Das Noethertheorem der Klassischen Mechanik im geometrischen Hamiltonformalismus

Florian Fitzek, Jens Florian Mahlmann

Bei der Betrachtung von dynamischen Systemen können unter günstigen Bedingungen und bei vorhandenen Symmetrien der Hamiltonfunktion Integrale der Bewegung berechnet werden. In der klassischen Betrachtungsweise ist ein solcher Zusammenhang durch das Noethertheoren hergestellt. Dieser erstmals von Emmy Noether im Jahre 1905 formulierte Satz setzt die Symmetrien eines Systems mit seinen Erhaltungsgrößen in Beziehung. Im Hamiltonschen Formalismus der klassischen Mechanik lässt sich das Noether-Theorem in geometrischer Sprache schreiben und beweisen. Wichtige Eckpunkte des Beweises sind die Begriffe der *Symmetrie*, der *Impulsabbildung* sowie der *Poissonwirkung*.

Bemerkung 1 (Emmy Noether). [5] (* 23. März 1882 in Erlangen, †14. April 1935 in Bryn Mawr, Pennsylvania)

Die Maxime, von der sich Emmy Noether immer hat leiten lassen, könnte man folgendermaßen formulieren: Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffiche Zusammenhänge zuruckgeführt sind. Dieser Leitsatz war ein apriorisches Grundprinzip ihres Denkens, sie konnte keinen Satz, keinen Beweis in Ihren Geist aufnehmen, ehe er nicht abstrakt gefasst und dadurch für ihr Geistesauge durchsichtig gemacht wurde. Sie konnte nur in Begriffen, nicht in Formeln denken. Als charakteristische Wesenszüge der Emmy Noether wird ein unerhöhrt energisches und konsequentes Streben nach begrifflicher Durchdringung des Stoffes bis zur restlosen methodischen Klarheit genannt. Ein hartnäckiges Festhalten an einmal als richtig erkannten Methoden und Begriffsbildungen, auch wenn diese den Zeitgenossen noch so abstrakt und unfruchtbar vorkamen und ein Streben nach Einordnung aller speziellen Zusammenhänge unter bestimmte allgemeine begriffiche Schemata dominierten ihr Wirken. Als Material für diese Denkmethode boten sich ihr die Algebra und die Arithmetik dar. Emmy Noether promovierte 1907 in Erlangen und gelangte bald darauf in den Bann der Hilbertschen Methoden und Fragestellungen. Während des ersten Weltkrieges gelangte Emmy Noether nach Göttingen wo auch Hilbert lehrte. Der Einsatz ihrer Kollegen für eine Habilitation von Emmy Noether blieb bis 1919 erfolglos. Eine Probevorlesung durfte sie zwar halten, aber es fehlten die gesetzlichen Voraussetzungen, eine Frau zur Professorin zu berufen. (Bekannt ist Hilberts Ausspruch: „Eine Universität ist doch keine Badeanstalt.“) Bis zum Jahr 1919 hielt Emmy Noether Vorlesungen unter Hilberts Namen, im Jahr 1922 erhielt sie eine Professur und einen Lehrauftrag für Algebra. Als sie 1933 in Göttingen die Lehberechtigung verlor verließ sie Deutschland als eine der ersten jüdischen Wissenschaftlerinnen und wurde an die Frauenhochschule in Bryn Mawr (Pennsylvania) berufen. Auch auch dort und im nahegelegenen Princeton hatte sie in kurzer Zeit wieder eine Schule um sich versammelt. Ihre Forschung, die die kommutative Algebra, die kommutative Arithmetik und die nichtkommutative Algebra durchlaufen hatte, wandte sich jetzt der nichtkommutativen Arithmetik zu, wurde dann aber von ihrem Tod jäh abgebrochen.

1 Hamiltonsche Gruppenwirkungen, Symmetrie und das Noethertheorem

Satz 1 (Noether - Theorem, Version I)**.** *[2] Zu jeder infinitesimalen Symmetrie der Wirkung gehört eine Erhaltungsgröße. Umgekehrt gehört zu jeder Erhaltungsgröße eine infinitesimale Symmetrie der Wirkung.*

Satz 2 (Noether-Theorem, Version II)**.** *[6] Die Erzeugende einer infinitesimalen Symmetrie eines hamiltonschen Systems ist eine Erhaltungsgröße und umgekehrt. Eine infinitesimale Symmetrie eines Hamiltonschen Systems ist eine infinitesimale kanonische Transformation, die die Hamiltonfunktion invariant lässt.*

