (A.11) läßt sich aus (A.10) herleiten. Die beiden Seiten von (A.10) sind nämlich (negative) Ableitungen der (A.11)–Seiten nach a. Daß beim Aufleiten von (A.10) bezüglich a keine Konstante entsteht, zeigt (A.11) im limes $a \to \infty$.

Das folgende Mittel über zwei Logarithmen läßt sich leider nicht voll ausintegrieren aber für Gebrauch im Anhang D geeignet formulieren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(a,b) \;&:=\; \left\langle\ \frac{1}{s^2}\ln\left(\frac{a+s}{a-s}\right)\ \ln\left(\frac{b+s}{b-s}\right)\ \right\rangle \\
&=\; 8\int_0^{(a-\sqrt{a^2-1})\,(b-\sqrt{b^2-1})} dx\,\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1+x}\right) \qquad (\,a^2,\, b^2 \geqslant 1\,)\ .
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Die auf (A.12) führende Integrierkunst verdient Detail. Ersichtlich geht $\mathcal{J}(a,b)$ mit $a \to \infty$ oder $b \to \infty$ gegen Null. Auch die Ableitung von $\mathcal{J}$ nach a hat diese Eigenschaft. Insbesondere wird

$$\partial_a\,\mathcal{J}(a,b) \;=\; \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\vartheta\,\frac{-2\,s}{a^2-s^2}\ln\left(\frac{b+s}{b-s}\right) \;\longrightarrow\; 0 \qquad (\,b\to\infty\,)\ , \tag{A.13}$$

so benötigt beim Aufleiten von

$$\begin{aligned}
\partial_a\partial_b\,\mathcal{J}(a,b) \;&=\; \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\vartheta\,\frac{-2\,s}{a^2-s^2}\,\frac{-2\,s}{b^2-s^2} \\
&=\; \frac{4}{b^2-a^2}\left\langle \frac{1}{a^2-s^2} - \frac{1}{b^2-s^2}\right\rangle \\
&=\; \frac{8}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{b}{\sqrt{b^2-1}}\right)
\end{aligned} \tag{A.14}$$

bezüglich b:

$$\partial_a \mathcal{J}(a,b) \;=\; \frac{4}{\sqrt{a^2-1}}\,\ln\left(\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{a^2-1}-\sqrt{b^2-1}}\cdot\frac{a-b}{a+b}\right)\;. \qquad \text{(A . 15)}$$

Bei Aufleiten von (A . 15) bezüglich a bleibt zunächst

$$\mathcal{J}(a,b) = 4\int_a^\infty dx\,\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{b^2-1}}\cdot\frac{x+b}{x-b}\right) \qquad \text{(A . 16)}$$

stehen. Es ist erstaunlich, wie sich dieses Integral vereinfachen läßt. Wir substituieren $x = \mathrm{ch}(t)$ $\left(t = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),\; dx = dt\,\mathrm{sh}(t)\right)$ und setzen $b = \mathrm{ch}(u)$. Das gibt

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(a,b) \;&=\; 4\int_{\ln(a+\sqrt{a^2-1})}^\infty dt\,\ln\left(\frac{\mathrm{ch}(t)+\mathrm{ch}(u)}{\mathrm{ch}(t)-\mathrm{ch}(u)}\cdot\frac{\mathrm{sh}(t)-\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{sh}(t)+\mathrm{sh}(u)}\right)\\
&=\; 8\int_{\ln(a+\sqrt{a^2-1})}^\infty dt\,\ln\left(\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{t+u}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{t+u}{2}\right)}\right)\\
&=\; 8\int_{u+\ln(a+\sqrt{a^2-1})}^\infty dt\,\ln\left(\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\\
&=\; 8\int_{\ln(b+\sqrt{b^2-1})+\ln(a+\sqrt{a^2-1})}^\infty dt\,\ln\left(\frac{1+e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)\;, \qquad \text{(A . 17)}
\end{aligned}$$

wobei $u = b+\sqrt{b^2-1}$ bedacht wurde. Es ist übrigens $a+\sqrt{a^2-1} = 1/(a-\sqrt{a^2-1})$ (für b entsprechend). Substitution $e^{-t} = x$ liefert nun das in (A . 12) angegebene Resultat.

B $\quad \chi(Q^2)$: Auswertung

Hier werden für § 2.4 zwei Terme der Funktion $\chi(Q^2) = \chi(0)+\chi_1(Q^2)+\chi_2(Q^2)$ untersucht, nämlich der zweite und der dritte. Das Argument Q^2 liegt im Endlichen ($Q^2 \ll \Lambda^2$). Unter diesen beiden Beiträgen ist (2.28), d.h.

$$\chi_1(Q^2) \;=\; \int_P w_0(P^2)\left(\frac{1}{(\vec{P}-\vec{Q})^2}-\frac{1}{P^2}\right) \qquad \text{(B . 1)}$$

ein rundum angenehmes Integral. Nach Blick in Anhang A ziehen wir die 4D Winkelmittelung $\langle\;\rangle$ nach rechts und sehen alsbald, daß für w_0 die klein–P^2–Version (2.44), nämlich $w_0(P^2) = \frac{1}{16\pi^2}\left(\mathrm{LN}-\ln(P^2)\right) \,+\, \mathcal{O}(P^2/\Lambda^2)$, ausreicht:

$$\begin{aligned}
\chi_1(Q^2) \;&=\; \frac{1}{16\pi^4}\,\Omega_4\int_0^\infty dP\;P^3\,w_0(P^2)\left(\left\langle\frac{1}{(\vec{P}-\vec{Q})^2}\right\rangle-\frac{1}{P^2}\right)\\
\left\langle\frac{1}{(\vec{P}-\vec{Q})^2}\right\rangle \;&=\; \left\langle\frac{1}{P^2+Q^2-2PQ\cos(\vartheta)}\right\rangle \;=\; \frac{1}{2PQ}\left\langle\frac{1}{a-c}\right\rangle\\
&=\; \frac{a-\sqrt{a^2-1}}{PQ} \qquad \left(a := \tfrac{P^2+Q^2}{2PQ}\;\text{ und }\; c := \cos(\vartheta)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_1(Q^2) &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty dP\; P^3\, w_0(P^2)\left(\frac{P^2+Q^2-|P^2-Q^2|}{2P^2Q^2} - \frac{1}{P^2}\right) && \text{(B.2)}\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty dP\; P^3\, w_0(P^2)\left(\frac{1}{Q^2}-\frac{1}{P^2}\right)\theta\left(Q^2-P^2\right)\\
&= \left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2\int_0^{Q^2} dr\;\left(\frac{r}{Q^2}-1\right)\left(\mathrm{LN}-\ln(r)\right)\\
\chi_1(Q^2) &= \frac{2}{(32\pi^2)^2}\left(Q^2\ln\left(Q^2\right) \;-\; Q^2\left[\mathrm{LN}+\frac{3}{2}\right]\right) \quad . && \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

Es war die Stufenfunktion in der drittletzten Zeile, welche P^2 bei $P^2 < Q^2 \ll \Lambda^2$ festhält. In der dritten Zeile haben wir die Weisheit (A.9) aus Anhang A geholt. (B.3) steht als (2.29) wieder im Haupttext.

Dem Term

$$\chi_2(Q^2) = \int_P w_0(P^2)\left(\frac{A}{P^2+\Lambda^2}-\frac{B}{P^2+\Gamma^2} \;-\; \text{dito}_{P\,\to\,\vec{P}-\vec{Q}}\right) \tag{B.4}$$

wurde schon im Text unter (2.30) Übles nachgesagt. Bald wird zu sehen sein, daß die runde Klammer, das Gewicht an $w_0(P^2)$ also, erst bei Impulsen $P^2 \sim \Lambda^2$ abzunehmen beginnt. Nichtsdestotrotz kann die Winkelmittelung herein gezogen und (A.9) benutzt werden. Wir substituieren $P^2 = r$, schreiben

$$\chi_2(Q^2) = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty dr\; r\, w_0(r)\Big(\,A\,\ell_\Lambda - B\,\ell_\Gamma\,\Big) \tag{B.5}$$

und haben

$$\begin{aligned}
\ell_\Lambda &= \frac{1}{r+\Lambda^2} - \left\langle\frac{1}{r+Q^2+\Lambda^2-2\sqrt{r}\,Qc}\right\rangle\\
&= \frac{1}{r+\Lambda^2} - \frac{r+\Lambda^2+Q^2-\sqrt{\left(r+\Lambda^2+Q^2\right)^2-4rQ^2}}{2\,r\,Q^2} \quad . && \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

In ℓ_Λ gibt es den kleinen Parameter $Q^2 \ll r \sim \Lambda^2$. Nach etwas mühseliger Entwicklung (man nutze $(a-\sqrt{\quad}) = (a^2-\sqrt{\quad}^{\,2})\,/\,(a+\sqrt{\quad})$ aus) ergibt sich

$$\ell_\Lambda = Q^2\,\frac{\Lambda^2}{(r+\Lambda^2)^3}\left(1 \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)\right) \quad . \tag{B.7}$$

In der $r \sim \Lambda^2$–Region hat $w_0(r)$ nach (2.50) die Größenordnung 1. Es ist mehr eine Art Zwischenergebnis, wenn wir nun

$$\chi_2(Q^2) \;=\; \frac{2}{(32\pi^2)^2}\,c_2\,Q^2 \;+\; \mathcal{O}\left(\frac{Q^4}{\Lambda^2}\right) \tag{B.8}$$

schreiben und den Koeffizienten c_2 als Integral stehen lassen:

$$c_2 \;=\; 2\,\frac{\Gamma^2\Lambda^2}{\Gamma^2-\Lambda^2}\int_0^\infty dr\;\left[16\pi^2\,w_0(r)\right]\left(\frac{r}{(r+\Lambda^2)^3}-\frac{r}{(r+\Gamma^2)^3}\right) \;=\; \mathcal{O}(1) \quad . \tag{B.9}$$

Jenes grobe $\mathcal{O}(1)$ rechts in (B.9) folgt, wenn man die eckige Klammer $= 1$ setzt. Strenge Auswertung des Integrals erscheint aussichtslos. Mit (B.8) und (B.9) haben wir jedenfalls die Behauptungen in (2.31) beieinander.

C c_T : Asymptotik bis g^2

Hier wird ein mehr technisches Detail zu § 3.2 nachgetragen, nämlich die Auswertung des Beitrags c_T zum einfachen thermischen Loop b_T . Dieser Anhang mausert sich alsbald zu einem Lehrstückchen in Sachen asymptotische Entwicklung.

Ausgangspunkt ist der Ausdruck (3.24) , d.h.

$$c_T = \sum_P^{\text{ohne}} \left[\frac{1}{m^2+P^2} - \frac{1}{P^2} \right] = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp\, p^2 \left(\frac{n\left(\sqrt{m^2+p^2}\right)}{\sqrt{m^2+p^2}} - \frac{n(p)}{p} \right) \qquad (\text{C}.1)$$

aus dem Haupttext. Man male eine p-Halbachse und bringe die Marken m und T darauf an. In der Region T (Breite $\sim T$) hat der Integrand die Größenordnung m^2/T (nicht faul sein : $p = T$ setzen und ein wenig entwickeln), und der Integralbeitrag ist $\sim m^2$. Von der Region um m kommt jedoch ein Integralbeitrag $\sim T{*}(\text{Reichweite}\, m)$. In diesem *soft*–Bereich kann die Bose–Funktion durch T/Argument genähert werden. Also spalten wir versuchsweise[14] wie folgt auf,

$$c_T = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp\, p^2 \left(\frac{T}{m^2+p^2} - \frac{T}{p^2} \right) + \delta c_T = -\frac{mT}{4\pi} + \delta c_T \quad , \qquad (\text{C}.2)$$

freuen uns, daß der führende Term der c_T–Asymptotik so einfach war, und stürzen uns auf den Rest

$$\delta c_T = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp\, p^2 \left(\frac{n\left(\sqrt{m^2+p^2}\right)}{\sqrt{m^2+p^2}} - \frac{n(p)}{p} - \frac{T}{m^2+p^2} + \frac{T}{p^2} \right) \quad . \qquad (\text{C}.3)$$

Dies lesen wir als drei Integrale, weil die beiden letzten Terme einander brauchen, um Konvergenz abzusichern. Im ersten Integral substituieren wir $\sqrt{m^2+p^2} = x$ (x von m nach ∞). Im zweiten benennen wir nur p in x um (x von 0 bis ∞). Auch mit den beiden Anteilen des dritten Integrals möchten wir gern dieserart verschieden verfahren, weil sie offensichtlich je einem der ersten zugeordnet sind. Stichwort, obere Grenze kontrollieren :

$$\begin{aligned} \int_0^N dp \left(T - \frac{T\, p^2}{m^2+p^2} \right) &= \int_0^N dx\, T - \int_m^{\sqrt{N^2+m^2}} dx\, T\, \frac{\sqrt{x^2-p^2}}{x} \\ &= \int_0^m dx\, T + \int_m^\infty dx \left(T - T\, \frac{\sqrt{x^2-p^2}}{x} \right) \quad , \qquad (\text{C}.4) \end{aligned}$$

denn die Differenz in den oberen Grenzen (mittlerer Ausdruck) ist wegen $\sqrt{N^2+m^2} = N + \mathcal{O}(m^2/N)$ unerheblich. Die gewünschte Zuordung ist nun möglich und liefert

$$\delta c_T = \frac{1}{2\pi^2} \left[\int_m^\infty dx \left(\sqrt{x^2-m^2} - x \right) \left(n(x) - \frac{T}{x} \right) - \int_0^m dx\, x \left(n(x) - \frac{T}{x} \right) \right] \quad . \qquad (\text{C}.5)$$

[14] Es ist typisch für die Mühen um asymptotische Entwicklungen, daß man zu probieren hat, zu spielen, und mit Konsistenzannahmen zu arbeiten. Gescheit abspalten ist ein gutes Stichwort. Es geht nicht „von selber“. Das Stricken von Begleitphilosophie ist die Kunst.

Nach Skalierung $x \to mx$ und mit dem kleinem Parameter $\beta m =: \sigma$,

$$\delta c_T = \frac{m^2}{2\pi^2} \left[\int_1^\infty dx \left(\sqrt{x^2-1} - x \right) \Upsilon - \int_0^1 dx \, x \Upsilon \right] \quad , \quad \Upsilon := \frac{1}{e^{\sigma x}-1} - \frac{1}{\sigma x} \quad , \qquad (\mathrm{C}\,.6)$$

wird deutlich, worauf es jetzt ankommt. Die noch einzubeziehende Ordnung $g^2 \sim m^2$ ist erreicht, und in der eckigen Klammer ist alles mitzunehmen, was unter $\sigma \to 0$ endlich bleibt oder anwächst. Im ersten Integral verbirgt sich ein $\ln(\sigma)$, herrührend von großen x. Um dies zu sehen, helfen Abspaltungen von groß–x-Asymptotik : erstens $\sqrt{x^2-1} - x = -1/(2x) + \left[\sqrt{x^2-1} - x + 1/(2x) \right]$, und zweitens

$$\Upsilon = \Upsilon_0 + \Upsilon_1 \quad \text{mit} \quad \Upsilon_0 = \frac{-1}{2+\sigma x} \quad \text{und} \quad \Upsilon_1 = \frac{1}{e^{\sigma x}-1} - \frac{2}{\sigma x(2+\sigma x)} \quad . \qquad (\mathrm{C}\,.7)$$

Υ_0 kontrolliert große x am schwächsten. Zu $\sigma \to 0$ geht Υ_0 gegen $-1/2$, aber Υ_1 gegen Null. δc_T kann nun wie folgt zerlegt werden :

$$\begin{aligned} \delta c_T &= \frac{m^2}{2\pi^2} \Big[J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \Big] \qquad \text{mit} && (\mathrm{C}\,.8) \\ J_1 &= -\int_1^\infty dx \, \frac{1}{2x} \Upsilon_0 \quad , \quad J_2 = \int_1^\infty dx \, \left(\sqrt{x^2-1} - x + \frac{1}{2x} \right) \Upsilon_0 \quad , && \\ J_3 &= \int_1^\infty dx \, \left(\sqrt{x^2-1} - x \right) \Upsilon_1 \quad , \quad J_4 = -\int_0^1 dx \, x \, \Upsilon \quad . && (\mathrm{C}\,.9) \end{aligned}$$

J_3 ist ein unangenehmer Geselle, den wir uns als letzten vorknöpfen. In J_1 ist $\ln(\sigma)$ das Interessante, während die anderen drei den Limes $\sigma \to 0$ aushalten werden. In J_2 und J_4 ersetzt dieser Limes Υ_0 bzw. Υ durch $-1/2$. Asymptotik–Kunst beendet, Integrieren können die Leute schon eher :

$$J_1 = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{\sigma}{2}\right) \quad , \quad J_2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln(2) \quad , \quad J_4 = \frac{1}{4} \quad . \qquad (\mathrm{C}\,.10)$$

Zu J_3 wollen wir zuerst $\sigma \to 0$ ausführen, wobei die Skalierung $x \to x/\sigma$ hilfreich ist :

$$J_3 = \frac{1}{\sigma} \int_\sigma^\infty dx \, \left(\sqrt{\frac{x^2}{\sigma^2} - 1} - \frac{x}{\sigma} \right) \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{2x + x^2} \right) \quad . \qquad (\mathrm{C}\,.11)$$

Man sieht nun, daß die erste Klammer schlicht in $-\sigma/(2x)$ übergeht. Die untere Grenze kann getrost auf Null geschoben werden[15], und wir haben damit

$$J_3 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dx \, \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{2x+x^2} \right) \quad = \quad -\frac{1}{2} \, I(0) \quad , \qquad (\mathrm{C}\,.12)$$

wobei der rechte Ausdruck darauf verweist, daß das Integral im Limes $s \to +0$ aus

$$I(s) = \int_0^\infty dx \, \left(\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} - \frac{2\, x^{s-2}}{2+x} \right) \qquad (\mathrm{C}\,.13)$$

[15]Interessieren weitere Terme der Asymptotik, so ist natürlich die Differenz zu addieren und zu untersuchen.

erhalten werden kann. Es gibt einen schönen Trick, um mit $I(s)$ in $0 < s < 1$ fertig zu werden. Wir subtrahieren und addieren nämlich in der Klammer den Term x^{s-2}, so daß

$$I(s) = \int_0^\infty dx \left(\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} - x^{s-2} \right) + \int_0^\infty dx \, \frac{x^{s-1}}{2+x} \tag{C.14}$$

wird. Generell (s beliebig reell) ist übrigens statt x^{s-2} d i e Linearkombination aus Potenzen (incl. hoch Null) von $1/x$ einzusetzen, welche das Integral an beiden Grenzen konvergent hält. Mittels (H.36) bekommt (C.14) die Gestalt

$$I(s) \;=\; \zeta(s)\,\Gamma(s) \;+\; 2^{s-1}\,\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) \quad . \tag{C.15}$$

Der limes $s \to +0$ ist im Anhang H durchgeführt: (H.45). Das Resultat ist

$$I(0) = \frac{1}{2}\,[\,\gamma - \ln(\pi)\,] \quad \text{und somit} \quad J_3 = -\frac{1}{4}\gamma + \frac{1}{4}\ln(\pi) \quad . \tag{C.16}$$

γ ist die Euler–Konstante.

Das wars. Die vier J–Resultate bilden δc_T, und dieses komplettiert (C.2):

$$c_T \;=\; -\frac{m\,T}{4\,\pi} + \frac{m^2}{16\,\pi^2} \left[1 - 2\gamma + 2\ln\left(\frac{4\,\pi\,T}{m}\right) \right] \quad . \tag{C.17}$$

Im Haupttext wird (C.17) als (3.25) übernommen. Das Rad wurde hier zwar auf eigenem Mist neu erfunden. Aber bis zum g^2–Term im thermischen Loop waren auch schon andere Leute vorgedrungen [16].

D $\quad I_{TT} = \sum_Q w_T\, w_T$: Auswertung

Der Abschnitt 4.2 wird hier mit Detail versehen. Wir beginnen mit dem Anteil

$$\boldsymbol{I^{\int}{}_{TT}} \;,$$

in welchem $\sum_Q$ durch $\int_Q = (2\pi)^{-4} \int dq_0 \int d^3q$ zu ersetzen ist. w_T steht in (4.16). Das Argument $Q_0 = \omega_n^Q$ degeneriert unter $\int_Q$ zur Integrationsvariablen q_0, und q ist der Betrag des Dreier–Impulses. Der Ausgangspunkt lautet also

$$I^{\int}{}_{TT} = \frac{1}{16\pi^4} \left(\frac{1}{8\pi^2}\right)^2 \int dq_0 \int d^3q \, \frac{1}{q^2} \int_0^\infty dp\, n(p) \int_0^\infty dk\, n(k)\; \mathcal{L}(q_0, q, p)\; \mathcal{L}(q_0, q, k) \tag{D.1}$$

mit

$$\mathcal{L}(q_0, q, k) = \mathcal{A}_q\, \mathcal{A}_k\; \mathcal{V}_\tau \int_0^N dv \;\; \frac{1}{v + \tau + (q_0 + ik)^2 + (k-q)^2} \quad . \tag{D.2}$$

$N \to \infty$ ist erst nach Anwendung des Operators $\mathcal{V}_\tau$ möglich. Unter Weglassen von $\mathcal{O}(1/N)$–Termen entsteht

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_0, q, k) \;\; &= \;\; \mathcal{A}_q\, \mathcal{A}_k \left[\ln\left(\frac{N}{(q_0 + ik)^2 + (k-q)^2} \right) \right. \\ &\left. -A\;\ln\left(\frac{N}{\Lambda^2 + (q_0 + ik)^2 + (k-q)^2} \right) + B\;\ln\left(\frac{N}{\Gamma^2 + (q_0 + ik)^2 + (k-q)^2} \right) \right] \end{aligned} \tag{D.3}$$

Man sieht nun, daß hier die $\ln(N)$'s heraus fallen, nämlich wegen $A - B = 1$, s. (1.2). Nach Ausführen der beiden Antisymmetrisierungen werden die Logarithmus–Argumente reell. Der regulatorfreie ln vereinfacht sich dabei zu

$$\ln\left(\frac{q_0^2 + q^2 + 4kq + 4k^2}{q_0^2 + q^2 - 4kq + 4k^2}\right) \;=:\; \ln(\qquad) \;, \tag{D.4}$$

während A– und B–Term mit Blick auf das spätere Weglassen von $\mathcal{O}(1/\Lambda^2)$–Termen wie folgt vereinfacht werden kann:

$$\mathcal{L}(q_0, q, k) \;=\; \ln(\qquad) - A\,\frac{8kq}{\Lambda^2 + q_0^2 + q^2} + B\,\frac{8kq}{\Gamma^2 + q_0^2 + q^2} \quad . \tag{D.5}$$

Dies setzen wir in (D . 1) ein, bezeichnen $q_0^2 + q^2$ mit r^2, denken 4D-euklidisch und erinnern an (A . 4) mit nun $d^4x = dq_0\, d^3q$, sowie $q = r\sin(\vartheta) =: rs$. Damit läßt sich $I^{\int}{}_{TT}$ als p–k–Integral über eine Winkelmittelung begreifen:

$$I^{\int}{}_{TT} \;=\; \left(\frac{1}{8\pi^2}\right)^2 \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty dp\, n(p) \int_0^\infty dk\, n(k)\;\; \mathcal{W} \tag{D.6}$$

mit

$$\mathcal{W} = \frac{\Omega_4}{\pi^2}\int_0^\infty dr\; r \left\langle\; \frac{1}{s^2}\;[\;\ln_p - 8prsC(r)\,]\;\;[\;\ln_k - 8krsC(r)\,]\;\right\rangle \;, \tag{D.7}$$

wobei

$$\ln_p := \ln\left(\frac{r^2 + 4p^2 + 4prs}{r^2 + 4p^2 - 4prs}\right) \quad \text{und} \quad C(r) := \frac{A}{\Lambda^2 + r^2} - \frac{B}{\Gamma^2 + r^2} \quad (\text{kurz } C) \;\; . \tag{D.8}$$

(D . 7) spalten wir nun per $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ auf in einen „interessanten“ Term $\mathcal{W}_1$, welcher die Pauli–Villars–Regulatoren enthält, und in $\mathcal{W}_2$ mit dem restlichen Produkt zweier Logarithmen. Dessen Groß–r–Asymptotik wird (für Konvergenz sorgend) in $\mathcal{W}_2$ subtrahiert und in $\mathcal{W}_1$ addiert:

$$\mathcal{W}_1 \;=\; 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty dr\; r\left(\frac{64pk}{r^2} + 64pkr^2C^2 - 8prC\left\langle\frac{1}{s}\ln_k\right\rangle - 8krC\left\langle\frac{1}{s}\ln_p\right\rangle\right) \;, \tag{D.9}$$

$$\mathcal{W}_2 \;=\; 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty dr\; r\left(\left\langle\frac{1}{s^2}\ln_p \ln_k\right\rangle - \frac{64pk}{r^2}\right) \quad . \tag{D.10}$$

Die Kontrolle der unteren r–Grenzen ist nur erforderlich, solange $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ separat behandelt werden, Bei den Mittelungen in (D . 9) kommen wir mittels (A . 11) weiter und erhalten

$$\left\langle\frac{1}{s}\ln_k\right\rangle \;=\; \frac{1}{kr}\left(r^2 + 4k^2 - |r^2 - 4k^2|\right) \;\;\to\;\; \frac{8k}{r} \quad . \tag{D.11}$$

Die rechts stehende Vereinfachung ist erlaubt, weil r–Werte in der Größenordnung von k oder p ersichtlich nur in $\mathcal{O}(1/\Lambda^2)$ bei $\mathcal{W}_1$ zu Buche schlagen. Nach Substitution $r^2 = t$ entsteht

$$\mathcal{W}_1 = 64\,p\,k\int_\varepsilon^\infty dt\;\left(\frac{1}{t} + t\,C^2 - 2\,C\right) \;,\;\; C = \frac{A}{t + \Lambda^2} - \frac{B}{t + \Gamma^2} \quad . \tag{D.12}$$

Die t-Integrationen sind elementar. Resultat:

$$\mathcal{W}_1 = 64\,p\,k\,\Big(-\ln(\varepsilon) - 1 + \mathrm{LN} \Big) + \mathcal{O}(\Lambda^{-2}) \tag{D.13}$$

mit LN siehe (2.45).