Bemerkung 2. [2] Ein erster Kontakt mit dem Noethertheorem waren für viele der anwesenden Personen die Ausführungen von Herrn Prof. Dragon. Entsprechend der oben angesprochenen Verallgemeinerung und Loslösung formaler Beziehungen wurde hier angeführt, dass zum Beweis des Noethertheorems nur zu erkennen ist, dass die Definition einer infinitesimalen Symmetrie der Wirkung eine Erhaltungsgröße definiert. Die große Wichtigkeit des Theorems wurde von Beginn an unterstrichen, weil häufig Symmetrien der Wirkung offensichtlich sind und als geometrische Eigenschaft einfach durch Ansehen gefunden werden können. Die Erzeugende einer infinitesimalen Symmetrie eines hamiltonschen Systems ist eine Erhaltungsgröße und umgekehrt. Eine infinitesimale Symmetrie eines Hamiltonschen Systems ist eine infinitesimale kanonische Transformation, die die Hamiltonfunktion invariant lässt.

1.1 Elementare Lie-Gruppentheorie

Im folgenden bezeichnet $(G, \circ)$ eine Lie-Gruppe.

Definition 1 (Links- und Rechtswirkung, Konjugation)**.** Für ein festes $g \in G$ bezeichnet man die Abbildungen

$$\begin{aligned} L_g : G \times G &\longrightarrow G \qquad L_g(h) := g \circ h \qquad \forall h \in G \\ R_g : G \times G &\longrightarrow G \qquad R_g(h) := h \circ g \qquad \forall h \in G \end{aligned}$$

als Links- und Rechtswirkung. Als Konjugation bezeichnet man, wieder für ein festes $g \in G$, die Abbildung

$$I_g : G \times G \longrightarrow G \qquad I_g(h) := g \circ h \circ g^{-1} \qquad \forall h \in G$$

Definition 2 (Links- und rechtsinvariante Vektorfelder)**.** Man betrachtet glatte Vektorfelder $X \in T_0^1 G$ und setzt:

$$\text{X ist linksinvariant} \iff (L_g)_* X = X$$

$$\text{X ist rechtsinvariant} \iff (R_g)_* X = X$$

Bemerkung 3 (Tangentialraum einer Lie-Gruppe)*.* [3] Betrachtet man die Menge $T_0^1 G$ aller glatten Vektrofelder auf G, so bilden die linksinvarianten Vektorfelder X_L einen Unterraum. Dieser Unterraum ist isomorph zum Tangentialraum $T_e G$ der Lie-Gruppe am neutralene Element und wird mit der Lie-Klammer für glatte

Vektorfelder zu einer Lie-Algebra. Man sagt auch, dass $(X_L, [.,.]) \cong T_eG$ die zur Lie-Gruppe G gehörende Lie-Algebra $Lie(G)$ ist. Jede Lie-Gruppe wirkt auf sich selbst von links und von rechts, sowie durch die Konjugation. Damit wirkt sie auch auf ihrer Lie-Algebra $Lie(G)$. Identifiziert man diese nämlich mit dem Tangentialraum T_eG an der Identität $e \in G$, dann ist wegen $I_g(e) = e$ $(G \in G)$ die adjungierte Darstellung wie folgt definiert.

Definition 3 (Adjungierte Darstellung)**.** [3] Für ein festes $g \in G$ ist die adjungierte Darstellung die Abbildung

$$Ad_g : Lie(G) \longrightarrow Lie(G) \qquad Ad_g(\psi) := DI_g(e)\,(\psi) \qquad \forall \psi \in T_eG$$

Definition 4 (Koadjungierte Darstellung)**.** [3] Auf der dualen Lie-Algebra $Lie(G)^*$ wird eine Darstellung von G definiert. Die zur linearen Abbildung Ad_g duale Abbildung Ad_g^* ist durch die Eigenschaft

$$\left\langle Ad_g^*\left(\psi^*\right), \eta\right\rangle = \left\langle \psi^*, Ad_g\left(\eta\right)\right\rangle \qquad \left(\eta \in Lie(G), \psi^* \in Lie(G)^*\right)$$

festgelegt. Die Abbildung $g \mapsto Ad_g^*$ ist also eine Rechtswirkung, während wir hier Linkswirkungen nutzen. Die koadjungierte Darstellung von G auf $Lie(G)^*$ ist definiert durch

$$Ad_g^* : G \mapsto Lin\left(Lie(G)^*\right) \qquad g \mapsto Ad_{g^{-1}}^*.$$

Definition 5 (Exponentialabbildung)**.** Für $\psi \in Lie(G)$ ist

$$exp : Lie(G) \longrightarrow G \qquad \psi \mapsto \phi^{(\psi)}(1, e)$$

die Exponentialabbildung. Sie bildet kleine Umgebungen von $0 \in Lie(G)$ diffeomorph auf kleine Umgebungen von $e \in G$ ab.