Es bleibt $\mathcal{W}_2$ auszuwerten. Das Winkelmittel in (D.10) haben wir (a, b geeignet wählend) in (A.12) stehen. (D.10) erhält damit die Gestalt

$$\mathcal{W}_2 = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{N}} dr\; r\;\left[\mathcal{J}\left(a = \frac{r^2+4p^2}{4pr}\;,\; b = \frac{r^2+4k^2)}{4kr} \right) - \frac{64pk}{r^2} \right] \Bigg|_{N\to\infty} \;. \tag{D.14}$$

Für die obere x–Integrationsgrenze ($=:$ upper, $r^2 =: y$) in (A.12) ergibt sich

$$(a-\sqrt{a^2-1}\,)\,(b-\sqrt{b^2-1}\,) = \frac{(y+4p^2-|y-4p^2|)\,(y+4k^2-|y-4k^2|)}{16\,p\,k\,y} \quad , \tag{D.15}$$

so daß $\mathcal{J} = 8\int_0^{\mathrm{upper}} dx\;\frac{1}{x}\ln(\frac{1+x}{1-x})$ entsteht. Das Doppelintegral über r und x sieht nur im ersten Moment übel aus. Via Vertauschung dieser Integrale sird sich $\mathcal{W}_2$ alsbald exakt auswerten lassen. Sei oBdA $k<p$. Nach Substitution $r^2=y$ entsteht dann

$$\mathcal{W}_2 = \int_\varepsilon^N dy\left[\mathcal{J} - \frac{64pk}{y} \right] = \int_\varepsilon^{4k^2} dy\,\mathcal{J} + \int_{4k^2}^{4p^2} dy\,\mathcal{J} + \int_{4p^2}^{N} dy\,\mathcal{J} - 4pk\int_\varepsilon^N dy\,\frac{1}{y} \;. \tag{D.16}$$

Unter dem ersten Integral wird upper zu $y/(4pk)$, das zweite hat upper$=k/p$, und im dritten ist upper$=64pk/y$. Integrale–Vertauschung hat nichts mit dem Integranden zu tun:

$$\int_\varepsilon^{4k^2} dy\int_0^{\frac{y}{4pk}} dx = \int_0^{\frac{k}{p}} dx\int_{4pkx}^{4k^2} dy \quad , \quad \int_{4p^2}^{N} dy\int_0^{\frac{4pk}{y}} dx = \int_0^{\frac{4pk}{N}} dx\int_{4p^2}^{N} dy + \int_{\frac{4pk}{N}}^{\frac{k}{p}} dx\int_{4p^2}^{\frac{4pk}{x}} dy \tag{D.17}$$

Die Vertauschung im zweiten Integral in (D.16) ist trivial. Da $\mathcal{J}$ nicht von y abhängt, sind alle y–Integrale bequem ausführbar. N noch im Endlichen belassend entsteht zunächst

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2 \;\;=\;\; & -64pk\int_0^{\frac{k}{p}} dx\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 8N\int_0^{\frac{4pk}{N}} dx\;\frac{1}{x}\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ & + 64pk\int_{\frac{4pk}{N}}^{\frac{k}{p}} dx\left[\frac{1}{x^2}\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{2}{x} \right] + 64pk\int_{\frac{4pk}{N}}^{\frac{k}{p}} dx\;\frac{2}{x} - 64pk\ln\left(\frac{N}{\varepsilon}\right) \;. \end{aligned} \tag{D.18}$$

Nun $N\to\infty$ auszuführen ist vergnüglich: der zweite Term wird zu $64\,p\,k$ und der dritte bekommt untere Grenze Null. Mittels

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{2}{x} - \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \;=\; \partial_x\left[-\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2\ln\left(1-x^2\right) \right] \tag{D.19}$$

kommen wir an bei

$$\mathcal{W}_2 = -64\,p\,k\left[\ln(\varepsilon) + 2 - \ln(2) - \frac{(p+k)^2}{2pk}\ln(p+k) + \frac{(p-k)^2}{2pk}\ln(p-k) \right] \;. \tag{D.20}$$

An das Argument von Logarithmen sind übrigens stets Betragsstriche hinzuzudenken: $\ln(\ldots) := \ln(|\ldots|)$. (D.20) zeigt schön, daß die anfängliche Unterstellung $p<k$ keine

Einschränkung darstellte. Nach Blick auf (D . 13) folgt für die Summe $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$, daß

$$\mathcal{W} = 64\, p\, k \left[1 - 2\ln(2) + \mathrm{LN} - \frac{(p+k)^2}{2pk} \ln(p+k) + \frac{(p-k)^2}{2pk} \ln(p-k) \right] \quad . \qquad (\mathrm{D}\,.\,21)$$

Der Integrand von (D . 6) ist hiermit explizit geworden. Nach Skalierung $p \to Tp$ und $k \to Tk$ folgt

$$I^{\int}{}_{TT} = \left(\frac{1}{8\pi^2}\right)^2 \frac{4\,T^4}{\pi^2} \left([1 - 2\ln(2T) + \mathrm{LN}] \int_0^\infty dp\, \frac{p}{e^p - 1} \int_0^\infty dk\, \frac{k}{e^k - 1} - \frac{1}{2}\,\mathcal{U} \right) \; . \quad (\mathrm{D}\,.\,22)$$

Obiges Doppelintegral wird mit (G . 9) zu $\pi^4/36$. Auch $\mathcal{U}$ ist ein Doppelintegral. Es wird auch später noch benötigt:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int_0^\infty dp\; \frac{1}{e^p - 1} \int_0^\infty dk\; \frac{1}{e^k - 1} \left[(p+k)^2 \ln(p+k) - (p-k)^2 \ln(p-k) \right] \\ &= \int_0^\infty dp\, \frac{1}{e^p - 1} \left[\left(\int_0^\infty - \int_0^p \right) dk\, \frac{k^2 \ln(k)}{e^{k-p} - 1} - \left(\int_0^\infty + \int_{-p}^0 \right) dk\, \frac{k^2 \ln(k)}{e^{k+p} - 1} \right] \; . \quad (\mathrm{D}\,.\,23) \end{aligned}$$

In der eckigen Klammer kombinieren zweites und viertes Integral (in diesem: $k \to -k$) schön zu $\int_0^p dk\; k^2 \ln(k) = p^3 \ln(p)/3 - p^3/9$, so daß

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \;&=\; \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \quad \text{mit} \quad \mathcal{U}_1 = \int_0^\infty dk\; k^2 \ln(k) \int_0^\infty dp\, \frac{1}{e^p - 1} \left(\frac{1}{e^{k-p} - 1} - \frac{1}{e^{k+p} - 1} \right) \\ &\qquad\qquad \text{und} \quad \mathcal{U}_2 = \frac{1}{3} \int_0^\infty dp\, \frac{p^3 \ln(p)}{e^p - 1} - \frac{1}{9} \int_0^\infty dp\, \frac{p^3}{e^p - 1} \quad . \qquad (\mathrm{D}\,.\,24) \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung führt auf

$$\mathcal{U}_1 = \int_0^\infty dk\, \frac{k^2 \ln(k)}{e^k - 1} \int_0^\infty dp \left[\frac{e^k - 1}{e^{p+k} - 1} + \frac{1}{e^{p+k} - 1} - \frac{1}{e^{p-k} - 1} \right] \quad . \qquad (\mathrm{D}\,.\,25)$$

Es folgen p–Integration, eine partielle Integration (im Nenner–freien Term) und die Addition $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$:

$$\mathcal{U} \;=\; \frac{5}{3} \int_0^\infty dk\, \frac{k^3 \ln(k)}{e^k - 1} - \frac{2}{9} \int_0^\infty dk\, \frac{k^3}{e^k - 1} \;=\; \frac{\pi^4}{9}\, [\, \ln(2\pi) - z_3\,] - \frac{2}{9}\, \frac{\pi^4}{15} \quad . \qquad (\mathrm{D}\,.\,26)$$

Rechts hatten wir das erste Integral aus (H . 35) entnommen, während das zweite bereits in (G . 9) steht. Wir bestücken (D . 22) und erhalten

$$I^{\int}{}_{TT} = \left(\frac{1}{4\pi}\, \frac{T^2}{6} \right)^2 \left\{ \Big[1 - 2\ln(2T) + \mathrm{LN} \Big] - 2 \Big[\ln(2\pi) - z_3 - \frac{2}{15} \Big] \right\} \quad , \qquad (\mathrm{D}\,.\,27)$$

d.h. das in (4.19) angegebene Resultat.

Wie in (4.18) notiert, hat I_{TT} noch seinen zweiten Anteil

$$\boldsymbol{I^{\mathrm{ohne}}_{TT}} \; .$$

Wie sich bald zeigt, benötigt er keine Regularisierung, weil seine Integrale „von alleine" endlich bleiben. Diesem Umstand vorgreifend, darf in w_T, siehe (4.16), der Operator $\mathcal{V}_t$ entfallen und ebenso t im dort nachfolgenden Nenner. Ausgangspunkt ist somit

$$I_{TT}^{\text{ohne}} = \sum_Q^{\text{ohne}} \frac{1}{8\pi^2 q} \int_0^\infty dp\, n(p) \int_0^\infty du \left[\mathcal{A}_q\, \mathcal{A}_p\, \frac{1}{u-(i\omega_n^Q - p)^2 + (p-q)^2} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{1}{8\pi^2 q} \int_0^\infty dk\, n(k) \int_0^\infty dv\, \mathcal{A}_{q'}\, \mathcal{A}_k\, \frac{1}{v-(i\omega_n^Q - k)^2 + (k-q')^2} \right]_{q'=q} . \tag{D.28}$$

Daß wir hier — bei allem Respekt vor Arnold–Zhai's elegantem Verfahren [4] — bei Auswertung von (D . 28) einen alternativen Weg gehen, beruht im wesentlichen auf Eigensinn. Es muß auch „direkt" gehen. Einige Integrierkunst ist vorzuzeigen. Und am Ende wird ein unabhängiger Test gelungen sein.

Der erste Schritt zur Behandlung von (D . 28) wurde bereits mit (4.12) vorbereitet. Die dortige z–Integration kann an das Produkt der beiden Brüche herangezogen werden. Natürlich steht nun $Q_0 = \omega_n^Q$ für das P_0 in (4.12):

$$I_{TT}^{\text{ohne}} = \left(\frac{1}{8\pi^2}\right)^2 \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \int_0^\infty dp\, n(p) \int_0^\infty dk\, n(k) \int_0^\infty du \int_0^\infty dv$$
$$\left[\mathcal{A}_q\, \mathcal{A}_p\, \mathcal{A}_{q'}\, \mathcal{A}_k \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \int_{\circlearrowleft} dz\, n(z)_{\text{ignoriere Pole}} \Big(F(z) + F(-z) \Big) \right]_{q'=q} , \tag{D.29}$$

und dies gilt — wir machen die Pole explizit — mit

$$F(z)+F(-z) = \frac{1}{z-p-w_u}\,\frac{1}{z-p+w_u}\,\frac{1}{z-k-w_v}\,\frac{1}{z-k+w_v}$$
$$+ \frac{1}{z+p+w_u}\,\frac{1}{z+p-w_u}\,\frac{1}{z+k+w_v}\,\frac{1}{z+k-w_v} , \tag{D.30}$$

$$\text{wobei} \qquad w_u := \sqrt{u+(p-q)^2} \quad \text{und} \quad w_v := \sqrt{v+(k-q')^2} .$$

(D . 30) zeigt, daß wegen der voranstehenden $\mathcal{A}$–Operationen jeder der Nenner im rechten z–Halbraum Null werden kann, und erklärt die Signums

$$\sigma(x) := \text{sign}(x)\, n(|x|) \quad , \quad \sigma(-x) = -\,\sigma(x) \tag{D.31}$$

im Resultat:

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\circlearrowleft} dz\, n(z)_{\text{igno...}} \Big(F(z)+F(-z) \Big) =$$
$$\left(\frac{\sigma(p-w_u)}{2w_u}\, \frac{1}{(p-k-w_u)^2 - w_v^2} + \text{dito}_{w_u \to -w_u} \right) + \text{dito}_{\substack{k \text{ mit } p \text{ vertauscht} \\ \text{und } w_v \text{ mit } w_u}} . \tag{D.32}$$

Die soeben genannten Vertauschungen sind unter den in (D . 29) vorgespannten Operationen erlaubt (w–Vertauschung wegen „u mit v", „p mit k" und „q mit q'"), so daß das rechtsstehende zweite dito nur einen Faktor 2 beiträgt. Aus (D . 32) wird also

$$\frac{\sigma(w_u+p)}{w_u\,[\,v+(k-q')^2-(w_u+p-k)^2\,]} + \frac{\sigma(w_u-p)}{w_u\,[\,v+(k-q')^2-(w_u-p+k)^2\,]} . \tag{D.33}$$

Wir sehen, daß hiermit das Integral über v ausführbar ist. Da die Variable u nur via w_u vorkommt, empfiehlt sich die Substitution $t = \sqrt{u + (p-q)^2}$. Zwischenresultat:

$$I_{TT}^{\rm ohne} = \left(\frac{1}{8\pi^2}\right)^2 \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dq \int_0^\infty dp\, n(p) \int_0^\infty dk\, n(k) \left[\mathcal{A}_q\, \mathcal{A}_p\, \mathcal{A}_{q'}\, \mathcal{A}_k \int_{|p-q|}^\infty dt \left(-\sigma(t+p) \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot \ln\left((k-q')^2 - (t+p-k)^2\right) - \sigma(t-p) \ln\left((k-q')^2 - (t-p+k)^2\right) \right) \right]_{q'=q} . \quad \text{(D.34)}$$

Nach einigen naheliegenden Schritten entsteht

$$I_{TT}^{\rm ohne} = -2 \left(\frac{1}{8\pi^3}\right)^2 \int_0^\infty dp\, n(p) \int_0^\infty dk\, n(k)$$
$$\int_0^\infty dq \left[\int_{|p-q|-p}^{|p+q|-p} dt + \int_{|p-q|+p}^{|p+q|+p} dt \right] \sigma(t)\; \ln\left(\frac{t+q-2k}{t-q-2k}\; \frac{t-q+2k}{t+q+2k} \right) . \quad \text{(D.35)}$$

Nur das q–Integral hat keine Bosefunktion vor sich. Also versuchen wir, es mit dem t–Integral zu vertauschen. Mit etwas Malen ergibt sich, daß

$$\int_0^\infty dq \left[\quad \right] = \int_0^\infty dt \int_{t-2p}^{t+2p} dq \quad + \quad \begin{array}{l}\text{Doppelintegrale, welche ver–}\\ \text{schwinden weil der Integrand}\\ \text{in } t \text{ und in } q \text{ ungerade ist} \quad .\end{array} \quad \text{(D.36)}$$

Weil im verbliebenen Term t positiv bleibt, wird $\sigma(t)$ zu $n(t)$. Die q–Integration ist ausführbar:

$$I_{TT}^{\rm ohne} = \left(\frac{1}{4\pi^3}\right)^2 \int_0^\infty dp\, n(p) \int_0^\infty dk\, n(k) \int_0^\infty dt\, n(t) \cdot$$
$$\Big[(t+k+p) \ln(t+k+p) - (t-k+p) \ln(t-k+p) \;-\; \text{dito}_{p\to -p} \Big] . \quad \text{(D.37)}$$

Das Dreifachintegral existiert. Sein Integrand ist in den Variablen p, k, t total symmetrisch, d.h. invariant unter allen Zweier–Permutationen. Zur Erinnerung, mit „$\ln(x)$" ist stets $\ln(|x|)$ gemeint, es gilt also $\partial_x \ln(x) = 1/x$ auch für $x < 0$.

Zur weiteren Auswertung skalieren wir zuerst per $p \to Tp$, $k \to Tk$, $t \to Tt$, und unterteilen ein wenig:

$$I_{TT}^{\rm ohne} = \left(\frac{T^2}{4\pi^3}\right)^2 \int_0^\infty dp\, \frac{1}{e^p - 1}\, \mathcal{K}(p) \;\; , \;\; \mathcal{K}(p) = \int_0^\infty dk\, \frac{1}{e^k - 1}\, \mathcal{T}(p,k) \quad \text{(D.38)}$$

mit

$$\mathcal{T}(p,k) = \int_0^\infty dt\, \frac{1}{e^t - 1} \Big[(t+k+p) \ln(t+k+p)$$
$$- (t-k+p) \ln(t-k+p) - \;\text{dito}_{p\to -p} \Big]$$
$$= \int_{p+k}^\infty dt\, \frac{t \ln(t)}{e^{t-p-k} - 1} - \int_{p-k}^\infty dt\, \frac{t \ln(t)}{e^{t-p+k} - 1} - \;\text{dito}_{p\to -p}$$
$$= \int_0^\infty dt\; t \ln(t) \left(\frac{1}{e^{t-p-k} - 1} - \frac{1}{e^{t-p+k} - 1} - \;\text{dito}_{p\to -p} \right) + \mathit{Rest} . \quad \text{(D.39)}$$

Wie schön sich nun der

$$Rest \;=-\int_0^{p+k} dt\,\frac{t\,\ln(t)}{e^{t-p-k}-1}+\int_0^{p-k} dt\,\frac{t\,\ln(t)}{e^{t-p+k}-1}\;-\;\text{dito}_{p\to -p} \tag{D.40}$$

vereinfacht, indem man die beiden dito-Terme per

$$\int_0^{-a} dt\; f(t)=-\int_0^{a} dt\; f(-t) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{e^{-x}-1}=-1-\frac{1}{e^{x}-1} \tag{D.41}$$

bearbeitet, das sei des Lesers Vergnügen. Er erhält

$$Rest \;=\int_{p-k}^{p+k} dt\; t\,\ln(t)=\frac{(p+k)^2}{2}\,\ln(p+k)-\frac{(p-k)^2}{2}\,\ln(p-k)-pk \quad . \tag{D.42}$$

Es läßt sich erahnen, daß man nun das t–Integral in (D . 39) besser so stehen läßt und sich im nächsten Schritt um das k–Integral $\mathcal{K}(p)$ kümmert:

$$\mathcal{K}(p)=\mathcal{K}_1(p)-\mathcal{K}_1(-p)+\mathcal{K}_2(p) \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{K}_2(p)=\int_0^\infty dk\,\frac{Rest}{e^k-1} \tag{D.43}$$

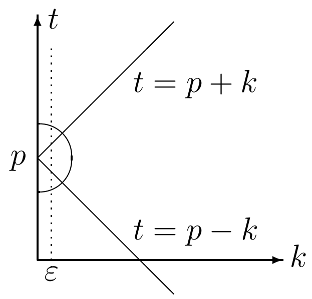
und

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1(p) \;&=\; \int_0^\infty dk\,\frac{1}{e^k-1}\int_0^\infty dt\; t\,\ln(t)\,\left(\frac{1}{e^{t-p-k}-1}-\frac{1}{e^{t-p+k}-1}\right) \\ &=\; \int_0^\infty dk\int_0^\infty dt\; t\,\ln(t)\,\frac{1}{e^{t-p}-1}\left[\frac{1}{e^{t-p-k}-1}+\frac{e^{t-p}}{e^{t-p+k}-1}+1\right] \quad ,\end{aligned} \tag{D.44}$$

wobei die zweite Zeile von (D . 44) mittels Partialbruchzerlegung entstanden ist.

Wie schön, meint nun wohl jeder im ersten Moment, das k–Integral kann an die eckige Klammer gezogen und elementar ausgewertet werden. Aber das wird falsch! Eine üble Falle steht bereit.

Nebenstehend sind die Pollinien des Integranden aufgemalt. Sie schneiden sich bei $t\!=\!p$. Wie es in der Gefahrenzone (Halbkreis) zugeht, lernt man am besten an einem einfachen Modell. Es entsteht aus $\mathcal{K}_1(p)$ indem wir $t\ln(t)$ bei $t=p$ nehmen (und weglassen), per $t\to t+p$ verschieben, die Nenner vereinfachen und vorsichtshalber den exponentiellen Abfall des Integranden bei großen k, t durch Abschneiden bei $k=a$ bzw. $t=b$ simulieren:



$$\mathcal{M}(p)=\int_\varepsilon^a dk\int_{-p}^\infty dt\,\frac{1}{k}\left[\frac{1}{t-k}-\frac{1}{t+k}\right] \;=\; \int_\varepsilon^a dk\;\left(\int_\varepsilon^p+\int_0^b\right)\,dt\;\ldots \;\; , \tag{D.45}$$

denn der Integrand $\frac{1}{k}\left[\frac{1}{t-k}-\frac{1}{t+k}\right]=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{k+t}-\frac{1}{k-t}\right]=\frac{2}{t^2-k^2}$ ist eine gerade Funktion in t und in k. Führen wir zuerst die t–Integration aus, so folgt

$$\mathcal{M}^{\text{erst } t}=-\int_\varepsilon^a dk\,\frac{1}{k}\ln\left(\frac{p+k}{p-k}\,\frac{b+k}{b-k}\right)\;\to\;-\left(\int_0^{a/p}+\int_0^{a/b}\right)\,dk\,\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)\;. \tag{D.46}$$

denn hier war $\varepsilon \to 0$ gefahrlos ausführbar. Jetzt vertauschen in wir in (D . 45) das k–Integral mit den t–Integralen und erhalten

$$\mathcal{M}^{\text{erst } k} = \left(\int_0^p + \int_0^b\right) dt\, \frac{1}{t} \left[\ln\left(\frac{a+t}{a-t}\right) - \ln\left(\frac{\varepsilon+t}{\varepsilon-t}\right) \right] \tag{D.47}$$

Ist es nicht sehr verführerisch, mit $\varepsilon \to 0$ im Kopf den zweiten ln einfach wegzulassen? Er wäre gar nicht erst entstanden, wenn wir von vornherein bei $\varepsilon = 0$ geblieben wären, mit falschem Resultat. Das ist die Falle.

Natürlich sehen wir nach, wie es richtig wird. Hinter jedem der folgenden leeren Integralzeichen denke man sich $dt \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ stehen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\text{erst } k} &= \int_0^{p/a} + \int_0^{b/a} - \int_0^{p/\varepsilon} - \int_0^{b/\varepsilon} = \int_{a/p}^{\infty} + \int_{a/b}^{\infty} - \int_{-b/\varepsilon}^{p/\varepsilon} = 2\int_0^{\infty} - \int_0^{a/p} - \int_0^{a/b} - \int_{-b/\varepsilon}^{p/\varepsilon} \\ &= \pi^2 + \mathcal{M}^{\text{erst } t} - \int_{-b/\varepsilon}^{p/\varepsilon} dt\, \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \quad \to \quad \mathcal{M}^{\text{erst } t} \quad \text{bei} \quad \varepsilon \to 0 \ . \end{aligned} \tag{D.48}$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen der oberen Zeile war die Substitution $t = 1/\tau$ beteiligt, und obiges π^2 beruht auf $2\int_0^\infty = 4\int_0^1 dt\, \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 8\int_0^1 dx\, \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \pi^2$, siehe Bronstein. **Fazit**: will man die Integrale in (D . 44) vertauschen, so **muß** zuvor das k–Integral ε–kontrolliert werden.

Weiter mit (D . 44) – aber nun mit ε–Kontrolle am k–Integral:

$$\mathcal{K}_1(p) = \int_0^\infty dt\, \frac{t\ln(t)}{e^{t-p}-1} \left[\ln\left(1-e^{t-p-\varepsilon}\right) - e^{t-p} \ln\left(1-e^{-t+p-\varepsilon}\right) \right] \ . \tag{D.49}$$

Die eckige Klammer läßt sich als

$$\Big[\quad \Big] = -(e^{t-p}-1) \ln\left(1-e^{-t+p}\, e^{-\varepsilon}\right) + t - p + \ln\left(e^{t-p-\varepsilon}-1\right) - \ln\left(e^{t-p}-e^{-\varepsilon}\right) \tag{D.50}$$

schreiben. Und jenes $e^{-\varepsilon}$ im ersten ln–Argument dürfen wir getrost 1 setzen. Das gibt

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(p) &= -\int_0^\infty dt\, t\ln(t) \ln\left(1-e^{-t+p}\right) + \int_0^\infty dt\, \frac{(t^2-tp)\ln(t)}{e^{t-p}-1} \\ &\qquad + \int_0^\infty dt\, \frac{t\ln(t)}{e^{t-p}-1} \ln\left(\frac{e^{t-p-\varepsilon}-1}{e^{t-p}-e^{-\varepsilon}}\right) \ . \end{aligned} \tag{D.51}$$

Erkennen Sie die Falle? In der zweiten Zeile ist sie präpariert: nicht jetzt schon $\varepsilon = 0$! Der dortige letzte Logarithmus wird rasch Null, sobald $t-p$ den ε–Bereich verläßt. Also kann $t\ln(t)$ als $p\ln(p)$ vor das Integral wandern und das Argument des letzten ln linearisiert werden:

$$\text{2. Zeile von (D.51)} \quad \to \quad p\ln(p) \int_{-p}^\infty dt\, \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-\varepsilon}{t+\varepsilon}\right) \quad \to \quad -\pi^2\, p\ln(p) \ . \tag{D.52}$$

Sogleich ist vor einer weiteren Falle zu warnen. In $\mathcal{K}_1(-p)$ – so in (D . 43) enthalten – tritt der Term (D . 52) **nicht** auf: der Pol bei $t = -p$ wird dann von t nicht überstrichen.

Wir blicken auf (D . 38) zurück und sind froh, endlich alle drei Bestandteile von $\mathcal{K}(p)$ zu kennen. Für $\mathcal{K}_2(p)$, siehe (D . 43) und (D . 42), steht nämlich bereits die p–integrierte Version bereit :

$$\int_0^\infty dp\, \frac{1}{e^p-1}\, \mathcal{K}_2(p) \;=\; \frac{1}{2}\mathcal{U} \;-\; \frac{\pi^4}{36} \;=\; \frac{5}{6}\int_0^\infty dt\, \frac{t^3\ln(t)}{e^t-1} - \frac{1}{9}\int_0^\infty dt\, \frac{t^3}{e^t-1} - \frac{\pi^4}{36} \;, \qquad \text{(D . 53)}$$

denn für $\mathcal{U}$, siehe (D . 23), hatten wir (D . 26) erhalten. Nach partieller Integration im ersten Term von (D . 51) und mit vetauschten Doppelintegralen schreibt sich I_{TT}^{ohne} inzwischen wie folgt :

$$\begin{aligned} I_{TT}^{\text{ohne}} \;=\; \left(\frac{T^2}{4\pi^3}\right)^2 \Bigg\{ & \int_0^\infty dt\, t^2 \left[\frac{3}{2}\ln(t) - \frac{1}{4}\right] \int_0^\infty dp\, \frac{1}{e^p-1} \left(\frac{1}{e^{t-p}-1} - \frac{1}{e^{t+p}-1}\right) \\ & - \int_0^\infty dt\, t^2 \int_0^\infty dp\, \frac{p}{e^p-1} \left(\frac{1}{e^{t-p}-1} + \frac{1}{e^{t+p}-1}\right) \\ & - \pi^2 \int_0^\infty dt\, \frac{t\ln(t)}{e^t-1} + \frac{5}{6}\int_0^\infty dt\, \frac{t^3\ln(t)}{e^t-1} - \frac{1}{9}\int_0^\infty dt\, \frac{t^3}{e^t-1} - \frac{\pi^4}{36} \Bigg\} \;. \qquad \text{(D . 54)} \end{aligned}$$

Sind wir etwa soeben blind in die bekannte Falle getappt und hätten vor Integrale–Vertauschung $\int_0^\infty dp$ durch $\int_\varepsilon^\infty dp$ ersetztn müssen ? Schreck laß nach ! Die Antwort ist *Nein* und beruht darauf, daß der mit $t \to 0$ verschwindende Zähler den Gefahrenbereich entschärft. Auch in (D . 24) hatten wir schon einmal Glück.
Die nun zu (D . 54) anstehenden Partialbruchzerlegungen sowie gelegentliche Rückvertauschung per $\int_0^\infty dt \int_t^\infty dp = \int_0^\infty dp \int_0^p dt$ seien nun des Lesers Sache. Er erhält

$$I_{TT}^{\text{ohne}} = \left(\frac{T^2}{4\pi^3}\right)^2 \left\{ \frac{5}{2}\int_0^\infty dt\, \frac{t^3\ln(t)}{e^t-1} \;-\; \frac{3}{4}\int_0^\infty dt\, \frac{t^3}{e^t-1} \;-\pi^2 \int_0^\infty dt\, \frac{t\ln(t)}{e^t-1} \;-\; \frac{\pi^4}{36} \right\} \qquad \text{(D . 55)}$$

und staunt darüber, wie doch recht einfach das Endresultat ist. Mit (G . 9) und (H . 35) geben wir ihm noch die Gestalt

$$I_{TT}^{\text{ohne}} = \left(\frac{T^2}{4\pi^3}\right)^2 \left\{ \;-\; \frac{\pi^4}{6}\, z_1 \;+\; \frac{\pi^4}{6}\, z_3 \;-\; \frac{7\,\pi^4}{90} \right\} \;, \qquad \text{(D . 56)}$$

welche als (4.20) in den *main text* übernommen wurde.