Definition 6 (Infinitesimaler Erzeuger)**.** [3] Für eine Lie-Gruppenwirkung $\Phi : G \times P \mapsto P$ und $\psi \in Lie(G)$ heißt das folgende Vektorfeld auf P

$$X_\psi : P \mapsto TP \qquad X_\psi(P) := \tfrac{d}{dt}\Phi\left(exp(t\psi), p\right)|_{t=0}$$

Im folgenden erwähnen wir ein paar wichtige Rechenregeln im Zusammenhang mit Lie-Ableitungen und den oben genannten Begriffen aus der Lie-Gruppen- und Lie-Algebra-Theorie

Satz 3. *[3] Für jede Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra* $Lie(G)$ *und alle* $\psi, \eta \in Lie(G)$ *gilt*

$$[\eta, \psi] = \tfrac{d}{dt} Ad_{exp(-t\psi)}\left(\eta\right)|_{t=0}$$

Satz 4. *[3] Für* $\psi \in Lie(G)$ *und* $H \in C^\infty(P)$ *gilt:*

$$L_{X_\psi} f = \frac{d}{dt} f \circ \phi_{exp(t\psi)}|_{t=0}$$

Satz 5. *[3] Für* $H, J \in C^\infty(P)$ *gilt:*

$$\{H, J\} = L_{X_J} H = -L_{X_H} J$$

1.2 Symmetrie und Impulsabbildung

Bemerkung 4. Für die folgenden Überlegungen sei G eine zusammenhängende 1-Parameter-Symmetriegruppe auf dem Phasenraum (P, ω), deren Gruppenwirkung Φ die Hamiltonfunktion $H : P \longrightarrow \mathbb{R}$ invariant lässt. Für eine glatte Gruppenwirkung einer Lie-Gruppe G mit

$$\Phi : G \times P \longrightarrow P \qquad \Phi_g(p) := \Phi(g, p) \qquad \forall g \in G,$$

soll also

$$H \circ \Phi_g = H \text{ gelten.}$$

Definition 7 (Gruppenwirkung)**.** [3, 1] Mit obigen Bezeichnungen gilt:

i) Eine Gruppenwirkung heißt *symplektisch*, wenn die Diffeomorphismen $\Phi_g : P \longrightarrow P$ symplektisch sind, d.h. wenn

$$\Phi_g^* \omega = \omega \text{ für } (g \in G).$$

ii) Eine Gruppenwirkung heißt *hamiltonsch* oder *Poissonwirkung*, wenn es eine lineare Abbildung

$$F : \mathit{Lie}(G) \longrightarrow C^\infty(P)$$

gibt, die ein Homomorphismus in der Lie-Algebra $\mathit{Lie}(G)$ und $(C^\infty, \{\cdot, \cdot\})$ ist und für die mit $X_\psi : P \longrightarrow TP$, $\psi \in \mathit{Lie}(G)$ gilt:

$$X_\psi = X_{F(\psi)}$$

Bemerkung 5. Für unsere Betrachtungen sind nur solche Gruppenwirkungen interessant, die die symplektische Struktur des Phasenraums erhalten, denn die Erhaltungsgrößen sind insbesondere Funktionen auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit. Die letzten Punkte definieren, was Verträglichkeit mit der symplektischen Struktur bedeutet. Eine Poissonwirkung definiert mit anderen Worten einen Homomorphismus von der Lie-Algebra einer Gruppe in die Lie-Algebra der Hamiltonschen Funktionen.

Definition 8 (Impulsabbildung)**.** [3] Eine Abbildung $J : P \longrightarrow \mathit{Lie}(G)^*$ heißt Impulsabbildung für die symplektische Gruppenwirkung Φ, wenn diese durch die induzierte lineare Abbildung

$$F : \mathit{Lie}(G) \longrightarrow C^\infty(P) \qquad (F(\psi))\,(x) := J(x)(\psi) \qquad \forall \psi \in \mathit{Lie}(G), x \in P$$

zu einer hamiltonschen Gruppenwirkung wird.