E $\quad I_{0T} = 2\sum_Q w_0\, w_T$: Auswertung

Im § 4.3 hatten wir gelernt, daß I_{0T} nur in der Differenzbildung $I_{0T} - \frac{1}{3}T^2\chi(0)$ benötigt wird und daß der χ–Term zwecks Λ^2–Kompensation dem $\int$–Anteil von I_{0T} zuzuordnen ist. Gemäß (4.24) wartet also als erstes

$$\boldsymbol{\Delta^{\int} := I^{\int}{}_{0T} - \tfrac{1}{3}T^2\chi(0) \;=\; 2\int_Q w_0(Q^2)\;\left[\, w_T(Q^2) - w_T^{\text{as}}(Q^2)\,\right]}$$

auf Auswertung. Wie schon für (D . 1), (D . 2), entnehmen wir $w_T(Q^2)$ aus (4.16), hier jedoch nur einmal. $w_T^{\rm as}(Q^2)$ steht in (4.17). Wenn wir dem dortigen Vorfaktor $T^2/6$ die Gestalt $\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty dp\, n(p)\, p$ geben, entsteht

$$\Delta^\int \;=\; 2\int_Q w_0(Q^2)\,\frac{1}{8\pi^2 q}\int_0^\infty dp\; n(p)\;\left[\mathcal{L}(q_0,q,p)-8pq\,\mathcal{V}_s\frac{1}{s+Q^2}\right]\quad . \tag{E.1}$$

Setzen wir (D.5) für $\mathcal{L}(q_0,q,p)$ ein, so kompensieren sich die A– und B–Terme. Es liest sich irgendwie besser — insbesondere mit Blick auf Anhang A — wenn wir $Q^2 = r^2$ setzen, d.h. $q_0^2+q^2=r^2$ in (D.4), sowie $\int_Q = (2\pi)^{-4}\int d^4x$:

$$\begin{aligned}\Delta^\int \;&=\; 2\,\frac{1}{8\pi^2}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\; w_0(r^2)\,\frac{1}{q}\int_0^\infty dp\; n(p)\;\left[\ln\left(\frac{r^2+4p^2+4pq}{r^2+4p^2-4pq}\right)-\frac{8pq}{r^2}\right]\\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\infty dr\; r^3\, w_0(r^2)\int_0^\infty dp\; n(p)\;\left[\left\langle\frac{1}{rs}\ln\left(\frac{r^2+4p^2+4pq}{r^2+4p^2-4pq}\right)\right\rangle-\frac{8p}{r^2}\right]\;.\end{aligned} \tag{E.2}$$

(A.4) bis (A.6) haben soeben zur zweiten Zeile geführt. Mehr noch, (A.11) bewerkstelligt die Winkelmittelung. Nach Substitution $r^2 = \varrho$ folgt

$$\begin{aligned}\Delta^\int \;&=\; \frac{1}{4}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\infty dp\; n(p)\int_0^\infty d\varrho\; w_0(\varrho)\;\frac{1}{p}\;\Big(\varrho+4p^2-|\varrho-4p^2|-8p^2\Big)\\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\infty dp\; n(p)\;\frac{1}{p}\int_0^{4p^2} d\varrho\; w_0(\varrho)\;\Big(\varrho-4p^2\Big)\quad .\end{aligned} \tag{E.3}$$

Ohne $w_0(\varrho)$ spezifizieren zu müssen, sind wir hübsch weit voran gekommen. In (E.3) wird w_0 nur bei $\varrho \leqslant 4p^2$ befragt, und $4p^2$ wird wiederum durch $n(p)$ festgehalten, weit unter Λ^2. Es genügt also, in (E.3) die klein–ϱ–Asymptotik (2.44), d.h. $(\mathrm{LN}-\ln(\varrho)/(16\pi^2)$ für $w_0(\varrho)$ einzusetzen. Die ρ–Integration wird damit elementar, und wir kommen an bei

$$\begin{aligned}\Delta^\int \;&=\; \frac{T^4}{4\pi^2}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\left(2\int_0^\infty dp\;\frac{p^3\ln(p)}{e^p-1}+\;\left[\,2\ln(2T)-\tfrac{3}{2}-\mathrm{LN}\,\right]\int_0^\infty dp\;\frac{p^3}{e^p-1}\right)\\ &=\; \left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{T^2}{12}\right)^2\,\frac{3}{5}\,\Big[\,-4\,\mathrm{LN}+8\,\ln(4\pi T)-8\,z_3-6\,\Big]\;.\end{aligned} \tag{E.4}$$

Dies ist (4.25) im *main text*. Die Integrale hatten wir soeben aus (G.9) und (H.35) geholt. Mit dem ersten I_{0T}–Anteil sind wir recht zügig fertig geworden.

Nun steht an, auch den zweiten I_{0T}–Anteil auszuwerten, nämlich

$$\boldsymbol{I_{0T}^{\rm ohne} \;=\; 2\sum\nolimits_Q^{\rm ohne} w_0(Q^2)\, w_T(Q^2)}\;.$$

Wir ziehen unverzüglich (4.12) zu Rate. Um $F(z)$ zu bilden, ist $Q_0 = \omega_n^Q$ durch $-iz$ zu ersetzen. Letztlich sorgt die Bose–Funktion $n(z)$ in (4.12) dafür, daß wir auch hier w_0 bei kleinem Argument nehmen dürfen, d.h. $w_0(Q^2)\to[\,\mathrm{LN}-\ln(q^2-z^2)\,]/(16\pi^2)$, siehe (2.44). Aus gleichem Grunde — bald sieht man, daß dies funktioniert — können wir in (4.16) die $\mathcal{V}_t$–Operation weglassen:

$$I_{0T}^{\rm ohne} \;=\; 2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^4}\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)\int_{\circlearrowleft} dz\; n(z)_{\text{ignoriere Pole}}\;\frac{\mathrm{LN}-\ln(q^2-z^2)}{16\pi^2}\;\frac{1}{8\pi^2 q}\quad .$$

$$\cdot \int_0^\infty dp\, n(p) \int_0^\infty du\;\, \mathcal{A}_q\, \mathcal{A}_p \left(\frac{1}{u-(z-p)^2+(p-q)^2} + \text{dito}_{z\to -z} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{4\pi^4} \int_0^\infty dp\, n(p) \int_0^\infty dq\; q\;\, \mathcal{A}_q \int_0^\infty du\;\, \mathcal{J} \tag{E.5}$$

mit

$$\mathcal{J} = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right) \int_{\mathcal{D}} dz\; n(z)_{\text{ign.}} \left[\frac{\text{LN} - \ln(q^2-z^2)}{(z-p)^2-u-(p-q)^2} + \frac{\text{LN} - \ln(q^2-z^2)}{(z+p)^2-u-(p-q)^2} \right] . \tag{E.6}$$

Die Konturintegration liefert zwei Sorten Beiträge, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$, nämlich jene ($\mathcal{J}_1$), die sich per Residuensatz aus den Polen ergeben, und jene ($\mathcal{J}_2$), die von den Wegen entlang Schnitt (ab $|q|$ nach rechts außen) des Lorarithmus herrühren. Für $\mathcal{J}_2$ können wir aber auch $\ln(q^2-z^2)$ als $\ln(|q|-z) + \ln(|q|+z)$ schreiben, den zweiten Term weglassen, den ersten integral darstellen,

$$\ln(|q|-z) = \int_0^\infty dt\; \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{z-t-|q|} \right) \quad , \tag{E.7}$$

und erneut den Residuensatz bedienen. Mit Notationen wie in (D.30) und (D.31) folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= \frac{\sigma(w_u+p)}{2w_u} \left[\text{LN} - \ln\left((w_u+p)^2-q^2\right) \right] + \frac{\sigma(w_u-p)}{2w_u} \left[\text{LN} - \ln\left((w_u-p)^2-q^2\right) \right] , \\
\mathcal{J}_2 &= -\int_{|q|}^\infty dt\; n(t) \left(\frac{1}{(t-p)^2-u-(p-q)^2} + \frac{1}{(t+p)^2-u-(p-q)^2} \right] .
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Gemäß (E.5) möchten nun beide $\mathcal{J}$'s über u integriert werden. Für $\mathcal{J}_1$ empfiehlt es sich, $w_u = \sqrt{u+(p-q)^2}$ als neue Variable t zu substituieren. Bei $\mathcal{J}_2$ ziehen wir das u– am t–Integral vorbei und führen es aus:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty du\;\, \mathcal{J}_1 &= \left[\int_{|p-q|+p}^\infty + \int_{|p-q|-p}^\infty \right] dt\; \sigma(t)\; \left[\text{LN} - \ln\left(t^2-q^2\right) \right] \quad , \\
\int_0^\infty du\;\, \mathcal{J}_2 &= -\int_{|q|}^\infty dt\; n(t)\; \left[\ln\left((p-q)^2-(t-p)^2\right) + \ln\left((p-q)^2-(t+p)^2\right) \right] .
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Der sorglose Umgang mit der oberen u–Grenze in $\mathcal{J}_2$ war mit Blick auf die nachfolgende (auch vorher mögliche) $\mathcal{A}_q$–Operation erlaubt. Selbige bietet keine Probleme. Sodann folgt nach (E.5) das q–Integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dq\; q\; \mathcal{A}_q \int_0^\infty du\;\, \mathcal{J}_1 &= \int_0^\infty dt\; \int_{t-2p}^{t+2p} dq\; q\; n(t)\; \left[\text{LN} - \ln\left(q^2-t^2\right) \right] \quad , \\
\int_0^\infty dq\; q\; \mathcal{A}_q \int_0^\infty du\;\, \mathcal{J}_2 &= \int_0^\infty dt\; \int_0^t dq\; q\; n(t)\; \ln\left(\frac{(2p+q)^2-t^2}{(2p-q)^2-t^2} \right) .
\end{aligned} \tag{E.10}$$

In der oberen Zeile hatte sich (D.36) nützlich gemacht. Über q–Verschiebungen in der unteren Zeile werden Terme mit $\ln(q^2-t^2)$ entstehen. Es ist an der Zeit, $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ wieder zu $\mathcal{J}$ zusammenzufügen:

$$\int_0^\infty dq\; q\; \mathcal{A}_q \int_0^\infty du\;\, \mathcal{J} = \int_0^\infty dt\; n(t) \left(\text{LN} \int_{t-2p}^{t+2p} dq\; q - 2p \int_{2p-t}^{2p+t} dq\; \ln\left(q^2-t^2\right) \right) . \tag{E.11}$$

Nach Aufführen der q–Integrationen setzen wir (E . 11) in (E . 5) ein und können den Integranden des Doppelintegrals bezüglich p und t symmetrisieren. Per

$$2p\,[\,(p+t)\ln(p+t)-(p-t)\ln(p-t)\,]\;\to\;(p+t)^2\ln(p+t)-(p-t)^2\ln(p-t)\qquad(\mathrm{E}\,.\,12)$$

kommt dabei das Integral $\mathcal{U}$, (D . 23), ins Spiel :

$$I_{0T}^{\text{ohne}}=\left(\frac{T^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{2\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{18}\,[\,\mathrm{LN}+2+2\ln(2T)\,]-\mathcal{U}\right)\quad.\qquad(\mathrm{E}\,.\,13)$$

Wir sind so weit. Nur noch $\mathcal{U}$ aus (D . 26) ist einzusetzen :

$$I_{0T}^{\text{ohne}}=\left(\frac{T^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{36}\left[\mathrm{LN}+\frac{34}{15}-2\ln(4\pi T)+2\,z_3\right]\qquad(\mathrm{E}\,.\,14)$$

Dies ist (4.26) im *main text.*

F $\quad I_{00}=\sum_Q w_0^2$: Auswertung

Es wird ein Spaziergang. Alle einschlägigen Schwierigkeiten wurden nämlich schon in den Anhängen D und E überwunden und geübt. Wir erinnern zuerst daran, daß $I_{00}^{\int}$ wegen T–Unabhängigkeit keiner Auswertung bedarf, siehe § 4.4 und Text vor (3.9). Zu

$$\boldsymbol{I_{00}^{\text{ohne}}=\sum\nolimits_Q^{\text{ohne}}w_0^2(Q^2)}\ .$$

ist erneut (4.12) zu befragen. Anhang E bot ab (E . 5) ein Beispiel dafür, wie die Bosefunktion $n(z)$ in (4.12) das w_0–Argument $Q^2\to q^2-z^2$ weit unter Λ^2 festhält. Auch hier setzten wir also mutig (2.44) für w_0 ein :

$$I_{00}^{\text{ohne}}=\left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2\sum_Q^{\text{ohne}}\left[\,\mathrm{LN}-\ln(q^2-z^2)\,\right]^2=\left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{\circlearrowright}dz\;n(z)_{\text{ignoriere Pole}}\;2\,\left[-\mathrm{LN}^2+2\,\mathrm{LN}\ln(q^2-z^2)-\ln^2(q^2-z^2)\right]\quad.\qquad(\mathrm{F}\,.\,1)$$

Der Faktor 2 an der eckigen Klammer beruht auf $F(-z)=F(z)$. Der quadrierte LN entfällt sofort: keine Pole. Mit dem LN^1–Term verfahren wir wie bei (E . 7) und Text davor. Aber auch der $\ln^2$–Term erfreut sich an (E . 7), weil wir einmal nur den einen, einmal nur den anderen ln integral darzustellen brauchen :

$$I_{00}^{\text{ohne}}=\left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty dq\;q^2\int_0^\infty dt\;\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{\circlearrowright}dz\;n(z)_{\text{ignoriere Pole}}\;\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{z-t-q}\right)\left[\,\mathrm{LN}-\ln(q^2-z^2)_{\text{ignoriere Schnitt}}\,\right]\quad.\qquad(\mathrm{F}\,.\,2)$$

Via Residuensatz, $t\to t-q$ und Integrale–Vertauschung folgt

$$I_{00}^{\text{ohne}}=\left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty dt\;n(t)\int_0^t dq\;q^2\,\left[\,\mathrm{LN}-\ln(q^2-t^2)\,\right]\quad.\qquad(\mathrm{F}\,.\,3)$$

Die q–Integration ist elementar, denn

$$q^2 \ln(q^2 - t^2) \;=\; \partial_q \left[\frac{1}{3}\, q^3 \ln(q^2 - t^2) + \frac{1}{3}\, t^3 \ln\left(\frac{q+t}{q-t}\right) - \frac{2}{3}\, q^3 - \frac{2}{3}\, q\, t^2 \right] \;, \qquad \text{(F.4)}$$

und wir kommen an bei

$$I_{00}^{\text{ohne}} = \left(\frac{T^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{24\pi^4} \left(\left[\text{LN} - 2\ln(2T) + \frac{8}{3}\right] \int_0^\infty dt\, \frac{t^3}{e^t - 1} - 2 \int_0^\infty dt\, \frac{t^3 \ln(t)}{e^t - 1} \right) \;. \qquad \text{(F.5)}$$

Erneut sind nur die aus (G . 9) und (H . 35) bekannten Integrale entstanden. Das Resultat

$$I_{00}^{\text{ohne}} = \left(\frac{T^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{24 \cdot 15} \left[\text{LN} - 2\ln(4\pi T) + 2\, z_3 + \frac{8}{3} \right] \qquad \text{(F.6)}$$

steht als (4.29) im *main text*.

G Frequenzsummen

Hier wurde unverändert ein 3-seitiges „Sonderblatt“ aus der home page übernommen.

Auswertung einer unendlichen Summe ? — Konturintegral ! Kaum wird es konkret mit einer Statistik von Systemen aus Bosonen ($\omega_n := \pi\, 2n\, T\,,\ \eta = +1$) oder Fermionen ($\omega_n := \pi\,(2n+1)\,T\,,\ \eta = -1$), schon hat man sich mit Ausdrücken der Form $T\sum_n F(i\omega_n)$ herumzuschlagen. Hierin läuft n von $-\infty$ bis ∞, und $F(z)$ sei eine analytische Funktion, welche keine Pole auf der imaginären Achse hat. Fünf Schritte. Der erste Schritt verkompliziert nur, $F(i\omega_n) = (2\pi i)^{-1} \oint_n dz\; F(z)/(z - i\omega_n)$, aber er ist jedenfalls richtig: Das Integral umrunde die Stelle $z = i\omega_n$ mathematisch positiv und infinitesimal eng. Der zweite Schritt nutzt diese „Enge“ aus,

$$\frac{T}{z - i\omega_n} = \frac{1}{e^{\beta(z - i\omega_n)} - 1} = \frac{1}{\eta e^{\beta z} - 1} = \eta\, n(z) \qquad \text{mit} \qquad n(z) := \frac{1}{e^{\beta z} - \eta} \quad , \qquad \text{(G.1)}$$

und der dritte (in (G . 1) schon getan), daß $e^{-i\beta\omega_n} = e^{-i\pi(2n + \{ {0 \atop 1} \})} = \eta$ sowie $\eta^2 = 1$ ist. Viertens schnappt sich nun $\sum_n$ die einzig verbliebene n–Abhängigkeit und addiert die $\oint_n$–Kringel auf zu $\downarrow\uparrow$:= zwei vertikale Geraden nahe links/rechts der i–Achse :

$$T \sum_n F(i\omega_n) \;=\; \frac{\eta}{2\pi i} \int_{\downarrow\uparrow} dz\; F(z)\; n(z) \;\;\overset{\lightning}{=}\;\; \frac{-\eta}{2\pi i} \left[\oint dz\; F(z)\; n(z) \right]_{\text{ohne n}-\text{Pole}} \;. \qquad \text{(G.2)}$$

Das geschlossene Integral rechts soll schlicht die komplexe Ebene weit außen (mathematisch positiv) umrunden. Der gefährliche letzte Schritt braucht folglich (a) einen genügend raschen Abfall von F nach außen (so daß die beiden großen Halbkreise beitragslos hinzugefügt werden können) und (b) das Ignorieren der n–Pole auf der i–Achse (um die Vertikalen der zwei Halbebenen–Umrundungen vergessen zu dürfen). Kurz, da n sonst keine Pole hat, darf/soll $\bigcirc$ um die F–Pole zusammengezogen werden (bzw. an F–Schnitte heran ; letztere ggf. via Spektraldarstellung vermeiden ?!).

Beispiel : Bosonen, $\eta = 1$, $F(z) = 1/(x^2 - z^2)$. Man denke an $x^2 = m^2 + \vec{p}^{\,2}$ und an den Frequenzsummen–Teil von $\sum G_0$ mit $G_0 = 1/(m^2 - P^2)$ ($\sum = T \sum_n \int d^3p\,(2\pi)^{-3}$, $P_0 = i\omega_n$) :

$$T \sum_n \frac{1}{x^2 - P_0^2} \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint dz\, \frac{n(z)_{\text{ignore poles}}}{z^2 - x^2} \;=\; \frac{1 + 2\,n(x)}{2x} \;=\; \frac{1}{2x}\, \frac{\mathrm{ch}(\beta x/2)}{\mathrm{sh}(\beta x/2)} \quad . \qquad (G\,.\,3)$$

Das Resultat (G . 3) hat es in sich : Folgerungen, Verallgemeinerung, Rückführung auf und Fußweg zu — der Reihe nach :

1. Multipliziert man (G . 3) mit $-2x$ und integriert über x von c bis y, dann entsteht

$$T \sum_n \ln\left(\frac{y^2 - P_0^2}{c^2 - P_0^2}\right) \;=\; y - c + 2\,T \ln\left(\frac{1 - e^{-\beta y}}{1 - e^{-\beta c}}\right) \quad . \qquad (G\,.\,4)$$

Nun multipliziere man (G . 4) mit β, setze $\beta y = \omega$ und lasse βc gegen Null gehen :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\omega^2}{(2\pi n)^2}\right) \;=\; \ln\left(\frac{\mathrm{sh}(\omega/2)}{\omega/2}\right) \quad . \qquad (G\,.\,5)$$

Nach Exponenzieren von (G . 5) und Erweiterung auf alle n entsteht schließlich die Produkt–Weisheit

$$\prod_n{}' \frac{(2\pi n)^2}{\omega^2 + (2\pi n)^2} \;=\; \frac{\omega^2 e^{-\omega}}{(1 - e^{-\omega})^2} \quad , \qquad (G\,.\,6)$$

Der Strich schließt $n = 0$ aus. Man kontrolliere (G . 6) anhand $\omega \to 0$. (G . 3) ist Kapusta's Formel (2.38). (G . 5) konnte/sollte Coleman (*Aspects of symmetrie*) gebrauchen, um eine Determinante auszuwerten (Gl. (2.16) in Lecture 7). (G . 6) findet sich in Hansen (*A table of series and products*) als (89.5.16) sowie in Kleinert (*Path integrals in Q., St. and Polymer physics*) als (2.269) und ist Zwischenschritt zur Zustandssumme nicht–wechselwirkender geladener Bosonen, s. [9].

2. Irgendwie harmloser wirkt (G . 3), wenn man via $x = 2\pi T a$ erst einmal „ins Normale" übersetzt und sodann ein wenig spielt ($a = ix/(2\pi)$) :

$$\sum_n \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{a}\, \frac{\mathrm{ch}(\pi a)}{\mathrm{sh}(\pi a)} \quad , \qquad \sum_n \frac{2x}{(2\pi n)^2 - x^2} = \frac{\sin(x)}{\cos(x) - 1} \quad . \qquad (G\,.\,7)$$

Auf den ersten Blick sieht die Beziehung

$$\sum_n \frac{2x}{(2\pi n + y)^2 - x^2} \;=\; \frac{\sin(x)}{\cos(x) - \cos(y)} \qquad (G\,.\,8)$$

wie eine echte Verallgemeinerung von (G . 7) aus. Jedoch kann (G . 8) schlicht aus (G . 7) hergeleitet werden. Partialbruchzerlegung liefert zunächst

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x) - 1} \;=\; \sum_n \left(\frac{1}{2\pi n - x} - \frac{1}{2\pi n + x}\right) \quad .$$

Dies nehme man nun einmal bei $x \to x-y$ und einmal bei $x \to x+y$, addiere die Resultate und bemühe ein wenig Trigonometrie. Fertig.

(G . 8) ist eine feine Formel. Sie macht sich in der Quantenmechanik nützlich, wenn man zum Dirac–Kamm den (unüblichen, aber) logischen Lösungsweg wählt : Bloch–Theorem, Bloch–Faktoren als Fourier–Reihe, stationäre Schrödinger–Gleichung für die Fourier–Koeffizienten und deren Lösung mittels (G . 8) .

3. Statistische Physik führt gern auf die folgenden beiden Integrale. Wenn man beispielsweise zu $\sum G_0$ (siehe Text vor (G . 3)) auch die Integration über $\vec{p}$ ausführt, entsteht das erste. Und die Energie $E = 2\sum_{\vec{p}} p\, n(p)$ der Hohlraumstrahlung braucht das zweite. Behauptung : ls

$$\int_0^\infty dx \; \frac{x}{e^x - 1} \;=\; \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \int_0^\infty dx \; \frac{x^3}{e^x - 1} \;=\; \frac{\pi^4}{15} \quad . \tag{G . 9}$$

Hm. Das ist eben so. Im Bronstein stehts ja auch. Alles Lügen ? Die geometrische Reihe jedenfalls nicht :

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x}{e^x - 1} \;=\; \int_0^\infty dx\, x \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} \;=\; \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6} \quad . \tag{G . 10}$$

Stop ! Ganz rechts, woher kam das ? — aus Bronstein, aaaha. Elende Schummler ! Es folgt vielmehr aus (G . 7) (linke Gleichung) im limes $a \to 0$:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a^2 + n^2} \;=\; -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\,\frac{\mathrm{ch}(\pi a)}{\mathrm{sh}(\pi a)} \;=\; \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} a^2 \;+\; \mathcal{O}(a^4) \quad . \tag{G . 11}$$

Rechts wurde der a^2–Term noch mit angegeben, weil ∂_a von (G . 11) benötigt wird, wenn man (auf gleiche Weise) das rechte Integral in (G . 9) schlachtet (ohne zu lügen).

4. „Ich kann aber keine Funktionentheorie (gerade 2. Semester absolviert)“ bzw. traue ihr nicht über den Weg. Irgendwie muß doch $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2$ auch „zu Fuß“ zu erhalten sein. Gewiß. Allerdings führt der Trick $f(x) := \sum_{n=1}^\infty x^n/n^2$, Dgl für f etc. alsbald auf das Integral (G . 10) zurück, im Kreise herum also. Eine klügere Funktion bitte (Idee Fourier–Reihe). Es ist $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2 = \frac{1}{2} g(0)$, wenn man $g(x)$ wie folgt definiert und somit vorweg weiß, daß g gerade und 2π–periodisch ist und verschwindenden Mittelwert $\overline{g} = 0$ hat :

$$g(x) := {\sum_n}' \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \Rightarrow \quad g''(x) \;=\; 1 - \sum_n \cos(nx) \;=\; 1 - 2\,\pi\, \delta_{\text{periodisch}}(x) \quad . \tag{G . 12}$$

Die g–Dgl rechts in (G . 12) löst sich im Kopf (nachträglich jedenfalls), und die Integrationskonstante folgt aus $\overline{g} = 0$:

$$g(x) \;=\; -\frac{1}{6}\pi^2 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 \qquad \text{für } 0 \le x < 2\pi \quad \text{und } 2\pi\text{–periodisch sonst} \quad . \tag{G . 13}$$

Und schon ist $g(0) = \pi^2/3$ herausgekommen, aus einem Standardbeispiel zur Fourier–Reihe also (periodische Parabeln . Übung : der Fußweg zu (G . 7) sieht ganz ähnlich aus). Jene aus dem 2. Semester wissen das, ältere Häsinnen und Hasen kaum noch. Und ich weiß nicht, warum es so gern 13 Gleichungen werden.

H Zeta–Funktion

Am Ende eines jeden der Anhänge C, D, E, F blieben Integrale stehen, die wir n i c h t ausführen konnten. Es ändert sich nichts an diesem Umstand, wenn jene Integrale durch $\zeta(s)$ und $\zeta'(s)$ ausgedrückt werden. So gesehen, ist dieser Anhang überflüssig. Andererseits soll sich ja zeigen, daß unsere Pauli–Villars–Resultate mit jenen der dimensionalen Regularisierung übereinstimmen — nur von daher weht der Wind.

Auf Angaben aus Abramovitz–Stegun [17] werden wir zwar in dicken eckigen Klammern verweisen, aber alles, was aus den beiden Definitionen

$$[\,\mathbf{23.2.1}\,] \qquad \zeta(s) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (\,1 < s\,) \tag{H.1}$$

$$\text{und} \quad [\,\mathbf{6.1.1}\,] \qquad \Gamma(s) \;=\; \int_0^\infty dt\; t^{s-1} e^{-t} \quad (\,0 < s\,) \tag{H.2}$$

folgt, möge hergeleitet und verstanden werden. Vielleicht erleichtert dieser Anhang manch einem die mühsame (!) Verifizierarbeit. Es genügt hier, die Variable s als reell anzusehen.

Zeta und Gamma haben erstaunlich viel miteinander zu tun. Bereits an

$$[\,\mathbf{23.2.7}\,] \qquad \int_0^\infty dt\; \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \;=\; \zeta(s)\,\Gamma(s) \quad (\,1 < s\,) \tag{H.3}$$

zeigt sich dies. Zur Herleitung von (H . 3) genügt die geometrische Reihe und anschließendes $t \to t/k$:

$$\int_0^\infty dt\; \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty dt\; t^{s-1} e^{-kt} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\, \Gamma(s) \quad . \tag{H.4}$$

Bleiben wir ein wenig bei $\Gamma(s)$, dem einfacheren der beiden Objekte. Nach (H . 2) ist $\Gamma(1) = 1$. Partielle Integration an (H . 2) geht im Kopf und führt auf

$$[\,\mathbf{6.1.15}\,] \qquad \Gamma(1+s) = s\,\Gamma(s) \qquad \curvearrowright \quad \Gamma(n) = (n-1)! \;\; (\,n = 1, 2, 3, \ldots\,) \tag{H.5}$$

Links in (H . 5) wurde keine s–Einschränkung angebracht. Per $\Gamma(s-1) = \Gamma(s)/(s-1)$ kann nämlich Gamma bequem für negative Argumente erklärt werden. $\Gamma(s)$ hat somit Pole bei $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$. Für die ψ–Funktion

$$[\,\mathbf{6.3.1}\,] \qquad \psi(s) := \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \partial_s \ln(\Gamma(s)) \tag{H.6}$$

gibt es die schöne Rekursionsformel

$$[\,\mathbf{6.3.5}\,] \qquad \psi(1+s) - \psi(s) \;=\; \partial_s \ln\left(\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(s)}\right) \;=\; \frac{1}{s} \quad . \tag{H.7}$$

Zu $\psi(1)$ — alsbald benötigt — gibt uns (H . 2) via $t^s = e^{s \ln(t)}$ die Auskunft

$$[\,\mathbf{6.3.3}\,] \qquad \psi(1) \;=\; \Gamma'(1) \;=\; \int_0^\infty dt\; \ln(t)\, e^{-t} \;=:\; -\gamma \quad . \tag{H.8}$$

γ ist die Euler–Konstante. Also bitte, definieren kann man nach Lust und Laune. (H . 8), das ist eben *unsere* Definition von γ . Mit dieser erhalten wir bequem das Verhalten von Gamma nahe Pol bei $s = 0$:

$$\Gamma(s) \;=\; \frac{1}{s}\,\Gamma(1+s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty dt\;\Big[\,1 + s\ln(t) + \mathcal{O}(s^2)\,\Big]\;e^{-t} \;=\; \frac{1}{s} - \gamma + \mathcal{O}(s)\quad . \qquad \text{(H . 9)}$$