Bemerkung 6. [**?**] Wie anfangs bemerkt besteht ein Hilfsmittel der klassischen Mechanik darin, Integrale der Bewegung zu gewinnen, indem man die Symmetrie eines gegebenen Systems analysiert. Die Erhaltungssätze von Impuls bzw. Drehimpuls bei Systemen mit Symmetrien der Translation bzw. der Rotation sind die gängigen und bekannten Beispiele. Die Impulsabbildung ist ein zunächst recht abstrakt anmutender Formalismus, um diese Analysen mathematisch-geometrisch fassbar zu machen.

Bemerkung 7 (Äquivarianz). [3] Angewandt auf die Impulsabbildung wirkt auf dem Phasenraum P die Gruppenwirkung Φ der Lie Gruppe G, während G auf der dualen Lie-Algebra $Lie(G)^*$ durch die koadjungierte Darstellung wirkt. Die Impulsabbildung wird dann Ad^*-äquivariant genannt. Es kommutiert also das nachfolgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Phi_g"] \arrow[d, "J"'] & P \arrow[d, "J"] \\ Lie(G)^* \arrow[r, "Ad^*_{g-1}"] & Lie(G)^* \end{tikzcd}$$

1.3 Das Noethertheorem

Satz 6 (Gruppenwirkung und Impulsabbildung)**.** *[3] Eine symplektische Gruppenwirkung $\Phi : G \times P \to P$ ist genau dann eine Poissonwirkung, wenn es eine Ad^*-äquivariante Impulsabbildung $J : P \to Lie(G)^*$ für Φ gibt.*

Beweis. **„$\Leftarrow$"** Sei $J : P \to Lie(G)^*$ für Φ eine Ad*-äquivariante Impulsabbildung. Wir erinnern uns, dass durch J eine lineare Abbildung $F : Lie(G) \longrightarrow C^\infty(P)$ induziert wird. Zu zeigen ist nun also, dass F nach obiger Definition die lineare Abbildung einer Poissonwirkung ist. Da J Impulsabbildung ist, gilt die Bedingung

$$X_\psi = X_{F(\psi)}$$

nach Voraussetzung. Zu zeigen ist noch die Homomorphismuseigenschaft. Hierzu zeigen wir, dass

$$\{F(\psi), F(\xi)\} = F([\psi, \xi]) \qquad (\psi, \eta \in Lie(G))$$

gilt. Dafür nutzen wir eine Beziehung zwischen Poissonklammer und Lie-Ableitung aus:

$$\begin{aligned} \{F(\psi), F(\xi)\}(x) &= \left(-L_{X_{F(\psi)}} F(\xi)\right)(x) = \left(-L_{X_\psi} F(\xi)\right)(x) \\ &= -\frac{d}{dt} F(\xi)\left(\Phi(exp(t\psi), x)\right)|_{t=0} \\ &= -\left\langle \frac{d}{dt} J\left(\Phi(exp(t\psi), x)\right)|_{t=0}, \xi \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{d}{dt} Ad^*_{exp(t\psi)}|_{t=0} J(x), \xi \right\rangle \\ &= -\left\langle J(x), \frac{d}{dt} Ad_{exp(t\psi)}|_{t=0} \xi \right\rangle \\ &= -\left\langle J(x), [-\psi, \xi] \right\rangle \\ &= F([\psi, \xi])(x) \end{aligned}$$

Damit ist mit F die Homomorphismuseigenschaft erfüllt und Φ ist eine hamiltonschen Gruppenwirkung.

„⇒" Sei nun Φ hamiltonsche Gruppenwirkung mit $F : Lie(G) \to C^\infty(P)$ und $J : P \to Lie(G)^*$, $J(x)(\psi) := F(\psi)(x)$ eine Impulsabbildung. Es ist die Ad*-äquivarianz zu zeigen, d.h.