Mittels (H . 7) und (H . 8) folgen die Werte

$$\psi(2) = 1 - \gamma \qquad \text{und} \qquad \psi(4) = \frac{11}{6} - \gamma \quad . \qquad \text{(H . 10)}$$

Aber wir haben uns mit der Eigenwilligkeit (H . 8) ein erstes giftiges Problem eingefangen. Später wird nämlich benötigt, daß

$$[\,\mathbf{6.1.3}\,]_{\text{zweiteZeile}} \qquad \gamma \;=\; \Big[\;\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k} \;-\; \ln(M)\;\Big]_{M\to\infty} \qquad \text{(H . 11)}$$

ebenfalls richtig ist. Also gilt es, (H . 11) aus (H . 8) herzuleiten. Sei M vorerst irgendeine positive Zahl, und gehe ε gegen $+0$ (ausgeführt in der dritten Zeile) :

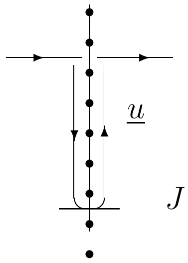
$$\begin{aligned}
\textit{unser}\;\gamma \;&=\; -\int_{\varepsilon M}^{\infty} dt\;\ln(t)\,e^{-t}\\
&=\; \big[\ln(t)\,e^{-t}\big]_{\varepsilon M}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} dt\;\frac{1}{e^t-1} + \int_{\varepsilon}^{\infty} dt\;\frac{1}{e^t-1} - \int_{\varepsilon M}^{\infty} dt\;\frac{1}{t}\,e^{-t}\quad .\\
&\qquad\qquad \text{Hier } t \to Mt \text{ im letzten Integral und nun } \varepsilon \to +0 :\\
&=\; -\ln(M) + \int_0^\infty dt\;\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{e^{-Mt}}{t}\right) \quad . \quad \text{Und jetzt } M \to \infty :\\
&=\; -\ln(M) + \int_0^\infty dt\;\frac{1-e^{-Mt}}{e^t-1} \;=\; -\ln(M) + \int_0^1 dx\;\frac{1-x^M}{1-x}\\
&=\; -\ln(M) + \int_0^1 dx\;\sum_{k=0}^{M-1} x^k \;=\; -\ln(M) + \sum_{k=0}^{M-1}\frac{1}{k+1}\quad , \quad \text{q.e.d.} \qquad \text{(H . 12)}
\end{aligned}$$

Alles klar ? Ja . Letzte Gamma–Raffinesse sei die „Reflection Formula“:

$$[\,\mathbf{6.1.17}\,] \qquad \Gamma(s)\,\Gamma(1-s) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi\,s)} \qquad (\,\text{alle } s\,)\quad . \qquad \text{(H . 13)}$$

Wir versuchen uns daran zunächst im Bereich $0 < s < 1$, weil dann die folgenden beiden Integrale existieren :

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) \;&=\; \int_0^\infty dx\;x^{s-1}\,e^{-x}\int_0^\infty dy\;y^{-s}\,e^{-y}\\
&=\; \int_0^{\pi/2} d\varphi\;\int_0^\infty dr\;e^{-r\,[\cos(\varphi)+\sin(\varphi)]}\;\sin^{s-1}(\varphi)\;\cos^{-s}(\varphi) \quad , \quad \tan(\varphi) = t\\
&=\; \int_0^\infty dt\;\frac{t^{s-1}}{1+t} \qquad = [\,\mathbf{6.1.17}\,]_{\text{zweite Zeile}} \quad , \quad t = e^u \;:\\
&=\; \int du\;\frac{e^{su}}{1+e^u} \;=:\; J \quad , \quad J = J_{\text{Horizontale }u=x+i2N\pi} + J_{N\text{ Pole}}
\end{aligned}$$



$$J_{\text{Horizontale}} = e^{is2N\pi} \int dx \, \frac{e^{sx}}{e^x+1} \quad \curvearrowright$$

$$J = \frac{1}{1-e^{is2N\pi}} \; J_{N\text{ Pole}} = \frac{1}{1-e^{is2N\pi}} \left[-2\pi i \sum_{n=0}^{N-1} e^{is(2n+1)\pi} \right]$$

$$= \frac{-2\pi i \, e^{is\pi}}{1-e^{is2\pi}} = \frac{2\pi i}{e^{is\pi}-e^{-is\pi}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{H.14}$$

mit Gruß vom Restglied der abgebrochenen geometrischen Reihe.

Die Beschränkung $0 < s < 1$ läßt sich nun bequem mittels (H.5) aufheben. Mit $s = -s'$ liegt s' in $-1 < s' < 0$, und es sticht $\Gamma(-s')\,\Gamma(1+s') = -\Gamma(1-s')\,\Gamma(s')$. In analoger Weise ($s' = s'' + 1$ usw.) wird die gesamte reelle s–Achse erreicht: (H.13) stimmt also für alle s. Genug zu Gamma.

Zurück zu Zeta. In den Anhängen D, E, F wird zu $s = 1$ bzw. zu $s = 3$ das Integral

$$\int_0^\infty dt \, \frac{t^s \ln(t)}{e^t - 1} = \partial_s \int_0^\infty dt \, \frac{t^s}{e^t-1} = \zeta'(1+s)\,\Gamma(1+s) + \zeta(1+s)\,\Gamma'(1+s)$$

$$= \zeta(1+s)\,\Gamma(1+s) \left(\frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} + \psi(1+s) \right) \tag{H.15}$$

benötigt. $\Gamma(2) = 1$ und $\Gamma(4) = 6$ holen wir uns aus (H.5). $\psi(2)$ und $\psi(4)$ stehen in (H.10). Die Werte für $\zeta(2) = \pi^2/6$ und $\zeta(4) = \pi^4/90$ holen wir uns aus (G.9). Aber der Bruch in (H.15) bleibt unklar. Er sei vorübergehend einfach mit

$$\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} =: y_1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\zeta'(4)}{\zeta(4)} =: y_3 \tag{H.16}$$

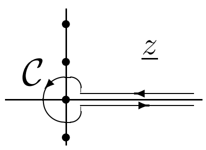
bezeichnet, so daß

$$\int_0^\infty dt \, \frac{t \ln(t)}{e^t-1} = \frac{\pi^2}{6}\,(y_1 + 1 - \gamma) \quad \text{und} \quad \int_0^\infty dt \, \frac{t^3 \ln(t)}{e^t-1} = \frac{\pi^4}{15} \left(y_3 + \frac{11}{6} - \gamma \right) \tag{H.17}$$

wird. Es ist unverkennbar, wie hohl diese Aussage ist: die beiden Integrale hätten ja von vornherein mit z.B. x_1 und x_3 bezeichnet werden können (siehe Beginn dieses Anhangs). Auch mit y_1, y_3 sind die dim. Regularisierer nicht zufrieden. Sie möchten die Brüche wie in (H.16) bei negativem Argument ins Spiel bringen.

Also gut. Dazu wird die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$, (H.1), in die gesamte komplexe s–Ebene benötigt. Funktionentheorie erzählt uns, daß es zum Nachprüfen der Behauptung

$$[\,\mathbf{23.2.4}\,] \qquad \zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} dz \, \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1} \quad (\text{alle } s)\ , \tag{H.18}$$



ausreicht, sie auf der Halbachse $1 < s$ zu verifizieren (bei $s = 1$ liegt der Zeta–Pol). Zu $1 < s$ hat liegt kein z–Pol am Ursprung, und die Kontur $\mathcal{C}$ reduziert sich auf die zwei Geraden nahe x–Achse. Dort ist $z = x \pm i\varepsilon$ und somit

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\ln(-z)} = e^{\mp i\pi(s-1)}\, x^{s-1} \quad , \quad \text{so daß}$$

$$(\mathrm{H}\,.\,18)_{\text{rechte Seite}} \;=\; -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\left(e^{i\pi(s-1)} - e^{-i\pi(s-1)}\right)\int_0^\infty dx\,\frac{x^{s-1}}{e^x-1}$$

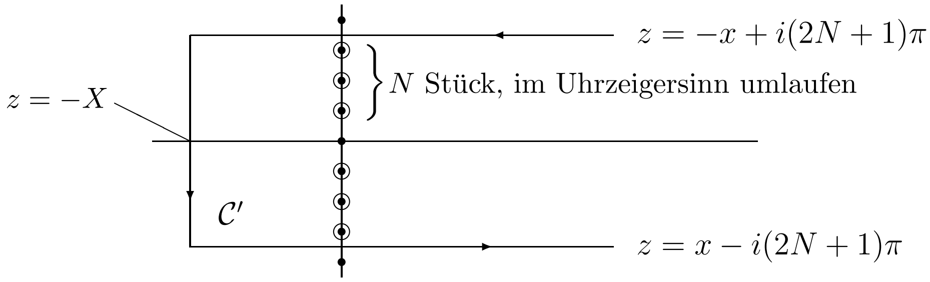
$$=\; \Gamma(1-s)\,\frac{\sin(\pi\,s)}{\pi}\,\zeta(s)\,\Gamma(s) \;=\; \zeta(s) \quad \text{wird} \quad , \quad \text{q.e.d.} \qquad (\mathrm{H}\,.\,19)$$

Soeben waren (H . 3) und (H . 13) zu Ehren gekommen. (H . 18) stimmt.

Mittels (H . 18) sollte es möglich sein, die Beziehung

$$[\,\mathbf{23.2.6}\,] \qquad \zeta(s) \;=\; 2^s\,\pi^{s-1}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) \qquad (\,\text{alle } s\,) \qquad (\mathrm{H}\,.\,20)$$

herzuleiten, welche ersichtlich Zeta'a bei negativen und positiven Argumenten miteinander verknüpft. Um das Integral (H . 18) zu $s < 1$ auszuwerten, verbiegen wir die Kontur $\mathcal{C}$ zu



(H . 21)

und schreiben $\zeta(s) =: -\,\Gamma(1-s)\,\mathcal{L}$, d.h.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}'} dz\,\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1} \;=:\; \mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}_{\text{Pole}} + \mathcal{L}_{\text{beide horizontalen Wege}} + \mathcal{L}_{\downarrow} \quad . \qquad (\mathrm{H}\,.\,22)$$

Der Pole-Beitrag ist

$$\mathcal{L}_{\text{Pole}} = -\sum_{k=1}^{N}\left[(e^{-i\pi/2}\,2k\pi)^{s-1} + (e^{i\pi/2}\,2k\pi)^{s-1}\right] = -2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{1-s}} \quad . \qquad (\mathrm{H}\,.\,23)$$

Für die beiden horizontalen Wege ergibt sich

$$\mathcal{L}_{\text{beide ...}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-X}^{\infty} dx\,\frac{(-x-iY)^{s-1} - (-x+iY)^{s-1}}{e^x+1} \quad , \quad \text{wobei } \; Y = (2N+1)\pi \quad . \qquad (\mathrm{H}\,.\,24)$$

Positive x werden vom Nenner kontrolliert. Wenn jetzt N (ergo Y) nach ∞ geschoben wird, dann verschwindet der Beitrag (H . 24) wie Y^{s-1}. Ersichtlich reicht $s < 1$ für diese Aussage aus. Bleibt der Beitrag des vertikalen Wegstückes. Sei $X \gg 1$. Dann kann der Nenner durch -1 ersetzt werden:

$$\mathcal{L}_{\downarrow} = \frac{1}{2\pi}\int_{-Y}^{Y} dt\,(X+it)^{s-1} = \frac{1}{2\pi i\,s}\,[\,(X+iY)^s - (X-iY)^s\,] \quad . \qquad (\mathrm{H}\,.\,25)$$

Erneut lassen wir N anwachsen, weit über X hinaus ($Y \gg X \gg 1$):

$$\mathcal{L}_{\downarrow} \;\to\; \frac{1}{2\pi i\,s}Y^s\left(e^{is\pi/2} - e^{-is\pi/2}\right) \;\to\; 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\,\frac{1}{s}N^s \quad . \qquad (\mathrm{H}\,.\,26)$$

Zusammen mit (H . 23) erhalten wir also

$$\zeta(s) \;=\; 2^s\,\pi^{s-1}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\,\Gamma(1-s)\,\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{1-s}} - \frac{1}{s}N^s\right]_{N\to\infty} \qquad (\,s<1\,) \quad . \qquad (\mathrm{H}\,.\,27)$$

Zu $s < 0$ geht die eckige Klammer gegen $\zeta(1-s)$, weil dann der N^s–Term verschwindet. Speziell für $s < 0$ haben wir somit (H . 20) hergeleitet. Auch zu $1 < s$ gilt (H . 20), denn dann ist $1 - s < 0$, und wir können (H . 27), bei $s \to 1 - s$ genommen, auf der rechten Seite von (H . 20) einsetzen:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{H}\,.\,20)_{\text{rechts}} \;&=\; 2^s\,\pi^{s-1}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\,\Gamma(1-s)\cdot\left[2^{1-s}\,\pi^{-s}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-s)\right)\,\Gamma(s)\,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\right] \\
&=\; \Gamma(s)\,\Gamma(1-s)\,\frac{\sin(\pi\, s)}{\pi}\,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} \;=\; \zeta(s) \quad \text{– in der Tat} \;. \qquad (\mathrm{H}\,.\,28)
\end{aligned}
$$

(H . 13) machte sich nützlich. Um schließlich den Bereich $0 < s < 1$ einzubeziehen, haben wir zu zeigen, daß die eckige Klammer in (H . 27) auch dann $\zeta(1-s)$ darstellt, d.h. daß

$$
\zeta(s) \;=\; \left[\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^s} - \frac{1}{1-s}\,N^{1-s}\right]_{N\to\infty} \qquad (\,0 < s\,) \qquad (\mathrm{H}\,.\,29)
$$

gilt. Der limes existiert, denn bei großen k variiert der Summand beliebig wenig, und das groß–N–Verhalten der Summe wird jenes von $\int_0^N dk\; k^{-s} = N^{1-s}/(1-s)$.