$$J\left(\Phi_g(x)\right) = Ad^*_{g^{-1}}\left(J(x)\right) \qquad (g \in G)$$

Dies ist für die Identität $g = e$ erfüllt und G ist zusammenhängend nach obiger Voraussetzung. Es genügt zu zeigen, dass die Ableitungen beider Seiten nach g einander gleich sind. Aufgrund der Halbgruppeneigenschaft reicht es, dies bei $g = e$ zu zeigen. Da $Bild\left(exp(Lie(G))\right) \subseteq G$ eine Umgebung von $e \in G$ ist, ist dies äquivalent dazu, für alle $\psi \in Lie(G)$ zu zeigen, dass

$$\tfrac{d}{dt}\left[J\left(\Phi_{exp(t\psi)}(x)\right) - Ad^*_{exp(-t\psi)}\left(J(x)\right)\right]|_{t=0} = 0$$

ist. Weiterhin gilt für $\psi, \xi \in Lie(G)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}_{|t=0} J\left(\Phi_{exp(t\psi)}(x)\right)(\xi) - \frac{d}{dt}_{|t=0} Ad^*_{exp(-t\psi)}\left(J(x)\right)(\xi) = 0 \\
\iff &\frac{d}{dt}_{|t=0} F(\xi)\left(\Phi_{exp(t\psi)}(x)\right) - \frac{d}{dt}_{|t=0} J(x)\left(Ad_{exp(-t\psi)}\xi\right) = 0 \\
\iff &\frac{d}{dt}_{|t=0} F(\xi)\left(\Phi_{exp(t\psi)}(x)\right) - \frac{d}{dt}_{|t=0} F\left(Ad_{exp(-t\psi)}\xi\right)(x) = 0 \\
\iff &L_{X_\psi} F(\xi)(x) + F\left([\psi, \xi]\right)(x) = 0
\end{aligned}$$

Dies bedeutet wiederum

$$L_{X_\psi} F(\xi) = -F\left([\psi, \xi]\right).$$

Diese Behauptung folgt jedoch aus $L_{X_\psi} F(\xi) = -\{F(\psi), F(\xi)\}$ und aus der Homomorphismus-Eigenschaft von F.

□

Satz 7 (Noether, Version III)**.** *[1, 3] Erzeugt eine Hamiltonfunktion*

$$H : P \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (P, ω) einen Fluss Ψ und ist die Hamiltonfunktion H invariant unter der Poisson-Wirkung $\Phi : G \times P \longrightarrow P$, so ist die Impulsabbildung

$$J : P \longrightarrow Lie(G)^*$$

von Φ ein Integral der Bewegung des Systems der Hamiltonfunktion H mit

$$J \circ \Psi_t = J \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Beweis. [4, 1, 3] Da Φ nach Voraussetzung hamiltonsch ist, existiert eine Abbildung $F : Lie(G) \longrightarrow C^\infty(P)$. Zu zeigen ist für jedes $\psi \in Lie(G)$, dass $\{H, F(\psi)\} = 0$ ist. Dies folgt aber aus

$$\{H, F(\psi)\} = L_{X_{F(\psi)}} H = \tfrac{d}{dt} H \circ \Phi_{exp(t\psi)}|_{t=0} = 0$$

Damit ist F eine Erhaltungsgröße für jedes ψ. Nach Satz 6 gibt es eine Ad^*-äquivariante Impulsabbildung $J : P \longrightarrow Lie(G)^*$. Dann ist

$$(J \circ \Psi_t)(x) = (F(\psi) \circ \Psi_t)(x) = const.$$

und J ist eine Erhaltungsgröße. $\square$

2 Ausblick: Der reduzierte Phasenraum

Der Satz von Noether besagt, dass vorhandene kontinuierliche Symmetrien Erhaltungsgrößen festlegen. Diese erlauben uns, die Bewegung auf einer Untermannigfaltigkeit des Phasenraumes zu betrachten. Diese Untermannigfaltigkeit muss im allgemeinen aber keine symplektische Mannigfaltigkeit sein. Oft kann man durch weitere Anpassung (Reduktion) der Phasenraumdimension wieder ein hamiltonschen System erhalten. Mit den oben entwickelten Methoden der Darstellung des Noether-Theorems durch die Impulsabbildung kann man diese Reduktion des Phasenraumes durchführen.

Literatur

[1] Vladimir Igorevich Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer.

[2] Prof. Dr. Norbert Dragon. Stichworte und Ergänzungen zu Mathematische Methoden der Physik, 2012.

[3] Prof. Dr. Andreas Knauf. *Mathematische Physik: Klassische Mechanik*. Springer.

[4] Hans-Jürgen Matschull. Vorlesungsscript zur Theoretischen Physik, 2003.

[5] Bartel Leendert van der Waerden. Nachruf auf Emmy Noether. *Mathematische Annalen 111.*

[6] Prof. Dr. Marco Zagermann. Vorlesungsscript zur Analytischen Mechanik, 2012.