Zur Herleitung von (H . 29) ist etwas Vorbereitung nötig. Der $1 < s$–Bereich, in dem (H . 3) gilt, läßt sich — wie man dem Resultat gleich ansieht — nach $0 < s$ herunter ziehen:

$$
\begin{aligned}
(1-2^{1-s})\,\zeta(s)\,\Gamma(s) \;&=\; \int_0^{\infty}\!dt\;\frac{t^{s-1}}{e^t-1} - \int_0^{\infty}\!dt\;\frac{2^{1-s}\,t^{s-1}}{e^t-1} = \int_0^{\infty}\!dt\;t^{s-1}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{2}{e^{2\,t}-1}\right) \\
&=\; \int_0^{\infty}\!dt\;\frac{t^{s-1}}{e^t+1} \quad (\,0 < s\,) \;\;, \;\; \text{womit } [\,\mathbf{23.2.8}\,] \text{ hergeleitet ist.} \qquad (\mathrm{H}\,.\,30)
\end{aligned}
$$

Kein Tippfehler. Erstaunlich, nicht wahr, wie einfach Bose– und Fermi–Funktion miteinander zusammenhängen. Jetzt kanns losgehen:

$$
(1-2^{1-s})\,\zeta(s)\,\Gamma(s) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\int_0^{\infty}\!dt\;t^{s-1}e^{-kt} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^s}\;\Gamma(s) \;\;. \qquad (\mathrm{H}\,.\,31)
$$

Beiderseits kann $\Gamma(s)$ entfallen. Die k–Summe kontrollieren wir mit $2N$ und behalten $N\to\infty$ im Hinterkopf:

$$
\begin{aligned}
(1-2^{1-s})\,\zeta(s) \;&=\; \sum_{k=1}^{2N}\frac{(-1)^{k+1}}{k^s} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n-1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}\right) \\
&=\; \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n-1)^s} + \frac{1}{(2n)^s} - 2^{1-s}\frac{N^{-s}}{1-s} - 2^{1-s}\frac{1}{n^s} + 2^{1-s}\frac{N^{-s}}{1-s}\right) \\
&=\; \left[\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{k^s} - \frac{(2N)^{1-s}}{1-s}\right] - 2^{1-s}\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s}\right] \\
&=\; (1-2^{1-s})\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^s} - \frac{1}{1-s}\,N^{1-s}\right] \quad \text{q.e.d.} \qquad (\mathrm{H}\,.\,32)
\end{aligned}
$$

denn die beiden eckigen Klammern in der vorletzten Zeile werden bei $N\to\infty$ gleich. (H.29) stimmt und dürfte in [**23.2.9**] enthalten sein (das dortige Objekt „$[x]$“ ist leider unklar).

Auf (H.20) ist nun Verlaß. Endlich können wir bei (H.16), (H.17) weiter kommen, den dimensionalen Regularisierern entgegen. Die Ableitung von $\ln\left[\,(\mathrm{H}.20)\,\right]$ nach s gibt

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \ln(2\pi)+\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)}-\psi(1-s)-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \tag{H.33}$$

mit den Spezialfällen

$$z_1=\frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}=\ln(2\pi)-\psi(2)-y_1 \quad \text{und} \quad z_3=\frac{\zeta'(-3)}{\zeta(-3)}=\ln(2\pi)-\psi(4)-y_1 \ . \tag{H.34}$$

Deren Auflösung nach y_1 bzw. y_3 kann nun zusammen mit den ψ–Werten (H.10) in (H.17) eingesetzt werden:

$$\int_0^\infty dt\,\frac{t\ln(t)}{e^t-1} \;=\; \frac{\pi^2}{6}\,(\,\ln(2\pi)-z_1\,) \quad , \quad \int_0^\infty dt\,\frac{t^3\ln(t)}{e^t-1} \;=\; \frac{\pi^4}{15}\,(\,\ln(2\pi)-z_3\,) \quad . \tag{H.35}$$

Dies sind die in den Anhängen D, E, F benötigten Integrale.

Unsere letzten zwei Zeta–Probleme enstanden am Ende von Anhang C. Die beiden in (C.14) enthaltenen Integrale sind auszuwerten und sodann im limes $s\to+0$ zu betrachten. Das Intervall ist $0<s<1$. Vorweg der Blick auf die Resultate:

$$\int_0^\infty dx\,\left(\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\;-\;x^{s-2}\right)=\zeta(s)\,\Gamma(s) \quad , \quad \int_0^\infty dx\,\frac{x^{s-1}}{2+x}=2^{s-1}\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) \ . \tag{H.36}$$

Beim zweiten Integral haben wir Glück, denn es findet sich nach $x\to 2x$ in der dritten Zeile von (H.14). Zum linken Integral erinnert sich die Idee von (H.30) und in der zweiten Zeile sogar (H.30) selber:

$$\begin{aligned}(1-2^{1-s})\int_0^\infty dx\,\left(\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\;-\;x^{s-2}\right) &= \int_0^\infty dx\,\left(\frac{x^{s-1}}{e^x-1}-\frac{(x/2)^{s-1}}{e^x-1}-x^{s-2}+\frac{(x/2)^{s-2}}{2}\right)\\ = \int_0^\infty dx\,x^{s-1}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{e^{2x}-1}\right) &= \int_0^\infty dx\,\frac{x^{s-1}}{e^x+1}=(1-2^{1-s})\,\zeta(s)\,\Gamma(s)\end{aligned} \tag{H.37}$$

q.e.d. (H.36) stimmt.

Anhang C verlangt noch, beide Ausdrücke (H.36) bei $s\to+0$ zu betrachten. Zum Produkt der beiden Gamma's schauen wir am besten auf $(\mathrm{H}.13)=1/s+\mathcal{O}(s)$, so daß

$$2^{s-1}\,\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) \;=\; \frac{1}{2s}+\frac{1}{2}\ln(2)+\,\mathcal{O}(s) \tag{H.38}$$

entsteht. Der erste Ausdruck (H.36) bereitet Mühe. Vermutlich geht es irgendwie viel einfacher. Mit (H.9) können wir schreiben

$$\zeta(s)\,\Gamma(s)=\left(\frac{1}{s}-\gamma\right)\,\zeta(0)\,\left(1+s\,\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right)+\mathcal{O}(s)=\frac{-1}{2\,s}+\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}+\mathcal{O}(s) \ , \tag{H.39}$$

wobei wir soeben $\zeta(0) = -1/2$ (unter Gebrauch von (9.36) aus [18]) direkt der allgemeinen Zeta–Version (H.18) entnommen hatten:

$$[\,\mathbf{23.2.11}\,] \qquad \zeta(0) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint dz\,\frac{1}{z^2}\,f(z) \quad \text{mit} \quad f(z) = \frac{z}{e^z-1}$$
$$= \; f'(0) \;=\; \lim_{a\to 0}\frac{(1-a)\,e^a - 1}{(e^a-1)^2} \;=\; -\frac{1}{2} \quad . \tag{H.40}$$

Um den Bruch in (H.39) zu studieren, sehen wir uns (H.33) bei $s \to +0$ an,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \;=\; \ln(2\pi) + \frac{1}{s} + \gamma - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} + \mathcal{O}(s) \;\;, \tag{H.41}$$

und erlauben uns einen V o r g r i f f auf

$$\zeta(1-s)\,\Gamma(1-s) \;=\; -\frac{1}{s} + \mathcal{O}(s) \quad . \tag{H.42}$$

Mit (H.42) kommen wir rasch weiter zu

$$\zeta(1-s) \;=\; (1-s\gamma)\left(-\frac{1}{s} + \mathcal{O}(s)\right) \;=\; -\frac{1}{s} + \gamma + \mathcal{O}(s) \quad ,$$
$$\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \;=\; \frac{1}{s} + \gamma + \mathcal{O}(s) \quad \text{und via (H.41) zu} \quad \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \;=\; \ln(2\pi) \quad . \tag{H.43}$$

Dies in (H.39) führt auf

$$\zeta(s)\,\Gamma(s) = \frac{-1}{2\,s} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \mathcal{O}(s) \;\; . \tag{H.44}$$

Nach (C.15) sind die Ausdrücke (H.44) und (H.38) schlicht zu addieren:

$$I(s) = \frac{-1}{2\,s} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi) \; + \; \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\ln(2) + \; \mathcal{O}(s) \tag{H.45}$$

Weil sich die $1/s$–Anteile hübsch kompensieren, wird $s \to +0$ möglich. $I(0)$ steht links in (C.16).

Fertig? Nein. Der Vorgriff (H.42) ist noch zu belegen. Es liegt nahe, dazu in (H.30) s durch $1-s$ zu ersetzen und dann kleine s anzusehen:

$$\zeta(1-s)\,\Gamma(1-s) \;=\; \frac{1}{1-2^s}\int_0^\infty dt\,\frac{t^{-s}}{e^t+1} = \frac{-1}{s\ln(2) + \frac{1}{2}s^2\ln^2(2)}\int_0^\infty dt\,\frac{1-s\ln(2)}{e^t+1}$$
$$= \; \frac{-1}{s\ln(2)}\Big(1 - \frac{s}{2}\ln(2)\Big)\,\Big(\ln(2) - s\,\mathcal{M}\Big) + \mathcal{O}(s)$$
$$= \; -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{\ln(2)}\,\mathcal{M} + \mathcal{O}(s) \quad \text{mit} \quad \mathcal{M} = \int_0^\infty dt\,\frac{\ln(t)}{e^t+1} \quad . \tag{H.46}$$

Die Zeta–Thematik steckt voller Herausforderungen. Dieses simple Integral $\mathcal{M}$ kann doch wohl nichts Übles mehr werden. Wir kontrollieren die untere Grenze mit ε, integrieren partiell und schreiben $\ln(1+e^{-t})$ als Reihe:

$$\mathcal{M} \;=\; \ln(\varepsilon)\ln(2) + \int_\varepsilon^\infty dt\,\frac{1}{t}\,\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,e^{-kt}$$
$$= \; \ln(\varepsilon)\ln(2) + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,E_1(\varepsilon k) \quad \text{mit} \quad E_1(\varepsilon k) = \int_{\varepsilon k}^\infty dt\,\frac{1}{t}\,e^{-t} \quad . \tag{H.47}$$

Partielle Integration im verbliebenen Integral führt auf

$$E_1(\varepsilon k) = -\ln(\varepsilon k) + \int_0^\infty dt\ \ln(t)\, e^{-t} - \int_0^{\varepsilon k} dt\ \ln(t)\, e^{-t} = -\ln(\varepsilon k) - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon \ln(\varepsilon) \quad . \tag{H.48}$$

Es ist *unser* γ von (H . 8). Ohne E_1 stellt die Summe in (H . 47) $\ln(2)$ dar. $\varepsilon \to 0$ ist jetzt ausführbar :

$$\mathcal{M} = -\gamma \ln(2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \ln(k) \ = \ -\gamma \ln(2) - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\ln(2n-1)}{2n-1} - \frac{\ln(2n)}{2n} \right) \quad . \tag{H.49}$$

Natürlich ist ein $N \to \infty$ hinzu zu denken. Wie ging es in (H . 32) weiter ? Aha :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\gamma \ln(2) - \sum_{k=1}^{2N} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(n)}{n} + \ln(2) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \\ &= -\gamma \ln(2) - \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\ln(k)}{k} + \ln(2) \ln(N) + \ln(2)\, \gamma \quad . \end{aligned} \tag{H.50}$$

Aber das γ ganz rechts ist soeben über die Reihe (H . 11) hinein gekommen. Die verbliebene Summe erlaubt Übergang zum Integral

$$\int_N^{2N} dk\ \frac{\ln(k)}{k} = \int_{\ln(N)}^{\ln(2N)} dx\ x \ = \ \ln(2) \ln(N) + \frac{1}{2} \ln^2(2) \quad \curvearrowright \quad \mathcal{M} = -\frac{1}{2} \ln^2(2) \quad . \tag{H.51}$$

Alles recht seltsam, nicht wahr. Aber nach Einsetzen von $\mathcal{M}$ in (H . 46) kommt tatsächlich das Gewünschte heraus, nämlich (H . 42) . Ende.

Hannover, 14. März 2008

Literatur

[1] C. Itzykson and J.–B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw–Hill, NY, 1985 .

[2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison–Wesley, 1995 .

[3] H. Schulz, *Statistische Physik – beruhend auf Quantentheorie. Eine Einführung*, Harri Deutsch, 2005 .

[4] P. Arnold and C. Zhai, Phys. Rev. **D 50** (1994) 7603 .

[5] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 434 .

[6] J. Reinbach and H. Schulz, Phys. Lett. **B 404** (1997) 291 .

[7] J. Zinn–Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1996 (Third Ed.) .

[8] A. Gynther, M. Laine, Y. Schröder, C. Torrero und A. Vuorinen, arXiv:hep-ph/0703307 .

[9] Y. Schröder and H. Schulz, Phys. Rev. **D 54** (1996) 7677 .

[10] H. Schulz, Phys. Letters **B 291** (1992) 448, Nucl. Phys. **B 413** (1994) 353 ; U. Kraemmer, A. K. Rebhan and H. Schulz, Ann. Phys. **238** (1995) 286 ; F. Flechsig and H. Schulz, Phys. Lett. **B 349**, 504 (1995) ; F. Flechsig, A. Rebhan and H. Schulz, Phys. Rev. **D 52**, 2994 (1995) ; F. Flechsig and A. Rebhan, Nucl. Phys. **B 464** (1996) 279 .

[11] C. G. Callan, Phys. Rev. **D 2** (1970) 1541 (s.a. Les Houches 1975, Session XXVIII) ; K. Symanzik, Commun. Math, Phys. **18** (1970) 227 .

[12] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press 1984 .

[13] T-P. Cheng and L-F. Li, *Gauge theory of elementary particles*, Oxford, 1984 .

[14] M. Kaku, *Quantum Field Theory, a modern introduction*, Oxford, 1993 .

[15] G. Bonneau, Int.J. Mod.Phys. **A 5** (1990) 3831 .

[16] L. Dolan + R. Jackiw, Phys. Rev. **D 9** (1974) 3320 .

[17] M. Abramovitz and I. Stegun (eds.), *Pocketbook of mathematical functions*, Harri Deutsch, Thun Frankfurt/M, 1984

[18] H. Schulz, *Physik mit Bleistift*, Harri Deutsch, 6. Auflage 2006 .